критериальная задача поиска оптимальных технологических решений при компьютерной поддержке решений в технологической подготовке горячештамповочного производства. В качестве функции выбора (принципа оптимальности) было использовано минимальное расстояние между заданными альтернативными решениями и «идеальным» с учетом важности частных критериев оптимальности. На основе ранжирования элементов с использованием сравнительных шкал разработана методика расчета коэффициентов важности частных критериев оптимальности, а также решена задача соизмеримости частных критериев, т.е. приведения качественных критериев к количественной шкале.

Практическая значимость полученных научных результатов заключается в том, что разработанные методы и методики были доведены до конкретных алгоритмов и программно реализованы с помощью интегрированной среды разработки C++ Builder 6.0 в виде модуля поиска оптимальных многокритериальных технологических решений интеллектуальной системы поддержки технологических решений «КВАНТ+ Горячая Штамповка».

Литература: **1.** *Ларичев О.И.* Наука и искусство принятия решений. М.: Наука, 1979. 200 с. **2.** *Райфа Г.* Анализ решений. М.: Наука, 1977. 408 с. **3.** *Теория* выбора и принятия решений / Н.М. Макаров, Т.М. Виноградская, А.А. Рубчинский, В.Б. Соколов. М.: Наука, 1982. 326 с. **4.** *Кини Р.Л., Райфа Х.* Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. М.: Радио и связь, 1981. 560 с. **5.** *Ларичев О.И.* Объективные модели и субъективные решения. М.: Наука, 1987. 134 с. **6.** *Грешилов А.А.* Как принять наилучшее решение в реальных условиях. М.: Наука, 1989. 320 с. **7.** *Мушик Э., Мюллер П.* Методы принятия технических решений. М.: Мир, 1990. 206 с. **8.** *Ларичев О.И., Мошкович Е.М.* Качественные методы принятия решений. М.: Наука, 1996. 208 с. **9.** *Эддоус М., Стенфилд Р.* Методы принятия решений: Пер. с англ. М.: «Аудит», ЮНТИ, 1997. 590 с. **10.** *Ларичев О.И.* Теория и методы принятия решений, а также Хроника событий в Волшебных странах. М.: Логос, 2000. 296 с. **11.** *Овезгельдыев А.О., Петров Э.Г., Петров К.Э.* Синтез и идентификация моделей многофакторного оценивания и оптимизации. К.: Наук. думка, 2002. 163 с. **12.** *Черноруцкий И.Г.* Методы принятия решений. СПб.: БХВ-Петербург, 2005. 416 с. **13.** *Загоруйко Н.Г.* Прикладные методы анализа данных и знаний. Новосибирск: Изд-во ин-та математики, 1999. 269 с. **14.** *Лбов Г.С.* Методы обработки разнотипных экспериментальных данных. Новосибирск: Наука, 1981. 160 с. **15.** *Сироджа И.Б.* Квантовые модели и методы искусственного интеллекта для принятия решений и управления. К.: Наук. думка, 2002. 427 с.

Поступила в редколлегию 25.06.2006

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Путятин Е.П.

Варфоломеева Илона Владимировна, канд. техн. наук, ассистент Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». Научные интересы: методы искусственного интеллекта для принятия решений в условиях неопределенности. Адрес: Украина, 61070, Харьков, ул. Чкалова, 3, к. 317, тел. 707-47-35, 707-40-64, e-mail: anoli_v@ukr.net.

УДК 004.93’1:519.23

РАНГОВЫЕ РЕШАЮЩИЕ ПРАВИЛА РАСПОЗНАВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

ОМЕЛЬЧЕНКО А.В.

Строятся ранговые решающие правила распознавания случайных последовательностей, различающихся сдвигом распределений и масштабом. Методом статистического моделирования исследуются характеристики разработанных решающих правил. Показывается, что при распознавании случайных последовательностей с нормальным законом распределения ранговые правила распознавания более устойчивы к нарушению модельных предположений, чем адаптивное байесовское правило.

Введение

Параметрические решающие правила обеспечивают эффективное распознавание сигналов в рамках некоторой модели, используемой при синтезе этих правил. Однако они чувствительны к отклонениям от модельных предположений. Поэтому *актуальна задача* построения робастных процедур, обладающих устойчивостью к малым отклонениям от модельных предположений. Одно из направлений построения робастных решающих процедур состоит в использовании ранговых критериев, основанных на перестановках элементов выборок [1-3].

Целью работы является создание ранговых решающих правил распознавания случайных последовательностей. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи: выполнить синтез решающих правил на основе ранговых статистик и провести исследование характеристик разработанных решающих правил.

1. Постановка задачи

Полагается, что распознаванию подлежит выборка $(x_1,..., x_n)$ объема n из последовательности независимых и одинаково распределенных случайных величин. Известно, что с вероятностью 1/2 выборка принадлежит к одному из двух распределений, различающихся значением параметра γ .

Необходимо выполнить проверку гипотезы о том, что выборка $(x_1,..., x_n)$ имеет то же распределение, что и выборка $(y_1^0,..., y_m^0)$, против альтернативы, что она имеет такое распределение, как другая выборка $(y_1^1,..., y_m^1)$.

Без ограничения общности будем считать, что для одной из гипотез о виде распределения, обозначаемой далее как H_0, значение параметра $\gamma = 0$, а для альтернативной гипотезы $H_0 - \gamma > 0$.

Ранговым решающим правилом будем называть такое правило, в котором решение выносится лишь исходя из рангов отсчетов наблюдаемых последовательностей $(x_1,...,x_n)$, $(y_1^0,...,y_m^0)$ и $(y_1^1,...,y_m^1)$ в объединенной выборке

$$(x_1,...,x_n,y_1^0,...,y_m^0,y_1^1,...,y_m^1). \qquad (1)$$

В силу независимости отсчетов всех трех заданных последовательностей ранговое решающее правило может строиться лишь исходя из рангов порядковых статистик $x_{(1)}<...<x_{(n)}$, $y^0{}_{(1)}<...<y^0{}_{(m)}$ и $y^1{}_{(1)}<...<y^1{}_{(m)}$, информация о рангах которых содержится в векторе

$$\vec{R}=(\vec{R}_X,\vec{R}_0,\vec{R}_1), \qquad (2)$$

где $\vec{R}_X$ – вектор рангов $x_{(1)},...,x_{(n)}$; $\vec{R}_0$ – вектор рангов $y^0_{(1)},...,y^0_{(m)}$; $\vec{R}_1$ – вектор рангов $y^1_{(1)},...,y^1_{(m)}$.

В случае справедливости гипотезы H_0 вероятность

$$P(\vec{R}=\vec{r}/H_0)=P(\vec{R}_{X0}=\vec{r}_{X0}/H_0)\cdot\frac{1}{C^n_{n+m}}=$$

$$=P(\vec{R}_1=\vec{r}_1/H_0)\cdot\frac{1}{C^n_{n+m}}, \qquad (3)$$

где $\vec{R}_{X0}$ – вектор рангов порядковых статистик последовательности $(x_1,...,x_n,y_1^0,...,y_m^0)$; $\vec{R}_1$ – вектор рангов порядковых статистик $y^1{}_{(1)}<...<y^1{}_{(m)}$.

Аналогично в случае справедливости гипотезы H_1

$$P(\vec{R}=\vec{r}/H_1)=P(\vec{R}_{X1}=\vec{r}_{X1}/H_1)\cdot\frac{1}{C^n_{n+m}}=$$

$$=P(\vec{R}_0=\vec{r}_0/H_1)\cdot\frac{1}{C^n_{n+m}}, \qquad (4)$$

где $\vec{R}_{X0}$ – вектор рангов порядковых статистик последовательности $(x_1,...,x_n,y_1^1,...,y_m^1)$; $\vec{R}_0$ – вектор рангов порядковых статистик $y^0{}_{(1)}<...<y^0{}_{(m)}$.

Ранговое решающее правило распознавания случайных последовательностей, распределения которых различаются параметром γ, будем называть локально-оптимальным в смысле критерия минимума средней вероятности ошибки распознавания, если оно доставляет минимальное значение производной от средней вероятности ошибки распознавания $P'_{\text{ош.ср.}}(\gamma)$ в точке $\gamma=0$ и $P_{\text{ош.ср.}}(0)=1/2$. Поскольку $P'_{\text{ош.ср.}}(\gamma)<0$, то для локально-оптимального правила с увеличением значения γ вероятность $P_{\text{ош.ср.}}(\gamma)$ уменьшается наиболее быстро.

2. Локально-оптимальное ранговое решающее правило распознавания последовательностей, различающихся сдвигом распределений

В данном случае предполагается, что элементы выборки $(y_1^0,...,y_m^0)$ взяты из распределения с плотностью $f(x)$, $x\in R$, а элементы выборки $(y_1^1,...,y_m^1)$ – из распределения с плотностью $f(x-\Delta)$, $x\in R$, $\Delta>0$.

Для синтеза локально-оптимального рангового решающего правила распознавания выборки $(x_1,...,x_n)$ используем следующий результат, установленный В. Гефдингом [3].

Пусть $X_1,...,X_n$ и $Y_1,...,Y_m$ – случайные выборки из произвольных абсолютно непрерывных распределений с плотностями $g(x)$ и $h(x)$. Пусть также $R_{(1)},...,R_{(n)}$ – ранги $X_{(1)},...,X_{(n)}$ в объединенной выборке $X_1,...,X_n$, $Y_1,...,Y_m$ и условие $g(x)>0$ влечет $h(x)>0$. Тогда

$$P(\vec{R}=\vec{r})=\frac{1}{C^m_{n+m}}M[\prod_{i=1}^{n}\frac{g(V_{(r_i)})}{h(V_{(r_i)})}], \qquad (5)$$

где $V_{(1)}<...<V_{(m+n)}$ – порядковые статистики размера $m+n$ из распределения с плотностью $h(x)$.

Приведенный результат (5) позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Для сформулированной выше постановки задачи согласно локально-оптимальному ранговому решающему правилу распознавания следует принять решение в пользу гипотезы* H_0, *если*

$$\sum_{i=1}^{n}a(r_i)\le 0, \qquad (6)$$

где
$$a(r_i)=-M[\frac{f'(V_{(r_i)})}{f(V_{(r_i)})}], \qquad (7)$$

r_i – *ранги отсчетов* $(x_1,...,x_n)$ *в объединенной выборке (1) из распределения с плотностью* $f(x)$, *и принять решение в пользу* H_1 *в противном случае.*

Доказательство. Рассмотрим распределение вектора $\vec{R}$ для случая обеих гипотез. Согласно (3)-(5)

$$P(\vec{R}=\vec{r}/H_0)=\frac{1}{C^n_{n+m}C^{n+m}_{n+2m}}M[\prod_{i=1}^{m}\frac{f(V^1{}_{(r_i)}-\Delta)}{f(V^1{}_{(r_i)})}], \qquad (8)$$

$$P(\vec{R}=\vec{r}/H_1)=\frac{1}{C^n_{n+m}C^m_{n+2m}}M[\prod_{i=1}^{n+m}\frac{f(V^{X1}{}_{(r_i)}-\Delta)}{f^{X1}(V_{(r_i)})}], \qquad (9)$$

где усреднение проводится по распределению с плотностью вероятности f.

Средняя вероятность ошибки распознавания сигналов равна

$$P_{\text{ош.ср.}}(\Delta)=\frac{1}{2}\sum_{r\in P_1}P(\vec{R}=\vec{r}/H_0)+\frac{1}{2}\sum_{r\in P_0}P(\vec{R}=\vec{r}/H_1). \qquad (10)$$

Представим выражение для вероятности ошибки распознавания (10) в следующем виде:

$$P_{\text{ош.ср.}}(\Delta)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sum_{r\in P_0}\Big[P(\vec{R}=\vec{r}/H_0)-P(\vec{R}=\vec{r}/H_1)\Big]. \qquad (11)$$

Используем (8) и (9) в (11). Получим

$$P_{\text{ош.ср.}}(\Delta)=\frac{1}{2}-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{r\in P_0}\frac{1}{C^n_{n+m}C^m_{n+2m}}\Bigg[M[\prod_{i=1}^{m}\frac{f(V^1{}_{(r_i)}-\Delta)}{f(V^1{}_{(r_i)})}]-$$

$$-M[\prod_{i=1}^{n+m}\frac{f(V^{X1}(r_i)-\Delta)}{f(V^{X1}(r_i))}]\Bigg]. \qquad (12)$$

Очевидно, что $P_{\text{ош.ср.}}(0)=1/2$.

Продифференцируем выражение (12) по переменной Δ и используем подстановку $\Delta = 0$. Получим

$$P'_{\text{ош.ср.}}(0)=\frac{1}{2}\frac{1}{C_{n+m}^{n}C_{n+2m}^{m}}\sum_{r\in P_0}\sum_{i=1}^{n}a(r_i), \qquad (13)$$

где функции $a(r_i)$ определяются выражением (7) и в теории ранговых критериев носят название меток.

Очевидно, что минимальное значение выражения (13) достигается для решающего правила (6).

3. Ранговые решающие правила распознавания последовательностей, различающихся сдвигом распределений

Предположим вначале, что распределение последовательностей подчиняется логистическому закону. В данном случае использование приближенных меток [2]

$$a_N(i)\approx\frac{2i}{N+1}-1, \qquad (14)$$

где $N=n+2m$, в решающем правиле (6) конкретизирует его следующим образом: выносится решение в пользу гипотезы H_0, если

$$\sum_{i=1}^{n}r_i\le d, \qquad (15)$$

здесь $d=\frac{n\cdot(N+1)}{2}$.

Если же неравенство (15) не выполняется, то выносится решение в пользу гипотезы H_1.

Статистика в левой части выражения (15), называемая статистикой Уилкоксона, может быть выражена через статистики Уинти [3], характеризующие число пар $(y_l^q, x_{(k)})$, $q=0,1$, которые удовлетворяют неравенству $y_l^q < x_{(k)}$:

$$U^q=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}H_{kl}^q,\ q=0,1, \qquad (16)$$

где

$$H_{kl}^q=\begin{cases}1 \text{ при } y_l^q < x_k, \\ 0 \text{ при } y_l^q \ge x_k. \end{cases} \qquad (17)$$

Поскольку

$$\sum_{i=1}^{n}r_i=U^0+U^1+\frac{n(n-1)}{2},$$

то решающее правило (15) преобразуется к следующему виду:

$$U^0+U^1\le\tilde{d}, \qquad (18)$$

здесь порог $\tilde{d}=(m+1)n$.

В работе [4] решающее правило (18) обосновано с иных позиций. Там же выполнено его исследование аналитически и методом моделирования. Показано [4], что решающее правило (18) асимптотически эквивалентно (при $m\to\infty$) решающему правилу

$$\left|U^0-\frac{\tilde{d}}{2}\right|\le\left|U^1-\frac{\tilde{d}}{2}\right|, \qquad (19)$$

в котором выносится решение в пользу распределения H_0, если выполняется неравенство в (19), а в противном случае принимается решение в пользу H_1.

Достоинством решающего правила (19) является то, что оно допускает простое обобщение на случай распознавания трех и более последовательностей:

$$i=\underline{\min_{j=1,M}}\cdot\frac{1}{m_j}\left|U^j-\frac{\tilde{d}^i}{2}\right|, \qquad (20)$$

где m_j – объем обучающей выборки $(y_1^i,...,y_m^i)$, $i=\overline{1,M}$; статистика $\tilde{d}^i=(m+1)n$.

Пусть теперь распределение последовательностей подчиняется гауссовскому закону распределения. Использование приближенных меток [2]

$$a(i)\approx\Phi^{-1}(\frac{i}{N+1}) \qquad (21)$$

в решающем правиле (6) конкретизирует его следующим образом: выносится решение в пользу гипотезы H_0, если

$$\sum_{i=1}^{n}\Phi^{-1}(\frac{R_i}{N+1})\le 0. \qquad (22)$$

В противном случае выносится решение в пользу гипотезы H_1.

Ранги порядковых статистик R_i могут быть рассчитаны согласно соотношению

$$R_i=R_i^{X0}+R_i^{X1}-i. \qquad (23)$$

4. Локально-оптимальное ранговое решающее правило распознавания последовательностей, различающихся параметром масштаба

В данном случае предполагается, что элементы выборки $(y_1^0,...,y^0)$ взяты из распределения с плотностью вероятности $f(x)$, а элементы выборки $(y_1^1,...,y^1)$ – из распределения с плотностью вероятности $e^{-\Theta}f(x\cdot e^{-\Theta})$, где параметр $\Theta\in R_+$.

Задача распознавания последовательностей, различающихся параметром масштаба, может быть сведена к задаче распознавания последовательностей, различающихся сдвигом распределений. Для этого выполним над элементами выборок преобразование

$$\eta=\ln|\xi|. \qquad (24)$$

Исходя из преобразования (24) можно показать, что ранговое локально-оптимальное решающее правило распознавания гауссовских последовательностей с нулевыми математическими ожиданиями имеет следующий вид: решение в пользу гипотезы H_0 выносится, если

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\Phi^{-1}\left(\frac{\breve{R}_i}{2m+n+1}+\frac{1}{2}\right)\right]^2 \le n\,, \qquad (25)$$

где $\breve{R}_{(1)},...,\breve{R}_{(n)}$ – ранги $\breve{X}_{(1)},...,\breve{X}_{(n)}$ в объединенной выборке $\breve{X}_1,...,\breve{X}_n$, $\breve{Y}_1^0,...,\breve{Y}_{m_0}^0$, $\breve{Y}_1^1,...,\breve{Y}_{m_1}^1$ и $\breve{X}_k=|X_k|$, $\breve{Y}_k^0=\left|\breve{Y}_k^0\right|$, $\breve{Y}_k^1=\left|\breve{Y}_k^1\right|$.

В противном случае выносится решение в пользу гипотезы H_1.

Решающее правило (25) позволяет распознавать последовательности, различающиеся масштабом. Однако оно строится на основе ранговых статистик от модулей отсчетов последовательностей и с формальной точки зрения не является ранговым в смысле сформулированного выше определения. Построим решающее правило распознавания, в котором решение выносится непосредственно по ранговым статистикам последовательностей.

Теорема 2. *Для сформулированной постановки задачи согласно локально оптимальному ранговому решающему правилу распознавания следует принять решение в пользу гипотезы H_0, если*

$$\sum_{i=1}^{n}A(r_i)\le 0\,, \qquad (26)$$

где функции

$$A(r_i)=-1-M\left[\frac{V_{(r_i)}f'(V_{(r_i)})}{f(V_{(r_i)})}\right], \qquad (27)$$

и решение в пользу альтернативной гипотезы H_1 в противном случае.

Доказательство. Рассмотрим распределение вектора $\vec{R}$ для случая обеих гипотез. Можно показать, что

$$P(\vec{R}=\vec{r}/H_0)=\frac{1}{C_{n+m}^{n}C_{n+2m}^{n+m}}M\left[\prod_{i=1}^{m}\frac{e^{-\Theta}f(V^1{}_{(r_i)}e^{-\Theta})}{f(V^1{}_{(r_i)})}\right], \qquad (28)$$

$$P(\vec{R}=\vec{r}/H_1)=\frac{1}{C_{n+m}^{n}C_{n+2m}^{m}}M\left[\prod_{i=1}^{n+m}\frac{e^{-\Theta}f(V^{X1}{}_{(r_i)}e^{-\Theta})}{f(V^{X1}{}_{(r_i)})}\right]. \qquad (29)$$

Подставим выражения (28) и (29) в (11). Получим

$$P_{\text{ош.ср.}}(\Delta)=\frac{1}{2}-$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{r\in P_0}\frac{1}{C_{n+m}^{n}C_{n+2m}^{m}}\left[M\left[\prod_{i=1}^{m}\frac{e^{-\Theta}f(V^1{}_{(r_i)}e^{-\Theta})}{f(V^1{}_{(r_i)})}\right]-\right.$$
$$\left.-M\left[\prod_{i=1}^{n+m}\frac{e^{-\Theta}f(V^{X1}{}_{(r_i)}e^{-\Theta})}{f^{X1}(V_{(r_i)})}\right]\right]. \qquad (30)$$

Продифференцируем выражение (30) по переменной Θ и выполним подстановку $\Theta=0$. Получим

$$P'_{\text{ош.ср.}}(0)=\frac{1}{2}\frac{1}{C_{n+2m}^{n}C_{n+m}^{m}}\sum_{r\in P_0}\sum_{i=1}^{n}A(r_i)\,, \qquad (31)$$

где метки $A(r_i)$ определяются выражением (27).

Очевидно, что минимальное значение выражения (31) достигается для решающего правила (26).

Для гауссовских сигналов $A(r_i)=-1+M[V_{(r_i)}{}^2]$, а приближенные метки

$$\widetilde{A}(r_i)=-1+\left[\Phi^{-1}\left(\frac{r_i}{N+1}\right)\right]^2. \qquad (32)$$

Использование приближенных меток (32) в (26) приводит к решающему правилу распознавания гауссовских последовательностей следующего вида:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\Phi^{-1}\left(\frac{r_i}{N+1}\right)\right]^2\le n\,. \qquad (33)$$

5. Ранговое решающее правило распознавания последовательностей, различающихся параметрами сдвига и масштаба

В данном случае средняя вероятность ошибки распознавания последовательностей является функцией двух параметров $P_{\text{ош.ср.}}(\Delta,\Theta)$.

Аналогично (12) и (30) можно показать, что

$$P_{\text{ош.ср.}}(\Theta)=\frac{1}{2}-$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{r\in P_0}\frac{1}{C_{n+2m}^{n}C_{n+m}^{n}}\left[M\left[\prod_{i=1}^{m}\frac{e^{-\Theta}f(V^1{}_{(r_i)}e^{-\Theta}-\Delta)}{f(V^1{}_{(r_i)})}\right]-\right.$$
$$\left.-M\left[\prod_{i=1}^{n+m}\frac{e^{-\Theta}f(V^{X1}{}_{(r_i)}e^{-\Theta}-\Delta)}{f(V^{X1}{}_{(r_i)})}\right]\right]. \qquad (34)$$

Для последовательностей, одновременно различающихся параметрами сдвига и масштаба, построение локально-оптимального рангового решающего правила возможно для заданного направлением в пространстве параметров сдвига и масштаба $(\Delta,\Theta)\in R^2$. Направление в пространстве параметров может быть единичным вектором $\vec{u}=\cos(\alpha)i+\sin(\alpha)j$ с направляющим углом α.

Производная по направлению $\vec{u}$ определяется как

$$P_{\text{ош.ср.}}{}'(\Delta,\Theta)=\cos(\alpha)\frac{\partial P_{\text{ош.ср.}}}{\partial\Delta}+\sin(\alpha)\frac{\partial P_{\text{ош.ср.}}}{\partial\Theta}\,. \qquad (35)$$

Подставив (34) в (35) и выполнив преобразования, аналогичные описанным в разд. 1 и 4 , придем к ранговому решающему правилу с областью принятия гипотезы H_0, которая определяется выражением

$$\cos\alpha\cdot\sum_{i=1}^{n}a(r_i)+\sin\alpha\cdot\sum_{i=1}^{n}A(r_i)\le 0\,. \qquad (36)$$

Косинус и синус направляющего угла оценим по ранговым статистикам объединенной выборки (1), в которой все элементы принадлежат к одному из двух распределений:

$$\cos\alpha = M^{-1}\cdot \max(|v_0|,|v_1|)\cdot \operatorname{sign}(v_0 - v_1), \quad (37)$$

$$\sin\alpha = M^{-1}\cdot \max(|V_0|,|V_1|)\cdot \operatorname{sign}(V_0 - V_1), \quad (38)$$

$$M = \sqrt{[\max(|v_0|,|v_1|)]^2 + [\max(|V_0|,|V_1|)]^2},$$

где
$$v_0 = \sum_{i=0}^{m} a(r_i^0);\ v_1 = \sum_{i=0}^{m} a(r_i^1); \quad (39)$$

$$V_0 = \sum_{i=0}^{m} A(r_i^0);\ V_1 = \sum_{i=0}^{m} A(r_i^1), \quad (40)$$

r_i^s – ранги отсчетов $(y_1^s,\dots,y_m^s)$ в выборке (1).

Подставляя (37) и (38) в (36), получаем следующее решающее правило распознавания последовательностей, различающихся параметрами сдвига и масштаба. Если

$$\max(|v_0|,|v_1|)\cdot \operatorname{sign}(v_0 - v_1)\cdot \sum_{i=1}^{n} a(r_i) +$$
$$+ \max(|V_0|,|V_1|)\cdot \operatorname{sign}(V_0 - V_1)\cdot \sum_{i=1}^{n} A(r_i) \le 0, \quad (41)$$

то выносится решение в пользу гипотезы H_0, если же неравенство (41) не выполняется, то решение принимается в пользу гипотезы H_1.

В случае гауссовских сигналов использование приближенных меток (21) и (32) в (41) приводит к области принятия гипотезы H_0, которая задается выражением

$$\max(|v_0|,|v_1|)\cdot \operatorname{sign}(v_0 - v_1)\cdot \sum_{i=1}^{n} \Phi^{-1}\left(\frac{r_i}{N+1}\right) +$$
$$+ \max(|V_0|,|V_1|)\cdot \operatorname{sign}(V_0 - V_1)\cdot \left\{\sum_{i=1}^{n} \left[\Phi^{-1}\left(\frac{r_i}{N+1}\right)\right]^2 - n\right\} \le 0, \quad (42)$$

где

$$v_s = \sum_{i=1}^{m} \Phi^{-1}\left(\frac{r_i^s}{N+1}\right),\ s = 0,1;$$

$$V_s = \sum_{i=1}^{m} \left\{\left[\Phi^{-1}\left(\frac{r_i^s}{N+1}\right)\right]^2 - m\right\},\ s = 0,1.$$

Изложим еще один подход к синтезу ранговых решающих правил, основанный на том, что отношение $r/(N+1)$ может рассматриваться как значение эмпирической функции распределения выборки для аргумента $x_{(r)}$. Поэтому для выборок с непрерывными распределениями при $N \to \infty$ статистики

$$\hat{x}_{(r)} = F^{-1}(r/(N+1)) \quad (43)$$

сходятся по вероятности к значениям порядковых статистик $\hat{x}_{(r)}$ для всех r таких, что $0 < \frac{r}{N} < \infty$.

Использование статистик (43) в параметрическом решающем правиле вместо отсчетов самих выборок позволяет строить ранговые алгоритмы распознавания последовательностей.

Известно [5], что в асимптотически-оптимальном решающем правиле распознавания двух гауссовских случайных последовательностей, заданных обучающими выборками, область принятия гипотезы H_0 задается выражением

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \hat{\mu}_0)^2}{\hat{D}_0} + n\cdot \ln \hat{D}_0 \le \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \hat{\mu}_1)^2}{\hat{D}_1} + n\cdot \ln \hat{D}_1, \quad (44)$$

где оценки математических ожиданий и дисперсий последовательностей для разных гипотез находятся по обучающим выборкам

$$\hat{\mu}_0 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i^0;\ \hat{\mu}_1 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} y_i^1;$$

$$\hat{D}_0 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} (y_i^0 - \mu_0)^2;\ \hat{D}_1 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} (y_i^1 - \mu_1)^2.$$

Использование статистик (43) в решающем правиле вида (44) вместо отсчетов выборок приводит к решающему правилу, в котором область принятия гипотезы H_0 задается выражением

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(\hat{x}_{(i)} - v^0)^2}{W^0} + n\cdot \ln W_0 \le \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_{(i)} - v^1)^2}{W^1} + n\cdot \ln W_1, \quad (45)$$

где

$$\hat{x}_{(i)} = \Phi^{-1}\left(\frac{r_i}{N+1}\right);\ v^s = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \Phi^{-1}\left(\frac{r_i^s}{N+1}\right),\ s = 0,1;$$

$$W^s = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \left[\Phi^{-1}\left(\frac{r_i^s}{N+1}\right) - v^s\right]^2,\ s = 0,1.$$

6. Исследование ранговых решающих правил распознавания случайных последовательностей

Достоинство ранговых алгоритмов проявляется при отклонении законов распределения от модельных предположений.

Синтезированные решающие правила исследованы методом статистического моделирования применительно к распознаванию двух выборок с нормальным законом распределения, которые различаются математическими ожиданиями и дисперсиями. При моделировании использовалось по 1000 реализаций каждого сигнала, из которых половина применялась в качестве обучающих, другая половина – в качестве контрольных реализаций. Каждая из реализаций состояла из 50 отсчетов $(n = m = 50)$.

Для проверки свойства робастности ранговых алгоритмов проведено их исследование методом моделирования с использованием ε-загрязненных выборок. Реализации выборок $(x_1,\dots,x_n)$ генерировались согласно формуле

$$x_k = (1-\eta_k)\cdot x_k^i + \eta_k \cdot z_k,\ k = 1,2,...,n,$$

где η_k, $k = 1,2,...$ – последовательность независимых величин, принимающих значение 1 с вероятностью засорения ε и 0 – с вероятностью $1-\varepsilon$; x_k^i, $k = 1,2,...,n$, $i = 0,1$ - элементы выборки, предъявляемой на распознавание; z_k, $k = 1,2,...,n$ – элементы засоряющей выборки.

Элементы засоряющей выборки генерировались как последовательность независимых случайных величин с нормальным законом распределения $N(\mu,\sigma^2)$. При этом загрязнению подвергались как обучающие, так и контрольные выборки сигналов.

Результаты исследования качества распознавания загрязненных выборок синтезированными решающими правилами представлены в табл. 1-3. Здесь в графах приведены оценки вероятностей ошибок обоих родов P_{01}, P_{10} и оценка средней вероятности ошибки распознавания $P_{\text{ош.ср.}}$.

Анализ данных, представленных в табл. 1-3, показывает, что в отсутствие загрязнения ($\varepsilon = 0$) ранговые решающие правила распознавания обеспечивают качество распознавания гауссовских последовательностей, близкое к качеству параметрического правила (44). Ранговые решающие правила распознавания обладают большей стабильностью к воздействию ε-загрязнения и в рассмотренных выше случаях обеспечивают меньшую вероятность ошибки распознавания, чем параметрическое правило (44).

Таблица 1

Оценки вероятностей ошибок распознавания гауссовских последовательностей для случая $\mu_0 = 0; \mu_1 = 0{,}5; \sigma_0 = 1; \sigma_1 = 1$

Параметры засорения	Решающее правило	P_{01}	P_{10}	$P_{\text{ош.ср.}}$
$\varepsilon = 0$	(44)	0,108	0,112	0,110
	(22)	0,066	0,096	0,086
	(42)	0,156	0,146	0,150
	(45)	0,100	0,106	0,103
$\varepsilon = 0{,}05$ $\mu = 0$ $\sigma = 4$	(44)	0,316	0,300	0,308
	(22)	0,092	0,088	0,090
	(42)	0,184	0,216	0,200
	(45)	0,134	0,160	0,147
$\varepsilon = 0{,}05$ $\mu = 0{,}25$ $\sigma = 4$	(44)	0,308	0.300	0,304
	(22)	0,114	0,108	0,111
	(42)	0,156	0,208	0,182
	(45)	0,140	0,132	0,136

Во многих ситуациях ранговые решающие правила распознавания оказываются более устойчивыми по сравнению с параметрическими правилами к отклонениям от закона распределения, в рамках которого синтезированы эти правила. Сравним качество синтезированных выше ранговых решающих правил распознавания и адаптивного байесовского решающего правила (44) для распознавания негауссовских сигналов, имеющих плотности вероятности следующего вида:

Таблица 2

Оценки вероятностей ошибок распознавания гауссовских последовательностей для случая

Параметры засорения	Решающее правило	P_{01}	P_{10}	$P_{\text{ош.ср.}}$
$\varepsilon = 0$	(44)	0,014	0,028	0,021
	(22)	0,066	0,022	0,044
	(25)	0,046	0,142	0,093
	(33)	0,096	0,136	0,116
	(42)	0,028	0,018	0,023
	(45)	0,022	0,022	0,022
$\varepsilon = 0{,}05$ $\mu = 0$ $\sigma = 2$	(44)	0,054	0,126	0,090
	(22)	0,078	0,066	0,072
	(25)	0,076	0,260	0,168
	(33)	0,120	0,178	0,149
	(42)	0,046	0,046	0,046
	(45)	0,030	0,056	0,043
$\varepsilon = 0{,}05$ $\mu = 0$ $\sigma = 4$	(44)	0,208	0,358	0,283
	(22)	0,088	0,062	0,075
	(25)	0,094	0,322	0,208
	(33)	0,106	0,190	0,148
	(42)	0,050	0,078	0,064
	(45)	0,046	0,078	0,062
$\varepsilon = 0{,}05$ $\mu = 0{,}25$ $\sigma = 2$	(44)	0,058	0,132	0,095
	(22)	0,090	0,054	0,072
	(25)	0,254	0,070	0,162
	(33)	0,160	0,096	0,128
	(42)	0,054	0,050	0,052
	(45)	0,022	0,062	0,042
$\varepsilon = 0$ $\mu = 0{,}25$ $\sigma = 4$	(44)	0,180	0,344	0,262
	(22)	0,074	0,054	0,064
	(25)	0,082	0,330	0,206
	(33)	0,104	0,222	0,163
	(42)	0,070	0,078	0,074
	(45)	0,042	0,088	0,065

$$f(x) = \frac{\lambda}{2}\cdot e^{-\lambda|x-\mu_i|},\ x \in (-\infty,\infty); \qquad (46)$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(1-\varepsilon)}{b_i - a_i} + \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\dfrac{x^2}{2}\right\}, & x \in [a_i, b_i], \\ \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\dfrac{x^2}{2}\right\}, & x \notin [a_i, b_i] \end{cases}, \qquad (47)$$

$$f(x) = \frac{1}{xs_i\sqrt{2\pi}}\cdot\exp\left\{-\frac{(\ln x - \alpha_i)}{2\cdot s_i^2}\right\}, x \in (0,\infty). \qquad (48)$$

Оценим вероятности ошибок распознавания последовательностей с различными законами распределения рассмотренными решающими правилами, сохранив объемы обучающих и контрольных выборок теми же,

Таблица 3

Оценки вероятностей ошибок распознавания гауссовских последовательностей для случая

$\mu_0 = 0; \mu_1 = 0; \sigma_0 = 1; \sigma_1 = 0{,}7$

Параметры засорения	Решающее правило	P_{01}	P_{10}	$P_{ош.ср.}$
$\varepsilon = 0$	(44)	0,066	0,154	0,110
	(25)	0,060	0,130	0,095
	(33)	0,078	0,112	0,095
	(42)	0,136	0,106	0,121
	(45)	0,086	0,160	0,123
$\varepsilon = 0{,}05$; $\mu = 0$; $\sigma = 2$	(44)	0,244	0,380	0,312
	(25)	0,076	0,238	0,157
	(33)	0,086	0,190	0,138
	(42)	0,158	0,152	0,155
	(45)	0,146	0,212	0,179
$\varepsilon = 0{,}05$; $\mu = 0$; $\sigma = 4$	(44)	0,354	0,528	0,441
	(25)	0,070	0,320	0,195
	(33)	0,096	0,238	0,167
	(42)	0,200	0,232	0,216
	(45)	0,194	0,292	0,243

что и в описанном выше эксперименте с загрязненными выборками. Результаты моделирования отобразим в табл. 4. Из анализа данных табл. 4 вытекает, что в рассмотренных случаях ранговые решающие правила (22), (25), (33), (42) и (45) обеспечивают лучшее качество распознавания негауссовских последовательностей, чем параметрическое правило (44).

Выводы

Научная новизна работы определяется тем, что в ней синтезированы локально-оптимальные ранговые решающие правила распознавания случайных последовательностей, различающихся параметром сдвига или же параметром масштаба. Предложены ранговые правила распознавания последовательностей, одновременно различающихся параметрами сдвига и масштаба. Характеристики разработанных решающих правил исследованы методом статистического моделирования.

На основе анализа характеристик разработанных решающих правил распознавания сделаны следующие *выводы*:

1. При распознавании последовательностей с нормальным законом синтезированные ранговые решающие правила обеспечивают качество распознавания, близкое к качеству адаптивного байесовского решающего правила.

2. При распознавании случайных последовательностей с нормальным законом распределения ранговые решающие правила распознавания являются более устойчивыми к ε-загрязнению, чем параметрическое правило распознавания.

3. Ранговые решающие правила распознавания обеспечивают большую устойчивость по сравнению с адаптивными байесовскими правилами к отклонениям от закона распределения, в рамках которого синтезированы эти правила.

Таблица 4

Оценки вероятностей ошибок распознавания последовательностей с различными законами распределения

Закон распределения	Реш. прав.	$\hat{P}_{01}$	$\hat{P}_{10}$	$\hat{P}_{ош.ср.}$
Лапласа (47); $\mu_0 = 0$; $\mu_1 = 1$; $\lambda = 1$	(44)	0,058	0,064	0,061
	(22)	0,014	0,014	0,014
	(42)	0,012	0,006	0,009
	(45)	0,018	0,020	0,019
Равномерный в смеси с нормальным (47); $a_0 = 0; b_1 = 1$; $a_1 = 0{,}15; b_1 = 1{,}15$; $\varepsilon = 0{,}05$	(44)	0,226	0,204	0,215
	(22)	0,074	0,072	0,073
	(42)	0,152	0,134	0,143
	(45)	0,108	0,078	0,093
Равномерный в смеси с нормальным (47); $a_0 = 0; b_1 = 1$; $a_1 = 0{,}25; b_1 = 0{,}75$; $\varepsilon = 0{,}05$	(44)	0,212	0,462	0,337
	(25)	0,028	0,012	0,020
	(33)	0,004	0,014	0,009
	(42)	0,022	0,014	0,018
	(45)	0,018	0,050	0,034
Логнормальный (48); $\alpha_0 = 0$; $\alpha_1 = 0{,}5$; $s_0 = 1$; $s_1 = 1$	(44)	0,308	0,234	0,271
	(22)	0,086	0,076	0,081
	(25)	0,238	0,070	0,154
	(33)	0,120	0,202	0,161
	(42)	0,096	0,152	0,124
	(45)	0,098	0,098	0,098

Практическая значимость работы определяется тем, что синтезированные ранговые решающие правила могут быть использованы для распознавания объектов различной природы в условиях изменяющейся обстановки наблюдения.

Дальнейшая *перспектива исследований* состоит в применении разработанных ранговых правил распознавания для решения прикладных задач, в частности для задачи идентификации дикторов.

Литература: 1. *Хьюбер Дж. П.* Робастность в статистике. М.: Мир, 1984. 304 с. **2.** *Гаек Я., Шидак З.* Теория ранговых критериев. М.: Наука, 1971, 375 с. **3.** *Хеттманспергер Т.* Статистические выводы, основанные на рангах. М.: Финансы и статистика, 1987. 334 с. **4.** *Омельченко А.В.* Распознавание случайных последовательностей, различающихся сдвигом распределений, на основе ранговых статистик / Радиоэлектроника и информатика. 2006. № 5. С. 85-89. **5.** *Фомин Я.А., Тарловский Г.Р.* Статистическая теория распознавания образов. М.: Радио и связь, 1986. 264 с.

Поступила в редколлегию: 11.11.2005

Рецензент: д-р физ.-мат. наук Прокопов А.В.

Омельченко Анатолий Васильевич, канд. техн. наук, доцент кафедры «Сети связи» ХНУРЭ. Научные интересы: методы обработки сигналов и распознавания образов. Адрес: Украина, 61075, Харьков, ул. 3-го Интернационала, 7, кв. 38.