

МЕТОДЫ РАСЧЕТА НЕСТАЦИОНАРНЫХ НЕГАРМОНИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В НАПРАВЛЯЮЩИХ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

© 2007 г. А. В. Грицунов

Поступила в редакцию 00.00.2004 г.

Рассмотрены методы расчета нестационарных негармонических электромагнитных полей, возбуждаемых электронными потоками в направляющих электродинамических системах (ЭС) сверхвысокочастотных приборов. Они предназначены, в частности, для использования в спектральных моделях первого и второго уровней. Дискретное приближение основано на разложении поля в ряды по нормальным или парциальным видам колебаний ЭС (модам). Непрерывное приближение базируется на декомпозиции поля в ряды по регулярным модам ЭС.

ВВЕДЕНИЕ

Проблема теоретического анализа возбуждения электронными потоками нестационарных немонахроматических электромагнитных полей в направляющих электродинамических системах (ЭС) СВЧ-приборов приобретает все большую актуальность. В числе причин можно упомянуть необходимость обеспечения электромагнитной совместимости радиоэлектронных устройств, создание высокоскоростных цифровых телекоммуникационных систем с оконечными усилителями на лампах бегущей волны (ЛБВ) [1], попытки снижения уровня шумов и побочных колебаний в приборах М-типа и т.д. Особо следует отметить вопросы генерации и усиления широкополосных и сверхширокополосных электромагнитных импульсов, приобретающих в последнее время все большее значение в радиолокации и устройствах передачи информации [2].

Традиционный метод моделирования негармонических процессов в СВЧ-электронике (так называемый многочастотный подход) не обеспечивает надле-

жащего решения указанной проблемы. Спектр сигнала в таких моделях всегда дискретный, частоты учитываемых гармоник должны быть определены заранее, а увеличение их числа сопряжено с дополнительными затратами вычислительных ресурсов.

В [3] описаны принципы так называемого спектрального подхода к моделированию СВЧ-приборов. Он заключается в трансформации путем обратного преобразования Фурье заданного в частотной области входного ВЧ-сигнала во временную область и использовании его затем как граничного условия (ГУ) нестационарной модели. После моделирования прохождения синтезированной таким образом негармонической электромагнитной волны через ЭС с учетом ее нелинейного взаимодействия с электронным потоком, временная выборка ВЧ-сигнала на выходе прибора, наряду с другими выходными параметрами (например, токами электродов) подвергается спектральному анализу для перевода ее обратно в частотную область. Данный подход позволяет осуществлять численное моделирование возбуждения и усиления немонохроматических электромагнитных полей в ЭС СВЧ-приборов различных типов, при этом не накладывается каких-либо принципиальных ограничений на форму и ширину спектра высокочастотного сигнала.

Со времени написания указанной работы, базовые концепции спектрального подхода подверглись некоторому уточнению и обобщению. Кроме того, появились публикации, подтверждающие актуальность и перспективность предложенного в [3] направления. Поэтому ниже коротко излагается современная точка зрения на основные положения спектрального моделирования, проиллюстрированная примерами их реализации.

Спектральная модель нелинейной системы, состоящей из электронного потока и ЭС, определяется как *нестационарная модель, корректно учитывающая взаимодействие между всеми временными гармониками электромагнитного поля ЭС и электронным потоком в континууме частот, объединенная с*

алгоритмами спектрального синтеза входных сигналов и спектрального анализа выходных параметров.

Для того чтобы перекрыть весь возможный диапазон приложений спектральной методики, выделяются четыре уровня спектральных моделей, отличающиеся методами решения уравнений Максвелла для электромагнитных полей. К нулевому уровню относятся алгоритмы, основанные на интегрировании этих уравнений сеточными методами. Такие модели используют минимум физических приближений, но сопряжены с трудностями при задании ГУ в реальных приборах. Простейшая реализация данной методики описана, например, в [4].

Модели первого уровня основаны на методе Фурье (разделении переменных), т.е. нахождении решения уравнений Максвелла в виде суперпозиции произведений функций координат (видов колебаний ЭС) на функции времени и, возможно, продольной координаты (мгновенные значения видов). Для краткости, вместо терминов “собственный вид колебаний” (eigenmode) или “вид колебаний” (mode) в дальнейшем используется общий термин “мода”, причем первое значение его применимо только к нормальным видам колебаний ЭС, второе – ко всем остальным. В конкретной конструкции прибора моды рассчитываются однократно, а на каждом временном шаге вычисляются лишь их мгновенные значения путем решения уравнения возбуждения. Результаты моделирования выходного спектра магнетрона этим методом приведены, например, в [5].

Модели второго уровня отличаются от предыдущих тем, что мгновенные значения мод рассматриваются как суммы нескольких узкополосных компонент и уравнение возбуждения решается для комплексной огибающей каждой из них. Пример использования такого подхода дан в [3].

Модели третьего уровня основаны на рассмотрении СВЧ-прибора как активного нелинейного четырехполюсника, передаточная характеристика которо-

го определяется исходя из неких упрощенных предположений относительно поведения электронного потока (так называемый аналитический подход) [6].

Под вышеприведенную классификацию не подходят алгоритмы, в которых СВЧ-прибор рассматривается как система с “ограниченной” нелинейностью электронного потока (например, квадратичной). Такие модели являются стационарными, и входной спектр непосредственно преобразуется в спектр выходного сигнала (без перехода во временную область). Алгоритм моделирования базируется на решении кинетического уравнения и уравнений Максвелла в частотной области. Подобной работой является [7]. Несмотря на внешнюю привлекательность, эти модели не столь универсальны, как предложенные в [3], поскольку начальные и граничные условия, определяющие во многих случаях нелинейность прибора, всегда задаются во временной и пространственной областях.

Из определения спектральной модели следует, что основными задачами при реализации спектрального подхода являются нестационарное моделирование прохождения немонаохроматических сигналов через ЭС с учетом их нелинейного взаимодействия с электронным потоком, а также спектральный анализ выходных параметров прибора, определенных на временных выборках ограниченной длины. Возможные способы решения второй из вышеуказанных задач описаны в [8]. В настоящей статье рассматривается методика моделирования возбуждения в ЭС электронными потоками нестационарных негармонических электромагнитных полей, предназначенная для использования в спектральных моделях первого и второго уровней.

1. ИСХОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Основные соглашения и приближения, принятые в данной работе, состоят в следующем. Используется декартова система координат. Под ЭС понимается неограниченная или ограниченная в продольном (z) направлении закрытая односвязная линия передачи с однородными ГУ в каждом поперечном (x,y) ее

сечении. Под продольным понимается направление, коллинеарное оси данной линии, под поперечными – направления, перпендикулярные ей. ЭС может быть регулярной (продольно-однородной или периодической) либо нерегулярной (продольно-неоднородной). Реальным эквивалентом неограниченной ЭС можно считать согласованную с обоих концов во всей рассматриваемой полосе частот ограниченную линию передачи. Под замыканием в кольцо ЭС далее понимается приравнивание значений электромагнитного поля в двух различных ее поперечных сечениях.

Для описания электромагнитного поля в ЭС введем понятия родового (generic) потенциала $\mathcal{A}(t, x, y, z)$, В·с/м и родовой плотности тока $\tilde{\mathcal{J}}(t, x, y, z)$, А/м². Это некие обозначения, фигурирующие в уравнениях, вместо которых должны подставляться конкретные физические величины. Вместо \mathcal{A} подставляются значения $\sqrt{\epsilon_0\mu_0}\Phi$ или \vec{A} ; вместо $\tilde{\mathcal{J}}$ – $\rho/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ или \vec{j} соответственно. Здесь $\Phi(t, x, y, z)$, В и $\vec{A}(t, x, y, z)$, В·с/м – скалярный и векторный потенциалы в калибровке Лоренца $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon_0\mu_0\partial\Phi/\partial t = 0$; $\rho(t, x, y, z)$, Кл/м³ и $\vec{j}(t, x, y, z)$, А/м² – плотность объемного заряда и плотность тока; $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$ Ф/м и $\mu_0 = 1.257 \cdot 10^{-6}$ Г/м – электрическая и магнитная постоянные соответственно. Введение родовых обозначений является компромиссом, позволяющим, с одной стороны, избежать дублирования уравнений для скалярного и векторного потенциалов, с другой – не применять без необходимости релятивистские четырехвекторные величины (см. раздел 4). Родовой потенциал ЭС является решением неоднородного волнового уравнения

$$\epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathcal{A} = \mu_0 \tilde{\mathcal{J}} \quad (1)$$

с однородными ГУ. Напряженность электрического $\vec{E}(t, x, y, z)$ и индукция магнитного $\vec{B}(t, x, y, z)$ полей могут быть получены из него как $\vec{E} = -\partial\vec{A}/\partial t - \vec{\nabla}\Phi$; $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

Методы конечных разностей и конечных элементов во временной области, используемые в спектральных моделях нулевого уровня, наиболее подходят для решения уравнения (1), но требуют большого объема вычислений при расчете реальных приборов со сложной геометрией электродов. Поскольку электронный поток, диэлектрические и поглощающие элементы обычно занимают лишь малую часть внутреннего пространства электровакуумного прибора, эффективным здесь может оказаться метод разделения переменных. Функция \mathcal{A} находится в виде суммы произведений функций координат (мод ЭС) $\mathcal{A}_m(x, y, z)$ на функции времени и, возможно, продольной координаты (мгновенные значения этих мод) $u_m(t)$ или $u_m(t, z)$. Здесь и далее “м” – родовой индекс моды, вместо которого следует подставлять символ “н”, “п” или “р” для нормальных, парциальных и регулярных мод соответственно. Функции \mathcal{A}_m рассчитываются однократно для “пустой”, т.е. заполненной вакуумом ЭС, и запоминаются в пределах областей, занимаемых в последующем электронным потоком, диэлектриком или поглощающим материалом. Функции u_m вычисляются на каждом временном шаге путем решения уравнения возбуждения. В спектральных моделях первого уровня это уравнение записывается непосредственно для мгновенных значений мод, в моделях второго уровня – для комплексных огибающих $U_m(t)$ или $U_m(t, z)$ узкополосных составляющих во временном или временном и “продольном” спектре этих мгновенных значений соответственно.

При расчете функций \mathcal{A}_m предполагается, что пространственное распределение поля в объеме пустой реальной ЭС, исключая скин-слой стенок, такое же, как в системе аналогичной геометрии, но с бесконечно проводящими границами (так называемая идеализированная ЭС). Волновые числа мод реальной и идеализированной ЭС предполагаются одинаковыми. Учет джоулевых токов в скин-слое реальной ЭС, вызывающих экспоненциальное затухание во времени свободных колебаний, осуществляется путем добавления в уравнения возбуждения членов, содержащих коэффициенты затухания. Для каждой моды эти

коэффициенты полагаются не зависящими от частоты, на которой возбуждается данная мода.

Учет наличия диэлектрических и диссипативных элементов в объеме ЭС (например, поддержек спирали и поглощающих вставок в ЛБВ) при спектральном моделировании целесообразно осуществлять не в терминах частотно-зависимой комплексной диэлектрической проницаемости вещества, а с помощью векторов поляризации и тока проводимости [9], добавленных в правую часть уравнения (1). Таким образом, функция $\tilde{\mathcal{J}}$ учитывает наличие электронного потока, элементов связи ЭС с внешними цепями, поляризации и проводимости диэлектрических и поглощающих вставок, но не учитывает джоулевых токов в скин-слое металлических границ реальной ЭС. Это позволяет раскладывать поле реальной ЭС с произвольным заполнением по базису мод, вычисленному для вакуумного заполнения соответствующей идеализированной ЭС.

Так как данное разложение неоднозначно, возможны различные приближения ЭС. Рассмотрим два из них подробно.

2. ДИСКРЕТНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ЭС

Данное приближение основано на декомпозиции родового потенциала ЭС в вектор-столбец нормальных $\vec{\mathcal{A}}_{nq}(x, y, z)$ или парциальных $\vec{\mathcal{A}}_{pq}(x, y, z)$ мод. Тот и другой определяются отдельно для каждого учитываемого типа волны (полосы пропускания) ЭС $q = 0, 1, 2, \dots$ и являются нетривиальными вещественными решениями матричного уравнения Гельмгольца

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{A}}_{mq}(x, y, z) + \mathbf{k}_{mq}^2 \vec{\mathcal{A}}_{mq}(x, y, z) = 0 \quad (2)$$

в объеме ЭС с однородными ГУ. Предположим, что спектр функции $\mathcal{A}(t, x, y, z)$ в области волновых чисел финитен. Тогда длина обоих векторов N и количество учитываемых типов волн ограничены. Здесь \mathbf{k}_{mq}^2 – вещественная матрица квадратов волновых чисел мод размером $N \times N$ (для нормальных мод имеющая диагональную форму и содержащая квадраты собственных волновых чисел).

Размерность функций $\vec{\mathfrak{A}}_{mq}$ равна $V \cdot c/m$. Решение уравнения (1) находится как ряд в гильбертовом функциональном пространстве мод L_2 (для нормальных мод это ряд Фурье) с безразмерными коэффициентами в виде произвольных функций времени:

$$\mathfrak{A}(t, x, y, z) = \sum_q \vec{\mathfrak{A}}_{mq}(x, y, z) \vec{u}_{mq}(t), \quad (3)$$

где $\vec{u}_{mq}(t)$ – вещественный вектор N мгновенных значений мод для q -го типа волны.

Векторы нормальных и парциальных мод по определению связаны между собой соотношениями:

$$\vec{\mathfrak{A}}_{nq}(x, y, z) = \mathbf{F} \vec{\mathfrak{A}}_{pq}(x, y, z); \quad \vec{\mathfrak{A}}_{pq}(x, y, z) = \mathbf{F}^{-1} \vec{\mathfrak{A}}_{nq}(x, y, z), \quad (4)$$

где \mathbf{F} – вещественная матрица формы нормальных мод размером $N \times N$ [10]. Здесь и далее верхний индекс (-1) применительно к матрице означает ее обращение. В отличие от систем с сосредоточенными параметрами, для ЭС матрица формы не определяется конструкцией системы, а задается априори и может быть, вообще говоря, произвольной невырожденной. Однако интерес представляют только матрицы, обеспечивающие локализацию в продольном направлении всех парциальных мод (т.е. достаточно быстрое ослабление поля каждой моды при удалении в обе стороны от ее максимума). Например, для замкнутой в кольцо ЭС и четного N таковой является матрица:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \cos \Delta\varphi_1 & \cos 2\Delta\varphi_1 & \dots & \cos(N-1)\Delta\varphi_1 \\ 1 & \cos \Delta\varphi_2 & \cos 2\Delta\varphi_2 & \dots & \cos(N-1)\Delta\varphi_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -1 & 1 & \dots & (-1)^{N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \sin \Delta\varphi_2 & \sin 2\Delta\varphi_2 & \dots & \sin(N-1)\Delta\varphi_2 \\ 0 & \sin \Delta\varphi_1 & \sin 2\Delta\varphi_1 & \dots & \sin(N-1)\Delta\varphi_1 \end{pmatrix},$$

где $\Delta\varphi_m = 2\pi m/N$ – изменение фазы m -й нормальной моды ($m = 0, 1, \dots, N/2$) между двумя соседними парциальными модами. Расположение нормальных мод в векторе $\vec{\mathcal{A}}_{nq}$ должно быть таким, чтобы продольная зависимость скалярного потенциала или продольной составляющей векторного потенциала каждой моды как можно лучше “повторяла” соответствующую строку матрицы \mathbf{F} . При этом для прямой волны модули волновых чисел мод будут увеличиваться, а для обратной – уменьшаться от концов к середине вектора. В ЭС с иными ГУ по координате z матрица \mathbf{F} легко может быть построена исходя из физических соображений. Очевидно, что (4) являются взаимными линейными преобразованиями функциональных пространств нормальных и парциальных мод.

С физической точки зрения n -ю парциальную моду ($n = 0, 1, \dots, N-1$) колебательной системы с распределенными параметрами можно интерпретировать в виде “облака” поля, колеблющегося как единое целое, т.е. в одинаковой фазе $\varphi_n = n\Delta\varphi_m$ (здесь предполагается, что возбуждена только m -я нормальная мода). Заметим, что $\Delta\varphi_m$ – постоянная величина, независимо от того, регулярна ЭС или нет. Поэтому, в отличие от [11], где уравнение возбуждения периодического волновода записано с использованием дискретно-непрерывного преобразования Фурье по параметру продольного волнового числа β , поля парциальных мод замедляющей системы могут быть пространственно не связаны с ее ячейками. Это имеет место, например, если ЭС не периодична, либо N не равно общему числу ячеек. Вышеуказанная трактовка парциальных мод позволяет применить к ним теорию колебательных систем с сосредоточенными параметрами со многими степенями свободы [10], полагая, что вектор \vec{u}_{nq} содержит N независимых координат для каждого типа волны. Например, подставляя (4) в (3) и (2), получаем соотношения:

$$\vec{u}_{nq}(t) = (\mathbf{F}^{-1})^T \vec{u}_{nq}(t); \quad \vec{u}_{nq}(t) = \mathbf{F}^T \vec{u}_{nq}(t); \quad (5)$$

$$\mathbf{k}_{nq}^2 = \mathbf{F} \mathbf{k}_{nq}^2 \mathbf{F}^{-1}; \quad \mathbf{k}_{nq}^2 = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{k}_{nq}^2 \mathbf{F}, \quad (6)$$

где верхний индекс T здесь и далее означает транспонирование матрицы или вектора-столбца. Нетрудно видеть, что матрицы \mathbf{k}_{nq}^2 и \mathbf{k}_{pq}^2 связаны между собой преобразованиями подобия (\mathbf{F} – преобразующая матрица), соответствующими вышеуказанным линейным преобразованиям функциональных пространств мод. Собственные значения обеих матриц (т.е. квадраты волновых чисел нормальных мод ЭС) при этом, естественно, равны.

Условия ортогональности нормальных и парциальных мод могут быть выведены из уравнений Максвелла с учетом (4). Они имеют вид:

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\Delta Z} dz \int_{S_{\perp}} dx dy \vec{\mathcal{A}}_{mq}(x, y, z) \vec{\mathcal{A}}_{m'q'}^T(x, y, z) = \begin{cases} 0 & \text{для } q' \neq q; \\ \tilde{\mathbf{W}}_{mq} & \text{для } q' = q, \end{cases} \quad (7)$$

где $\tilde{\mathbf{W}}_{mq}$ – вещественная матрица так называемых единичных псевдоэнергий мод размером $N \times N$; ΔZ – длина ЭС; S_{\perp} – ее поперечное сечение.

Название “псевдоэнергия” объясняется тем, что эта величина (с размерностью Дж·с²) определяется для родового потенциала по формуле, аналогичной выражению для энергии электрического поля. Матрица единичных псевдоэнергий нормальных мод имеет диагональную форму, обе матрицы связаны между собой преобразованиями конгруэнтности:

$$\tilde{\mathbf{W}}_{nq} = \mathbf{F} \tilde{\mathbf{W}}_{pq} \mathbf{F}^T; \quad \tilde{\mathbf{W}}_{pq} = \mathbf{F}^{-1} \tilde{\mathbf{W}}_{nq} (\mathbf{F}^{-1})^T. \quad (8)$$

Поскольку все элементы вектора $\vec{\mathcal{A}}_{nq}$ совместно участвуют в линейном преобразовании, имеет значение их относительная величина (так называемая нормировка мод). Возможны, в частности, амплитудная нормировка (когда, например, максимальное значение модуля каждого элемента данного вектора равно 1 В·с/м) и энергетическая (когда нулевой, а для четного N – и $N/2$ -й элементы на диагонали матрицы $\tilde{\mathbf{W}}_{nq}$ равны 1 Дж·с², в то время как остальные ее диагональные элементы равны 0.5 Дж·с²). Хотя энергетическая нормировка при условии ортогональности матрицы формы приводит к более простым уравне-

ниям возбуждения, поскольку матрица \tilde{W}_{pq} в этом случае является диагональной (т.е. парциальные моды ортогональны между собой), далее будет использована амплитудная нормировка, как более наглядная и универсальная.

Несмотря на то, что парциальные моды даже в случае их ортогональности электродинамически связаны между собой в пределах одного типа волны уравнением (2), достоинство их – вышеупомянутая продольная локализация, лучше согласующаяся с физической концепцией “близкодействия”, чем у нормальных мод, энергия которых более или менее равномерно распределена по всей длине ЭС. Поскольку основная часть энергии поля каждой парциальной моды сосредоточена в небольшой части объема ЭС длиной порядка $\Delta Z / N$, можно с незначительной погрешностью игнорировать непосредственное взаимодействие парциальных мод, как между собой, так и с электронным потоком, вдали от мест локализации этих мод. С точки зрения локализации парциальные моды напоминают вейвлеты [12], однако на этом сходство между ними заканчивается. Парциальные моды являются линейными комбинациями собственных функций линейной колебательной системы с распределенными параметрами, в то время как вейвлеты таким свойством не обладают. Кроме того, имеется ряд отличий по формальным признакам (например, парциальные моды могут быть не ортогональны между собой, если не использована энергетическая нормировка либо матрица формы не ортогональна, интегралы от них по области определения в общем случае не равны нулю и т.д.). Ряд (3) для парциальных мод можно рассматривать как некое обобщение ряда Котельникова [13].

Продольная локализация парциальных мод обеспечивает преимущества при разработке спектральных моделей. В частности, для приборов бегущей волны (с согласованной на концах ЭС) спектр нормальных мод является непрерывным, следовательно, ряд (3) к этим модам неприменим. Множество же парциальных мод по-прежнему дискретно. При этом структуры поля N нормальных мод (с целыми m) для каждого q синтезируются выражением (4) точно. Остальные нормальные моды интерполируются с некоторой погрешностью,

уменьшающейся при увеличении N . Дискретный подход может быть эффективно использован для ЭС с границами произвольной конфигурации, если предварительно вычислены собственные функции и собственные числа данной системы, поскольку максимальное расстояние между соседними парциальными модами ограничивается лишь физическими соображениями (верхней границей учитываемого диапазона продольных волновых чисел), но не требованиями точности или/и устойчивости численного метода.

Парциальные моды менее абстрактны для регулярных ЭС в виде цепочек связанных резонаторов, где они существенно связаны с полями отдельных ячеек [11] (если в качестве величины N выбрано общее количество резонаторов ЭС). В качестве примера на рис. 1 изображены y - и z -составляющие векторного потенциала нулевой ($n = 0$) парциальной моды в полосе пропускания LE_0 ($q = 0$) однородной гребенчатой замедляющей системы как функции координат (y, z). Они получены по формулам (4) из вычисленных аналитически по соотношениям работы [14] нормальных 0 -, $\pi/4$ -, $\pi/2$ -, $3\pi/4$ - и π -мод, распределенных гипотетически равномерно с интервалом 1 ГГц в полосе пропускания ЭС от 1 до 5 ГГц (нижняя граница выбрана условно). Исходные данные системы следующие: период 6 мм; толщина ламели 3 мм; глубина щели 15 мм; расстояние между торцами ламелей и противоположным электродом (высота пространства взаимодействия) 7.5 мм. Использована амплитудная нормировка мод ($A_{nq mz} \equiv 1$ В·с/м между торцами ламелей).

Из рисунка видно, что помимо нулевой полости и прилегающей к ней части пространства взаимодействия, несколько соседних щелей также содержат некое электромагнитное поле. Данное явление не может быть объяснено физически, поскольку поле нулевой щели практически не проникает в зазоры между другими ламелями. Поля в соседних щелях являются лишь неотъемлемыми составными частями парциальной моды нулевой полости, осуществляющими вариацию структуры поля в зазорах между ламелями с изменением частоты, когда нормальные моды ЭС синтезируются как суперпозиции парциальных мод с

различными значениями $\Delta\varphi_m$. Пространство взаимодействия на рис. 1 также содержит подобные “добавки”, которые не видны в масштабе рисунка. Тем не менее, они могут быть более существенными для менее “квазистатичных” ЭС, наподобие спиральной или лестничной замедляющей системы. Предельным случаем является продольно-однородная ЭС.

На рис. 2 показаны r - и z -составляющие векторного потенциала нулевой ($n = 0$) парциальной моды для волны типа TM_{01} ($q = 0$) регулярного цилиндрического волновода как функции радиальной r и аксиальной z координат. Радиус волновода 25.4 мм, период продольной дискретизации 6 мм. Видно, в частности, отмеченное выше ослабление поля парциальной моды в обе стороны от ее максимума в продольном направлении. Здесь также использована амплитудная нормировка мод.

Из вышесказанного следует, что разложение поля ЭС в парциальные моды является альтернативой известной бриллюэновской концепции “парциальных волн” в волноводе. Помимо спектрального моделирования, оно может быть полезно для анализа СВЧ-приборов с нерегулярными ЭС, поскольку пространственная структура и электродинамические параметры каждой парциальной моды определяются главным образом свойствами ограниченного участка ЭС вблизи места локализации данной моды.

Дискретное уравнение возбуждения для вектора \vec{u}_{mq} может быть получено путем подстановки (2) и (3) в (1) с учетом (7). Оно имеет вид:

$$\frac{d^2 \vec{u}_{mq}}{dt^2} + 2\delta_{mq}^T \frac{d\vec{u}_{mq}}{dt} + (\omega_{mq}^2)^T \vec{u}_{mq} = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{W}}_{mq}^{-1} \int_{\Delta Z} dz \int_{S_{\perp}} dx dy \vec{\mathcal{A}}_{mq}(x, y, z) \tilde{\mathcal{J}}(t, x, y, z), \quad (9)$$

где $\omega_{mq}^2 = \mathbf{k}_{mq}^2 / \varepsilon_0 \mu_0$ – вещественная матрица квадратов частот мод (для нормальных мод это диагональная матрица квадратов собственных частот); δ_{mq} – аналогичная ей по размеру вещественная матрица коэффициентов затухания мод, вызванного потерями в скин-слое металлических стенок. Матрица δ_{nq}

предполагается диагональной, т.е. связь нормальных мод посредством токов в скин-слое не учитывается.

Подставляя (5) в уравнение (9) с нулевой правой частью, находим, что матрицы коэффициентов затухания связаны преобразованиями подобия:

$$\delta_{nq} = \mathbf{F} \delta_{pq} \mathbf{F}^{-1}; \quad \delta_{pq} = \mathbf{F}^{-1} \delta_{nq} \mathbf{F}. \quad (10)$$

В принятом предположении о структуре поля ЭС матрицы \mathbf{k}_{mq}^2 , ω_{mq}^2 и δ_{mq} являются симметрическими при условии, что матрица формы ортогональна (матрица $\tilde{\mathbf{W}}_{mq}$ симметрическая всегда).

Помимо вышеописанных нормировок мод (амплитудной и энергетической), возможны и другие, среди которых следует упомянуть усеченную гауссову, например

$$\max |\mathfrak{A}_{nqm}(x, y, z)| = \exp(-4\psi m^2 / N^2) \text{ В} \cdot \text{с/м},$$

позволяющую в ряде случаев дополнительно локализовать парциальные моды в продольном направлении. Тем самым уменьшается вышеупомянутая погрешность интерполяции нормальных мод для нецелых m (явление Гиббса). Однако одновременно нарастают ошибки и флуктуации при вычислении правой части уравнения возбуждения парциальных мод (9) за счет увеличения и продольного “растекания” элементов матрицы $\tilde{\mathbf{W}}_{nq}^{-1}$. Выбор оптимального значения параметра нормировки ψ выходит за рамки данной статьи и может быть осуществлен, например, с использованием теории оконного взвешивания функций [15].

Для замкнутых в кольцо регулярных ЭС большинство нормальных мод двукратно вырождены, поэтому их целесообразно рассматривать как комплексные. Матрица формы при этом имеет вид:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \exp(-i\Delta\varphi_1) & \exp(-2i\Delta\varphi_1) & \dots & \exp[-(N-1)i\Delta\varphi_1] \\ 1 & \exp(-i\Delta\varphi_2) & \exp(-2i\Delta\varphi_2) & \dots & \exp[-(N-1)i\Delta\varphi_2] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \exp(-i\Delta\varphi_{N-1}) & \exp(-2i\Delta\varphi_{N-1}) & \dots & \exp[-(N-1)i\Delta\varphi_{N-1}] \end{pmatrix}.$$

Нормальные моды в первой половине вектора $\vec{\mathfrak{A}}_{nq}$ располагаются в порядке возрастания (для прямой волны) или убывания (для обратной) модулей их волновых чисел, а во второй половине – таким образом, что $\mathfrak{A}_{nq(N-m)} = \mathfrak{A}_{nqm}^*$ [$m = 1, 2, \dots, N/2$, если N четное, $m = 1, 2, \dots, (N-1)/2$, если N нечетное]. Здесь и далее звездочка означает комплексное сопряжение. Из (3) следует, что вектор \vec{u}_{nq} теперь также комплексный и $u_{nq(N-m)} = u_{nqm}^*$.

Выражения (4) и (5) становятся прямым и обратным дискретными преобразованиями Фурье:

$$\mathfrak{A}_{nqm}(x, y, z) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathfrak{A}_{nqn}(x, y, z) \exp\left(-\frac{2\pi imn}{N}\right);$$

$$\mathfrak{A}_{nqn}(x, y, z) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \mathfrak{A}_{nqm}(x, y, z) \exp\left(\frac{2\pi imn}{N}\right);$$

$$u_{nqm}(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u_{nqn}(t) \exp\left(\frac{2\pi imn}{N}\right); \quad u_{nqn}(t) = \sum_{m=0}^{N-1} u_{nqm}(t) \exp\left(-\frac{2\pi imn}{N}\right).$$

Нетрудно видеть, что векторы парциальных мод и их мгновенных значений остаются вещественными. Матрицы \mathbf{k}_{mq}^2 , $\mathbf{\omega}_{mq}^2$, $\mathbf{\delta}_{mq}$ и $\tilde{\mathbf{W}}_{mq}$ также остаются вещественными и симметрическими. Кроме того, все элементы на главной и всех параллельных ей диагоналях любой из этих матриц для “м”=“п” теперь равны между собой. Переиндексируем элементы указанных матриц согласно следующим шаблонам. Для нормальных мод:

$$\mathbf{k}_{nq}^2 = \begin{pmatrix} k_{nq0}^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & k_{nq1}^2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{nq2}^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_{nq(N-2)}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & k_{nq(N-1)}^2 \end{pmatrix};$$

для парциальных мод:

$$\mathbf{k}_{nq}^2 = \begin{pmatrix} k_{nq0}^2 & k_{nq1}^2 & k_{nq2}^2 & \dots & k_{nq(N-2)}^2 & k_{nq(N-1)}^2 \\ k_{nq(N-1)}^2 & k_{nq0}^2 & k_{nq1}^2 & \dots & k_{nq(N-3)}^2 & k_{nq(N-2)}^2 \\ k_{nq(N-2)}^2 & k_{nq(N-1)}^2 & k_{nq0}^2 & \dots & k_{nq(N-4)}^2 & k_{nq(N-3)}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{nq2}^2 & k_{nq3}^2 & k_{nq4}^2 & \dots & k_{nq0}^2 & k_{nq1}^2 \\ k_{nq1}^2 & k_{nq2}^2 & k_{nq3}^2 & \dots & k_{nq(N-1)}^2 & k_{nq0}^2 \end{pmatrix}.$$

После этого соотношения (6), (8) и (10) также можно записать в виде дискретных преобразований Фурье:

$$\begin{aligned} k_{nqm}^2 &= \sum_{n=0}^{N-1} k_{nqn}^2 \exp\left(\frac{2\pi i m n}{N}\right); & k_{nqn}^2 &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} k_{nqm}^2 \exp\left(-\frac{2\pi i m n}{N}\right); \\ \tilde{W}_{nqm} &= N \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{W}_{nqn} \exp\left(-\frac{2\pi i m n}{N}\right); & \tilde{W}_{nqn} &= \frac{1}{N^2} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{W}_{nqm} \exp\left(\frac{2\pi i m n}{N}\right); \\ \delta_{nqm} &= \sum_{n=0}^{N-1} \delta_{nqn} \exp\left(\frac{2\pi i m n}{N}\right); & \delta_{nqn} &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \delta_{nqm} \exp\left(-\frac{2\pi i m n}{N}\right). \end{aligned}$$

Здесь учтено, что для комплексной матрицы \mathbf{F} матрицы единичных псевдо-энергий нормальных и парциальных мод являются соединенными:

$$\tilde{\mathbf{W}}_{nq} = \mathbf{F} \tilde{\mathbf{W}}_{nq} \mathbf{F}^*; \quad \tilde{\mathbf{W}}_{nq} = \mathbf{F}^{-1} \tilde{\mathbf{W}}_{nq} \mathbf{F}^{-1*},$$

а условие ортогональности нормальных мод (7) записывается следующим образом:

$$\frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\Delta Z} dz \int_{S_{\perp}} dx dy \mathfrak{A}_{nqm}(x, y, z) \mathfrak{A}_{nq'm'}^*(x, y, z) = \begin{cases} 0 & \text{для } q' \neq q \text{ или } m' \neq m; \\ \tilde{W}_{nqm} & \text{для } q' = q \text{ и } m' = m. \end{cases} \quad (11)$$

В правой части уравнения (9) вместо вектора $\vec{\mathfrak{A}}_{nq}$ должно использоваться его комплексно-сопряженное значение.

В спектральных моделях второго уровня вектор мгновенных значений нормальных или парциальных мод записывается, например, как

$$\vec{u}_{mq}(t) = \text{Re} \left\{ \vec{U}_{mq}(t) \exp(i\omega_{qb}t) \right\}, \quad (12)$$

а родовая плотность тока – как

$$\vec{\mathfrak{J}}(t, x, y, z) = \text{Re} \left\{ \hat{\mathfrak{J}}_q(t, x, y, z) \exp(i\omega_{qb}t) \right\}, \quad (13)$$

где ω_{qb} – базовая частота для q -го типа волны; $\vec{U}_{mq}(t)$ – вектор комплексных огибающих временных зависимостей мод на частоте ω_{qb} ; $\hat{\mathfrak{J}}_q(t, x, y, z)$ – комплексная огибающая родовой плотности тока на той же частоте.

Подставляя (12) и (13) в (3) и (9), получаем выражение для родového потенциала:

$$\mathfrak{A}(t, x, y, z) = \text{Re} \left\{ \sum_q \vec{\mathfrak{A}}_{mq}(x, y, z) \vec{U}_{mq}(t) \exp(i\omega_{qb}t) \right\}$$

и уравнение возбуждения для вектора \vec{U}_{mq} :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{U}_{mq}}{dt^2} + 2(i\omega_{qb} \mathbf{I} + \boldsymbol{\delta}_{mq}) \frac{d \vec{U}_{mq}}{dt} + 2\omega_{qb} (\boldsymbol{\Omega}_{mq} + i\boldsymbol{\delta}_{mq}) \vec{U}_{mq} = \\ = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{W}}_{mq}^{-1} \int_{\Delta Z} dz \int_{S_{\perp}} dx dy \vec{\mathfrak{A}}_{mq}^*(x, y, z) \hat{\mathfrak{J}}_q(t, x, y, z), \end{aligned} \quad (14)$$

где $\boldsymbol{\Omega}_{mq} = (\omega_{mq}^2 - \omega_{qb}^2 \mathbf{I}) / 2\omega_{qb}$, \mathbf{I} – единичная матрица размером $N \times N$. В ограниченной в продольном направлении ЭС базовую частоту для каждого типа волны целесообразно выбирать равной собственной частоте одной из нормальных

мод ω_{nqm} . В этом случае соответствующий диагональный элемент матрицы Ω_{nq} равен нулю.

Если вектор \vec{u}_{mq} узкополосный (т.е. $|\Omega_{\max}| \ll \omega_{qb}$, где Ω_{\max} – максимальная частота в спектре вектора \vec{U}_{mq}), уравнение (14) можно приближенно переписать в упрощенном виде:

$$\frac{d\vec{U}_{mq}}{dt} + \delta_{mq} \vec{U}_{mq} - i\Omega_{mq} \vec{U}_{mq} = -\frac{i}{4\omega_{qb}} \tilde{\mathbf{W}}_{mq}^{-1} \int_{\Delta Z} dz \int_{S_{\perp}} dx dy \vec{\mathfrak{A}}_{mq}^*(x, y, z) \hat{\mathfrak{J}}_q(t, x, y, z).$$

Алгоритмы фильтрации комплексной огибающей родовой плотности тока с помощью детерминированных параметрических моделей, позволяющие обеспечить узкополосность функции \vec{u}_{mq} , описаны в [16].

Ввиду широкополосности дискретного приближения ЭС, использование метода комплексных амплитуд здесь не дает существенных преимуществ. Поэтому, в соответствии с [3], дискретный подход целесообразно применять в спектральных моделях первого уровня.

3. НЕПРЕРЫВНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ЭС

Несмотря на преимущества дискретного подхода, при малом числе парциальных мод точность интерполяции ими электромагнитного поля может быть недостаточной, а увеличение N сопряжено с дополнительными затратами вычислительных ресурсов. Поэтому для регулярных ЭС часто более эффективным оказывается непрерывное приближение, основанное на разложении родového потенциала в моды, являющиеся непрерывными функциями как пространственных координат, так и постоянной распространения β . Это так называемые регулярные моды $\mathfrak{A}_{pq}(x, y, z, \beta)$, определяемые как комплексные огибающие нормальных мод в продольном направлении:

$$\mathfrak{A}_{nqm}(x, y, z) = \mathfrak{A}_{pq}(x, y, z, \beta_m) \exp(-i\beta_m z); \quad \mathfrak{A}_{pq}(x, y, z, \beta_m) = \mathfrak{A}_{nqm}(x, y, z) \exp(i\beta_m z).$$

Здесь $\beta_m = 2\pi m / ND$ – постоянная распространения (продольное волновое число) m -й нормальной моды ($m = -N/2+1 \dots N/2$). Для периодической ЭС D – ее период; для продольно-однородной системы это некий интервал, ограничивающий сверху диапазон учитываемых продольных волновых чисел. В первом случае регулярные моды являются периодическими функциями продольной координаты с периодом D , во втором случае эти моды однородны в продольном направлении (т.е. не зависят от z). Значение N теперь определяет лишь точность интерполяции зависимости регулярных мод от β .

Благодаря своей непрерывности, регулярные моды аппроксимируют поле ЭС в ограниченной полосе частот с большей точностью, чем парциальные. Однако вследствие зависимости функций \mathfrak{A}_{pq} от постоянной распространения, родовой потенциал может быть найден только путем разложения регулярных мод в ряд Тейлора по β :

$$\mathfrak{A}(t, x, y, z) = \sum_q \left[\mathfrak{A}_{pq0}(x, y, z) u_{pq}(t, z) + \frac{i}{1!} \frac{\partial \mathfrak{A}_{pq0}}{\partial \beta} \frac{\partial u_{pq}}{\partial z} - \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \mathfrak{A}_{pq0}}{\partial \beta^2} \frac{\partial^2 u_{pq}}{\partial z^2} - \frac{i}{3!} \frac{\partial^3 \mathfrak{A}_{pq0}}{\partial \beta^3} \frac{\partial^3 u_{pq}}{\partial z^3} + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 \mathfrak{A}_{pq0}}{\partial \beta^4} \frac{\partial^4 u_{pq}}{\partial z^4} + \dots \right], \quad (15)$$

где $u_{pq}(t, z)$ – временная и продольная зависимость мгновенного значения регулярной моды для q -го типа волны. Индекс 0 означает, что величина вычисляется при $\beta = 0$.

Непрерывное уравнение возбуждения для функции u_{pq} может быть получено из уравнения (9) путем разложения мгновенных значений парциальных мод и родовой плотности тока в ряды Тейлора по продольной координате. Оно имеет вид:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 u_{pq}}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\delta_{nq0} u_{pq} - \frac{1}{2!} \frac{d^2 \delta_{nq0}}{d\beta^2} \frac{\partial^2 u_{pq}}{\partial z^2} + \frac{1}{4!} \frac{d^4 \delta_{nq0}}{d\beta^4} \frac{\partial^4 u_{pq}}{\partial z^4} - \dots \right) + \omega_{nq0}^2 u_{pq} - \\
& - \frac{1}{2!} \frac{d^2 (\omega_{nq0}^2)}{d\beta^2} \frac{\partial^2 u_{pq}}{\partial z^2} + \frac{1}{4!} \frac{d^4 (\omega_{nq0}^2)}{d\beta^4} \frac{\partial^4 u_{pq}}{\partial z^4} - \dots = \\
& = \frac{1}{2D} \int_{z-D/2}^{z+D/2} d\zeta \int_{S_\perp} dx dy \left[\frac{\mathfrak{A}_{pq0}^*(x, y, \zeta)}{\tilde{W}_{pq0}} \tilde{\mathfrak{J}}(t, x, y, \zeta) - \frac{i}{1!} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\mathfrak{A}_{pq}^*}{\tilde{W}_{pq}} \right)_0 \frac{\partial \tilde{\mathfrak{J}}}{\partial z} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \left(\frac{\mathfrak{A}_{pq}^*}{\tilde{W}_{pq}} \right)_0 \frac{\partial^2 \tilde{\mathfrak{J}}}{\partial z^2} + \frac{i}{3!} \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} \left(\frac{\mathfrak{A}_{pq}^*}{\tilde{W}_{pq}} \right)_0 \frac{\partial^3 \tilde{\mathfrak{J}}}{\partial z^3} + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \left(\frac{\mathfrak{A}_{pq}^*}{\tilde{W}_{pq}} \right)_0 \frac{\partial^4 \tilde{\mathfrak{J}}}{\partial z^4} - \dots \right], \tag{16}
\end{aligned}$$

где $\omega_{nq}(\beta)$ и $\delta_{nq}(\beta)$ – собственная частота и коэффициент затухания нормальной моды с постоянной распространения β соответственно для q -го типа волны; $\tilde{W}_{pq}(\beta)$ – погонная единичная псевдоэнергия соответствующей регулярной моды с размерностью Дж·с²/м, определяемая из условия ортогональности регулярных мод, которое может быть получено из (11) с учетом периодичности функций \mathfrak{A}_{pq} по z с периодом D :

$$\frac{\varepsilon_0}{2D} \int_D dz \int_{S_\perp} dx dy \mathfrak{A}_{pq}(x, y, z, \beta) \mathfrak{A}_{pq'}^*(x, y, z, \beta) = \begin{cases} 0 & \text{для } q' \neq q; \\ \tilde{W}_{pq}(\beta) & \text{для } q' = q. \end{cases} \tag{17}$$

Правая часть уравнения (16) может быть упрощена, если использовать энергетическую нормировку мод, при которой $\tilde{W}_{pq}(\beta) \equiv 1$ Дж·с²/м.

Выражение (16) является обобщенным волновым уравнением для регулярной ЭС с произвольной геометрией и дисперсионной характеристикой. Классическое волновое уравнение, уравнение Клейна-Гордона и телеграфное уравнение являются его подмножествами. Несмотря на внешнее сходство с одномерным волновым уравнением, это полностью трехмерное выражение. В частности, оно учитывает конечность времени формирования поперечной структуры поля ЭС при переходных процессах (ср. [17], § 8). Помимо спектрального моделирования, уравнение (16) может быть полезно, например, для анализа

распространения видеоимпульсов в дисперсных электродинамических линиях передачи и т.п.

Поскольку ряды Тейлора в (15) и (16) медленно сходятся при $\pi/2D < |\beta| \leq \pi/D$, непрерывное приближение ЭС является менее широкополосным, чем дискретное. Поэтому обычно имеет смысл использовать его совместно с методом комплексных амплитуд в спектральных моделях второго уровня [3]. Функция u_{pq} при этом записывается, например, как

$$u_{pq}(t, z) = \operatorname{Re} \left\{ U_{pq}(t, z) \exp[i(\omega_{nqb}t - \beta_{qb}z)] \right\}, \quad (18)$$

а родовая плотность тока – как

$$\tilde{\mathcal{J}}(t, x, y, z) = \operatorname{Re} \left\{ \hat{\mathcal{J}}_q(t, x, y, z) \exp[i(\omega_{nqb}t - \beta_{qb}z)] \right\}, \quad (19)$$

где β_{qb} – базовая постоянная распространения для q -го типа волны; ω_{nqb} – базовая частота (собственная частота нормальной моды, соответствующая β_{qb}); $U_{pq}(t, z)$ – комплексная огибающая временной и продольной зависимости мгновенного значения регулярной моды на постоянной распространения β_{qb} и частоте ω_{nqb} ; $\hat{\mathcal{J}}_q(t, x, y, z)$ – комплексная огибающая родовой плотности тока на той же постоянной распространения и частоте.

Подставляя (18) и (19) в (15) и (16), и ограничивая количество учитываемых членов рядов Тейлора, получаем выражение для родового потенциала:

$$\mathfrak{A}(t, x, y, z) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_q \left[\mathfrak{A}_{pqb}(x, y, z) U_{pq}(t, z) + i \frac{\partial \mathfrak{A}_{pqb}}{\partial \beta} \frac{\partial U_{pq}}{\partial z} \right] \exp[i(\omega_{nqb}t - \beta_{qb}z)] \right\} \quad (20)$$

и уравнение возбуждения для функции U_{pq} :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 U_{pq}}{\partial t^2} - \left[\left(\frac{d\omega_{hqb}}{d\beta} \right)^2 + \omega_{hqb} \frac{d^2 \omega_{hqb}}{d\beta^2} \right] \frac{\partial^2 U_{pq}}{\partial z^2} + 2(i\omega_{hqb} + \delta_{hqb}) \frac{\partial U_{pq}}{\partial t} + \\
& + 2\omega_{hqb} \left(i \frac{d\omega_{hqb}}{d\beta} - \frac{d\delta_{hqb}}{d\beta} \right) \frac{\partial U_{pq}}{\partial z} + 2i\omega_{hqb} \delta_{hqb} U_{pq} = \\
& = \frac{1}{2D\tilde{W}_{pqb}} \left[\int_{z-D/2}^{z+D/2} d\zeta \int_{S_{\perp}} dx dy \mathfrak{A}_{pqb}^*(x, y, \zeta) \hat{\mathfrak{J}}_q(t, x, y, \zeta) - \right. \\
& \left. - \frac{i}{\tilde{W}_{pqb}} \frac{d\tilde{W}_{pqb}}{d\beta} \int_{z-D/2}^{z+D/2} d\zeta \int_{S_{\perp}} dx dy \mathfrak{A}_{pqb}^* \frac{\partial \hat{\mathfrak{J}}_q}{\partial z} + i \int_{z-D/2}^{z+D/2} d\zeta \int_{S_{\perp}} dx dy \frac{\partial \mathfrak{A}_{pqb}^*}{\partial \beta} \frac{\partial \hat{\mathfrak{J}}_q}{\partial z} \right], \tag{21}
\end{aligned}$$

где индекс b означает, что величина вычисляется при β_{qb} . Оставшиеся в выражениях (20) и (21) члены позволяют учесть квадратичную нелинейность дисперсионной характеристики $\omega_{hq}(\beta)$, а также линейные зависимости $\delta_{hq}(\beta)$, $\tilde{W}_{pq}(\beta)$ и $\mathfrak{A}_{pq}(\beta)$ вблизи β_{qb} , что дает возможность моделировать, в частности, деформацию комплексной огибающей радиоимпульса при распространении его в “холодной” ЭС, искажение энергетического спектра импульса и т.д. [18]. Этого достаточно для многих применений спектральных моделей второго уровня. Если используется энергетическая нормировка мод, средний интеграл в правой части уравнения (21) опускается.

Для узкополосной в частотной области функции u_{pq} (когда $|\Omega_{\max}| \ll \omega_{hqb}$, где Ω_{\max} – максимальная частота во временном спектре функции U_{pq}), уравнение (21) можно приближенно переписать в упрощенном виде:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial U_{pq}}{\partial t} + \delta_{hqb} U_{pq} + i \frac{d\delta_{hqb}}{d\beta} \frac{\partial U_{pq}}{\partial z} + \frac{d\omega_{hqb}}{d\beta} \frac{\partial U_{pq}}{\partial z} + \frac{i}{2} \frac{d^2 \omega_{hqb}}{d\beta^2} \frac{\partial^2 U_{pq}}{\partial z^2} = \\
& = - \frac{i}{4D\omega_{hqb} \tilde{W}_{pqb}} \left[\int_{z-D/2}^{z+D/2} d\zeta \int_{S_{\perp}} dx dy \mathfrak{A}_{pqb}^*(x, y, \zeta) \hat{\mathfrak{J}}_q(t, x, y, \zeta) - \right. \\
& \left. - \frac{i}{\tilde{W}_{pqb}} \frac{d\tilde{W}_{pqb}}{d\beta} \frac{\partial}{\partial z} \int_{z-D/2}^{z+D/2} d\zeta \int_{S_{\perp}} dx dy \mathfrak{A}_{pqb}^* \hat{\mathfrak{J}}_q + i \frac{\partial}{\partial z} \int_{z-D/2}^{z+D/2} d\zeta \int_{S_{\perp}} dx dy \frac{\partial \mathfrak{A}_{pqb}^*}{\partial \beta} \hat{\mathfrak{J}}_q \right].
\end{aligned}$$

Использованный здесь подход Бернулли (концепция стоячих волн) для решения как краевых, так и начальных задач, в отличие от подхода Д'Аламбера (концепции бегущих волн), позволяет адекватно моделировать процессы взаимодействия электронов с электромагнитным полем как посреди полосы пропускания ЭС, так и вблизи ее границ. Фильтрация комплексной огибающей родовой плотности тока в частотной области, обеспечивающая вышеуказанную узкополосность функции u_{pq} , выполняется с помощью тех же алгоритмов, что и в дискретном приближении.

Функции \mathfrak{A}_{pq} , $\partial \mathfrak{A}_{pq} / \partial \beta$, $\partial^2 \mathfrak{A}_{pq} / \partial \beta^2$ и т.д. могут быть вычислены путем дифференцирования нормальных мод или синтезированы из парциальных мод по формулам:

$$\mathfrak{A}_{pq}(x, y, z, \beta) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathfrak{A}_{nqn}(x, y, z) \exp[i\beta(z - nD)];$$

$$\frac{\partial \mathfrak{A}_{pq}}{\partial \beta} = i \sum_{n=0}^{N-1} (z - nD) \mathfrak{A}_{nqn} \exp[i\beta(z - nD)];$$

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{A}_{pq}}{\partial \beta^2} = - \sum_{n=0}^{N-1} (z - nD)^2 \mathfrak{A}_{nqn} \exp[i\beta(z - nD)] \text{ и т.д.}$$

Поскольку все нечетные производные регулярных мод на нулевой постоянной распространения являются мнимыми, нетрудно видеть, что выражение (15) и правая часть уравнения (16) всегда вещественны. В качестве примера на рис. 3 – 5 изображены y - и z -составляющие векторного потенциала регулярной моды и их первые и вторые производные по β соответственно на нижней границе полосы пропускания LE_0 ($q = 0$) однородной гребенчатой замедляющей системы из восьми ячеек как функции координат (y, z) . Они получены путем дифференцирования вычисленных аналитически по соотношениям работы [14] нормальных 0- и $\pm\pi/4$ -мод для той же системы, что и на рис. 1. Использована ампли-

тудная нормировка ($A_{pqz} \equiv 1$ В·с/м между торцами ламелей). В продольно-однородных ЭС соответствующие функции однородны в направлении z .

4. ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЙ ФОРМАЛИЗМ

Сохранение калибровки для родового потенциала зависит от точности выполнения условия непрерывности тока $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \partial\rho/\partial t = 0$ моделью электронного потока. В отличие от кулоновской калибровки, в калибровке Лоренца скалярный потенциал и дивергентная часть векторного потенциала с частотами выше критической для каждого типа волны распространяются вдоль ЭС наравне с соленоидальным полем. Поэтому случайно возникший между ними дисбаланс не имеет тенденции к уменьшению с расстоянием. Если точное соблюдение условия непрерывности тока затруднительно, вместо родовых потенциала и плотности тока можно использовать релятивистские четырехмерные векторные величины $\vec{A}^c = \{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\Phi, \vec{A}\}$ и $\vec{j}^c = \{\rho/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}, \vec{j}\}$ (так называемые четырехвекторы потенциала и плотности тока [19]), которым калибровка Лоренца присуща неотъемлемо:

$$\vec{\nabla}^c \cdot \vec{A}^c = 0; \quad \vec{\nabla}^c \cdot \vec{j}^c = 0, \quad (22)$$

где $\vec{\nabla}^c = \{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \partial/\partial t, -\vec{\nabla}\}$ – четырехмерный векторный дифференциальный оператор (аналог гамильтониана). Здесь и далее для отличия четырехмерных векторов и операторов от аналогичных трехмерных к первым добавляется верхний индекс в виде буквы “с”. Фигурные скобки означают объединение заключенных в них компонент в четырехвектор. Четырехвекторы не разделяются на ковариантные и контравариантные, взамен этого в соответствующих местах операторов и скалярных произведений проставлены знаки минус.

Уравнение (1) в терминах четырехмерных векторов имеет вид $\nabla^{2c} \vec{A}^c = \mu_0 \vec{j}^c$, где $\nabla^{2c} = \varepsilon_0\mu_0 \partial^2/\partial t^2 - \nabla^2$ – четырехмерный аналог лапласиана (даламбертиан). Напряженность электрического и индукция магнитного полей

могут быть получены из четырехвектора \vec{A}^c как компоненты тензора электромагнитного поля [19].

Когда четырехвектор потенциала используется для описания полей в продольно-однородной ЭС, большинство ее поперечных волновых чисел (критических частот), как минимум, трехкратно вырождены. Два типа волны – это общеизвестные TE_{ij} (H_{ij}) и TM_{ij} (E_{ij}) моды, имеющие соленоидальные компоненты $\{0, A_x, A_y, 0\}$ и $\{0, A_x, A_y, A_z\}$ четырехвектора \vec{A}^c соответственно. Третий тип – мода с потенциальными составляющими $\{A_t, A_x, A_y, A_z\}$, которая может быть обозначена как “Zero Magnetic” (ZM_{ij}) или “Potential” (P_{ij}). Это “виртуальная” волна, не имеющая компонент электрического и магнитного поля в пустой ЭС, но являющаяся базисом для разложения потенциальной составляющей электрического поля в присутствии электронного потока. В терминах нерелятивистских величин ее можно интерпретировать как неразделимую комбинацию двух волн, одна из которых содержит компоненту скалярного потенциала $\{A_t, 0, 0, 0\}$, а вторая – дивергентные составляющие векторного потенциала $\{0, A_x, A_y, A_z\}$. Волны связаны между собой соотношением (22) и подавляют друг друга в пустой ЭС, но их баланс нарушается вблизи свободных зарядов.

Регулярные моды типов TE (H), TM (E) и ZM (P) образуют полную систему базисных функций для декомпозиции электромагнитного поля в продольно-однородной односвязной ЭС с однородными ГУ. Любая замедляющая система также имеет “потенциальные” полосы пропускания помимо обычных “соленоидальных”. Все эти полосы использовались и ранее (разделы 2 и 3) при разложении родового потенциала. Однако там для каждого “потенциального” типа волны решались два независимых уравнения возбуждения, в правой части одного из которых находилась плотность объемного заряда, а второго – плотность тока. Здесь же для каждой “потенциальной” волны решается единственное уравнение возбуждения с четырехвектором плотности тока в правой части. Поэтому нарушение закона непрерывности тока может привести к неточности в

расчете амплитуды этой волны, но калибровка (22) всегда сохраняется. В многосвязной ЭС для полноты вышеуказанной системы к ней должны быть добавлены TEM_i (T_i) волны.

В качестве примера ниже выписаны компоненты четырехвектора регулярных мод $\vec{A}_{pq}^c(x, y, \omega, \beta)$ в продольно-однородном волноводе прямоугольного поперечного сечения размером $\Delta X \times \Delta Y$. Для волны типа TE :

$$A_{pqt} = 0; \quad A_{pqx} = -A_0 \frac{k_{yq}}{\sqrt{k_{xq}^2 + k_{yq}^2}} \cos(k_{xq}x) \sin(k_{yq}y);$$

$$A_{pqy} = A_0 \frac{k_{xq}}{\sqrt{k_{xq}^2 + k_{yq}^2}} \sin(k_{xq}x) \cos(k_{yq}y); \quad A_{pqz} = 0.$$

Для волны типа TM :

$$A_{pqt} = 0; \quad A_{pqx} = -iA_0 \frac{k_{xq}\beta}{k_{xq}^2 + k_{yq}^2} \cos(k_{xq}x) \sin(k_{yq}y);$$

$$A_{pqy} = -iA_0 \frac{k_{yq}\beta}{k_{xq}^2 + k_{yq}^2} \sin(k_{xq}x) \cos(k_{yq}y); \quad A_{pqz} = A_0 \sin(k_{xq}x) \sin(k_{yq}y).$$

Для волны типа ZM :

$$A_{pqt} = A_0 \sin(k_{xq}x) \sin(k_{yq}y); \quad A_{pqx} = iA_0 \frac{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\omega k_{xq}}{(k_{xq}^2 + k_{yq}^2 + \beta^2)} \cos(k_{xq}x) \sin(k_{yq}y);$$

$$A_{pqy} = iA_0 \frac{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\omega k_{yq}}{(k_{xq}^2 + k_{yq}^2 + \beta^2)} \sin(k_{xq}x) \cos(k_{yq}y);$$

$$A_{pqz} = A_0 \frac{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\omega\beta}{(k_{xq}^2 + k_{yq}^2 + \beta^2)} \sin(k_{xq}x) \sin(k_{yq}y).$$

В вышеприведенных выражениях A_0 – нормировочная амплитуда, для амплитудной нормировки равная 1 В·с/м; $k_{xq} = \pi i_q / \Delta X$ ($i_q = 0, 1, 2, \dots$) и $k_{yq} = \pi j_q / \Delta Y$ ($j_q = 0, 1, 2, \dots$) – поперечные волновые числа q -го типа волны по

координатам x и y соответственно. У волны типа TE один из индексов i_q или j_q может быть нулевым, у двух других типов волн оба индекса должны начинаться с единицы.

Погонная единичная псевдоэнергия регулярных мод вычисляется по формуле (17) с учетом правила скалярного умножения четырехвекторов:

$$\tilde{W}_{pq}(\omega, \beta) = \frac{\varepsilon_0}{2D} \int_D dz \int_{S_\perp} dx dy \left(A_{pqt} A_{pqt}^* - A_{pqx} A_{pqx}^* - A_{pqy} A_{pqy}^* - A_{pqz} A_{pqz}^* \right).$$

В частности, для волны типа TE в прямоугольном волноводе при $i_q \neq 0$ и $j_q \neq 0$:

$$\tilde{W}_{pq} = -A_0^2 \frac{\varepsilon_0 \Delta X \Delta Y}{8},$$

если же один из индексов i_q или j_q равен нулю, \tilde{W}_{pq} в два раза больше (по модулю). Для волны типа TM :

$$\tilde{W}_{pq} = -A_0^2 \frac{\varepsilon_0 \Delta X \Delta Y}{8} \left[1 + \frac{\beta^2}{k_{xq}^2 + k_{yq}^2} \right];$$

для волны типа ZM :

$$\tilde{W}_{pq} = A_0^2 \frac{\varepsilon_0 \Delta X \Delta Y}{8} \left[1 - \frac{\varepsilon_0 \mu_0 \omega^2}{(k_{xq}^2 + k_{yq}^2 + \beta^2)} \right].$$

При использовании четырехвекторов регулярные моды и их погонные единичные псевдоэнергии являются в общем случае функциями частоты и постоянной распространения. Выражение (15) и уравнение (16) должны быть при этом переписаны соответственно как

$$\vec{A}^u(t, x, y, z) = \sum_q \left[\vec{A}_{pq0}^u(x, y, z) u_{pq}(t, z) - \frac{i}{1!} \frac{\partial \vec{A}_{pq0}^u}{\partial \omega} \frac{\partial u_{pq}}{\partial t} + \frac{i}{1!} \frac{\partial \vec{A}_{pq0}^u}{\partial \beta} \frac{\partial u_{pq}}{\partial z} - \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \vec{A}_{pq0}^u}{\partial \omega^2} \frac{\partial^2 u_{pq}}{\partial t^2} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \vec{A}_{pq0}^u}{\partial \omega \partial \beta} \frac{\partial^2 u_{pq}}{\partial t \partial z} - \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \vec{A}_{pq0}^u}{\partial \beta^2} \frac{\partial^2 u_{pq}}{\partial z^2} + \dots \right]$$

И

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 u_{pq}}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial}{\partial t} \left(\delta_{nq0} u_{pq} - \frac{1}{2!} \frac{d^2 \delta_{nq0}}{d\beta^2} \frac{\partial^2 u_{pq}}{\partial z^2} + \frac{1}{4!} \frac{d^4 \delta_{nq0}}{d\beta^4} \frac{\partial^4 u_{pq}}{\partial z^4} - \dots \right) + \omega_{nq0}^2 u_{pq} - \\
& - \frac{1}{2!} \frac{d^2 (\omega_{nq0}^2)}{d\beta^2} \frac{\partial^2 u_{pq}}{\partial z^2} + \frac{1}{4!} \frac{d^4 (\omega_{nq0}^2)}{d\beta^4} \frac{\partial^4 u_{pq}}{\partial z^4} - \dots = \\
& = \frac{1}{2D} \int_{z-D/2}^{z+D/2} d\zeta \int_{S_{\perp}} dx dy \left[\frac{\vec{A}_{pq0}^{q*}(x, y, \zeta)}{\vec{W}_{pq0}} \vec{j}^q(t, x, y, \zeta) + \frac{i}{1!} \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\vec{A}_{pq}^{q*}}{\vec{W}_{pq}} \right)_0 \frac{\partial \vec{j}^q}{\partial t} - \right. \\
& - \frac{i}{1!} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\vec{A}_{pq}^{q*}}{\vec{W}_{pq}} \right)_0 \frac{\partial \vec{j}^q}{\partial z} - \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} \left(\frac{\vec{A}_{pq}^{q*}}{\vec{W}_{pq}} \right)_0 \frac{\partial^2 \vec{j}^q}{\partial t^2} + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial \omega \partial \beta} \left(\frac{\vec{A}_{pq}^{q*}}{\vec{W}_{pq}} \right)_0 \frac{\partial^2 \vec{j}^q}{\partial t \partial z} - \\
& \left. - \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \left(\frac{\vec{A}_{pq}^{q*}}{\vec{W}_{pq}} \right)_0 \frac{\partial^2 \vec{j}^q}{\partial z^2} - \dots \right].
\end{aligned}$$

Индекс 0 теперь означает, что величина вычисляется при $\omega = 0$ и $\beta = 0$.

5. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Моделирование ГУ на разомкнутом или закороченном конце ограниченной в продольном направлении ЭС является тривиальной задачей, поскольку они учтены в структуре поля и электродинамических параметрах нормальных, а, следовательно, и парциальных мод. В случае ограниченной регулярной ЭС можно также воспользоваться парциальными модами аналогичной неограниченной системы, продолжив последовательность функций $u_{pqn}(t)$ симметрично или антисимметрично относительно конца ЭС. Основное внимание следует уделить способам согласования ЭС, т.е. создания режима бегущей волны в ней.

Электромагнитное поле для каждого типа волны (полосы пропускания) согласованной ЭС можно рассматривать как суперпозицию двух учитываемых по отдельности волн с противоположными направлениями групповой скорости. При этом проблема определения ГУ подразделяется на две самостоятельные задачи: задание их на входе и на выходе ЭС. Рассмотрим для примера регулярную периодическую ЭС в предположении, что $N = \Delta Z / D$, т.е. каждая парци-

альная мода локализована в окрестности определенной ячейки [20]. Возможны два способа задания ГУ на входе согласованной ЭС:

- 1) моделирование идеального согласования;
- 2) моделирование реального ввода энергии.

Первый способ теоретически позволяет получить согласование в широком диапазоне частот, вплоть до всей полосы пропускания. Он заключается в добавлении к входному концу реальной ЭС нескольких “фиктивных” ячеек, функции $u_{nqm}(t)$ для которых рассчитываются аналитически. Этот вид согласования проще всего реализуется, когда входной сигнал задан в частотной области. Для каждой m -й гармонической составляющей сигнала с комплексной амплитудой U_{nqm} и частотой ω_{nqm} , лежащей в q -й полосе пропускания, в фиктивных ячейках синтезируется бегущая волна вида

$$u_{nqm}(t) = \operatorname{Re} \left\{ U_{nqm} \exp[i(\omega_{nqm}t - n\Delta\varphi_m)] \right\},$$

где n – номер фиктивной ячейки, а $\Delta\varphi_m$ находится как решение дисперсионного уравнения:

$$\omega_{nqm}^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \omega_{nqm}^2 \cos(n\Delta\varphi_m).$$

Моделирование реального ввода энергии состоит во введении в начальную ячейку ЭС импеданса $Z_{\text{внеш } q}$ элемента связи с внешней цепью (например, витка или штыря, нагруженного на волновое сопротивление внешней цепи и возбуждаемого входным сигналом). Достоинством такого способа согласования является максимальное соответствие конструкции реальной ЭС, недостатком – невозможность согласования в широкой полосе частот, что, впрочем, также присуще реальным вводам и выводам энергии. При небольших размерах элемента связи можно не учитывать изменение структуры поля и единичных псевдоэнергий парциальных мод, что позволяет по-прежнему считать ЭС регулярной.

Точный аналитический расчет импеданса элемента связи, обеспечивающего согласование на заданной частоте, сравнительно сложен. Вместо этого можно использовать численное моделирование распределения поля в “холодной” ЭС с подбором значения $Z_{\text{внеш } q}$ до получения приемлемого коэффициента стоячей волны (КСВ), аналогично тому, как это делается при электродинамических испытаниях реальных замедляющих систем. В качестве начального приближения целесообразно брать значение $Z_{\text{внеш } q}$, вычисленное аналитически для крайней ячейки без учета отражений волны от второй и последующих ячеек, считая от конца ЭС. Соответствующие формулы приведены в [20].

На выходе согласованной ЭС возможны следующие способы задания ГУ:

- 1) моделирование идеального согласования;
- 2) моделирование реального вывода энергии;
- 3) моделирование согласованной нагрузки.

При первом способе к выходному концу реальной ЭС добавляются фиктивные ячейки, функции $u_{\text{пqn}}(t)$ для которых рассчитываются аналитически путем экстраполяции их значений из последних реальных ячеек системы. Такая экстраполяция тривиальна только для узкополосного сигнала, когда выполняется простое рекуррентное соотношение [20]:

$$u_{\text{пq}(n+1)}(t) = \frac{u_{\text{пqn}}^2(t) + u_{\text{пq}(n-2)}(t)u_{\text{пqn}}(t) - u_{\text{пq}(n-1)}^2(t)}{u_{\text{пq}(n-1)}(t)}$$

или, если $u_{\text{пq}(n-1)}$ близко к нулю:

$$u_{\text{пq}(n+1)} = \frac{u_{\text{пq}(n-1)}^3 + (2u_{\text{пq}(n-1)} + u_{\text{пq}(n-3)})(u_{\text{пq}(n-1)}u_{\text{пq}(n-3)} - u_{\text{пq}(n-2)}^2)}{u_{\text{пq}(n-2)}^2}.$$

В противном случае необходимо выполнять разложение колебания в реальных ячейках по временным или пространственным гармоникам. Как правило, это затруднено, поскольку для сложного сигнала порядок модели должен быть вы-

соким, и исходная выборка будет охватывать большое количество временных шагов или ячеек ЭС соответственно.

Моделирование реального вывода энергии практически не отличается от аналогичного метода для ввода энергии. При третьем способе согласования к выходному концу ЭС добавляются несколько фиктивных ячеек, структура поля в которых рассчитывается численно, как и в реальных ячейках. Коэффициент затухания в них выбирается достаточно большим (но не настолько, чтобы возникло заметное отражение от каждой из фиктивных ячеек). В результате ГУ не играют роли, поскольку волна, прошедшая в фиктивное продолжение ЭС и отраженная от его конца, существенно ослаблена. При данном методе реальная ЭС как бы нагружена на согласованную нагрузку, состоящую из ряда ячеек с большим затуханием. Во избежание частотной неравномерности КСВ, коэффициенты δ_{nq0} должны превалировать над остальными коэффициентами затухания парциальных мод фиктивных ячеек.

ВЫВОДЫ

1. Для расчета возбуждения электронными потоками нестационарных негармонических электромагнитных полей в направляющих электродинамических системах СВЧ-приборов на сегодняшний день оптимальными с точки зрения соотношения между адекватностью модели и объемом вычислений остаются подходы, основанные на методе Фурье (разделении переменных). Поля при этом раскладываются по функциям координат (модам ЭС) с коэффициентами, зависящими от времени или от времени и продольной координаты.

2. Декомпозиция полей с финитным спектром в продольно локализованные линейно-независимые линейные комбинации собственных функций ЭС (парциальные моды) имеет достоинства по сравнению с разложением их по самим собственным функциям (нормальным модам). В частности, метод Фурье, традиционно используемый для решения внутренних краевых задач электродинамики, где набор собственных функций дискретен, может быть применен при

исследовании предельных задач (с континуальным пространством собственных функций). Преимуществом парциальных мод перед нормальными в этом случае является непрерывность спектра синтезируемых ими полей в области частот и продольных волновых чисел для неограниченной в продольном направлении или согласованной на концах ЭС, при условии сохранения дискретности самих мод. Описанное линейное преобразование мод можно также применить ко всем пространственным координатам, разложив колебания системы с распределенными параметрами в двух- или трехмерную “решетку” локализованных в пространстве связанных парциальных осцилляторов (так называемых осциллетов). Декомпозиция поля в ряды Фурье по ортогональным модам ЭС может быть дополнена разложением его в ряды по неортогональным функциям, если это обеспечивает преимущества при решении прикладных задач (например, локализацию парциальных мод в продольно-неоднородных ЭС с помощью неортогональных матриц формы).

3. Для продольно-однородных и периодических направляющих электродинамических систем часто эффективным является разложение полей по комплексным огибающим собственным функциям ЭС в продольном направлении (регулярным модам), зависящим от постоянной распространения. Это обеспечивает большую точность аппроксимации поля в ограниченной полосе частот по сравнению с декомпозицией его в парциальные моды.

4. В дальнейшем возможна разработка методов непосредственного вычисления пространственных структур и электродинамических параметров парциальных мод (без предварительного нахождения аналогичных величин и функций для нормальных мод) как в регулярных, так и в нерегулярных ЭС. Необходимо также учесть неоднородное заполнение ЭС, в том числе нелинейного и нестационарного, с использованием векторов поляризации и тока проводимости либо путем разложения поля в решетку нелинейных или параметрических связанных парциальных осцилляторов. Перспективным является использование

основ релятивистской теории в прикладных задачах электродинамики и электроники СВЧ.

Автор признателен Н.И. Айзацкому за постановку задач и обсуждение результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Goebel D.M., Liou R.R., Menninger W.L., et al.* // IEEE Trans. 2001. V. ED-48. № 1. P. 74.
2. *Шварцбург А.Б.* // Успехи физ. наук. 1998. Т. 168. № 1. С. 85.
3. *Грицунов А.В.* // РЭ. 2004. Т. 49. № 7. С. 882.
4. *Kim H.J., Shin J.U., Choi J.J.* // IEEE Trans. 2002. V. PS-30. № 3. P. 956.
5. *Sosnytskiy S.V., Vavriv D.M.* // IEEE Trans. 2002. V. PS-30. № 3. P. 984.
6. *Кураев А.А., Байбурун В.Б., Ильин Е.М.* Математические модели и методы оптимального проектирования СВЧ приборов. Минск: Наука и техника, 1990.
7. *Wohlbier J.G., Booske J.H., Dobson I.* // IEEE Trans. 2002. V. PS-30. № 3. P. 1063.
8. *Грицунов А.В.* // Радиотехника. 2003. № 9. С. 25.
9. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Т. 7. М.: Мир, 1977.
10. *Стрелков С.П.* Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1964.
11. *Кузнецов С.П.* // РЭ. 1980. Т. 25. № 2. С. 419.
12. *Дьяконов В.П.* Вейвлеты. От теории к практике. М.: СОЛОН-Р, 2002.
13. *Гоноровский И.С.* Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Радио и связь, 1986.
14. *Клеен В.* Введение в электронику сверхвысоких частот. М.: Сов. радио, 1963.
15. *Отнес Р., Эноксон Л.* Прикладной анализ временных рядов. М.: Мир, 1982.
16. *Gritsunov A.V., Turenko L.Y.* // Telecomm. and Radio Engineering. 2002. V. 58. № 11-12. P. 56.
17. *Вайнштейн Л.А., Вакман Д.Е.* // Лекции по электронике СВЧ. 4-я зимняя школа-семинар инженеров. Кн. 3. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1978. С. 3.

18. *Вайнштейн Л.А.* // Успехи физ. наук. 1976. Т. 118. № 2. С. 339.
19. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Теория поля. М.: Наука, 1988.
20. *Герасимов В.П., Грицунов А.В., Писаренко В.М.* // Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. "Радиотехника". Харьков: Харьковский национальный ун-т радиотехники, 2002. Вып. 129. С. 119.

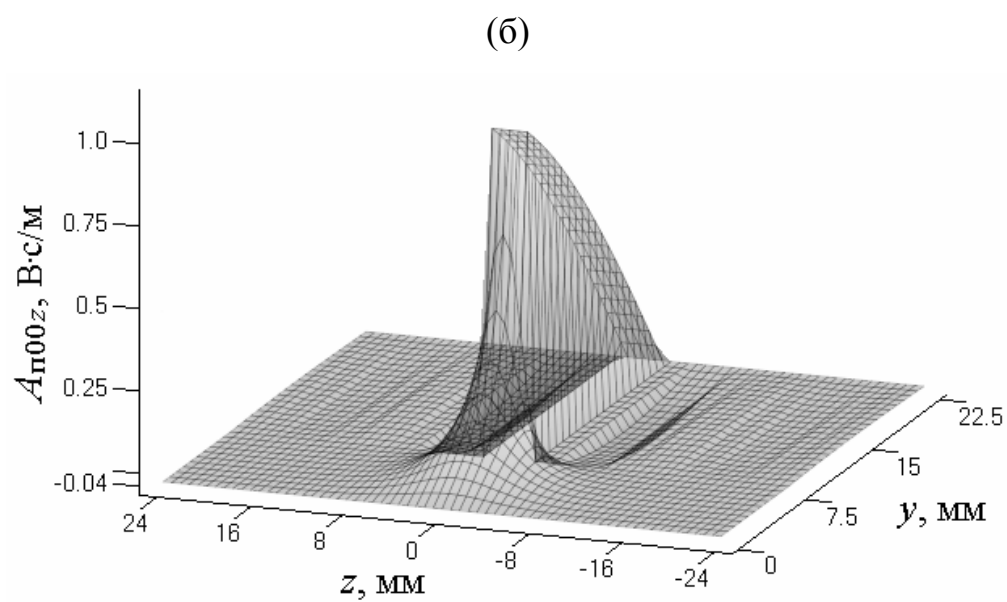
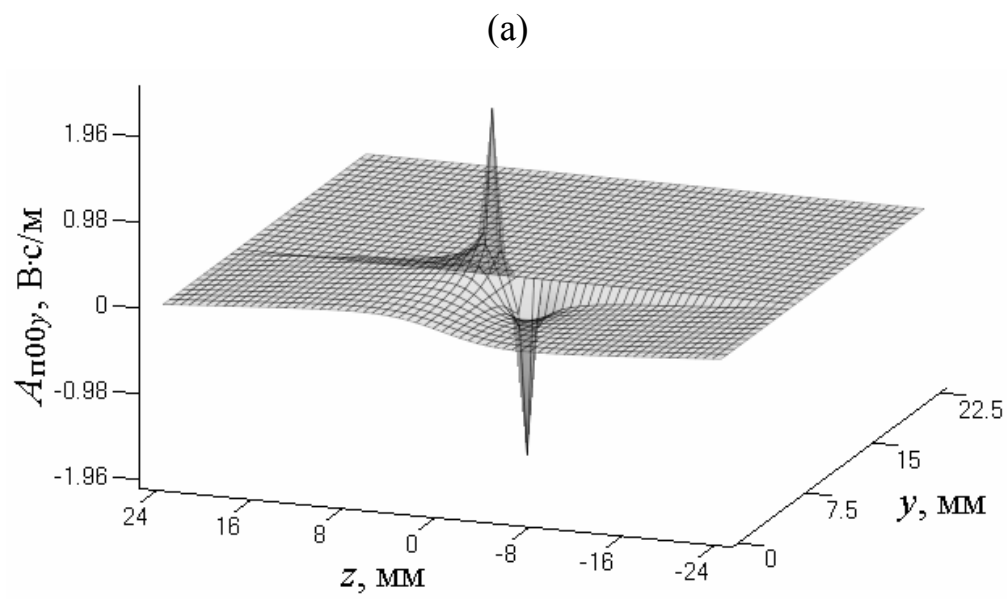


Рис. 1.

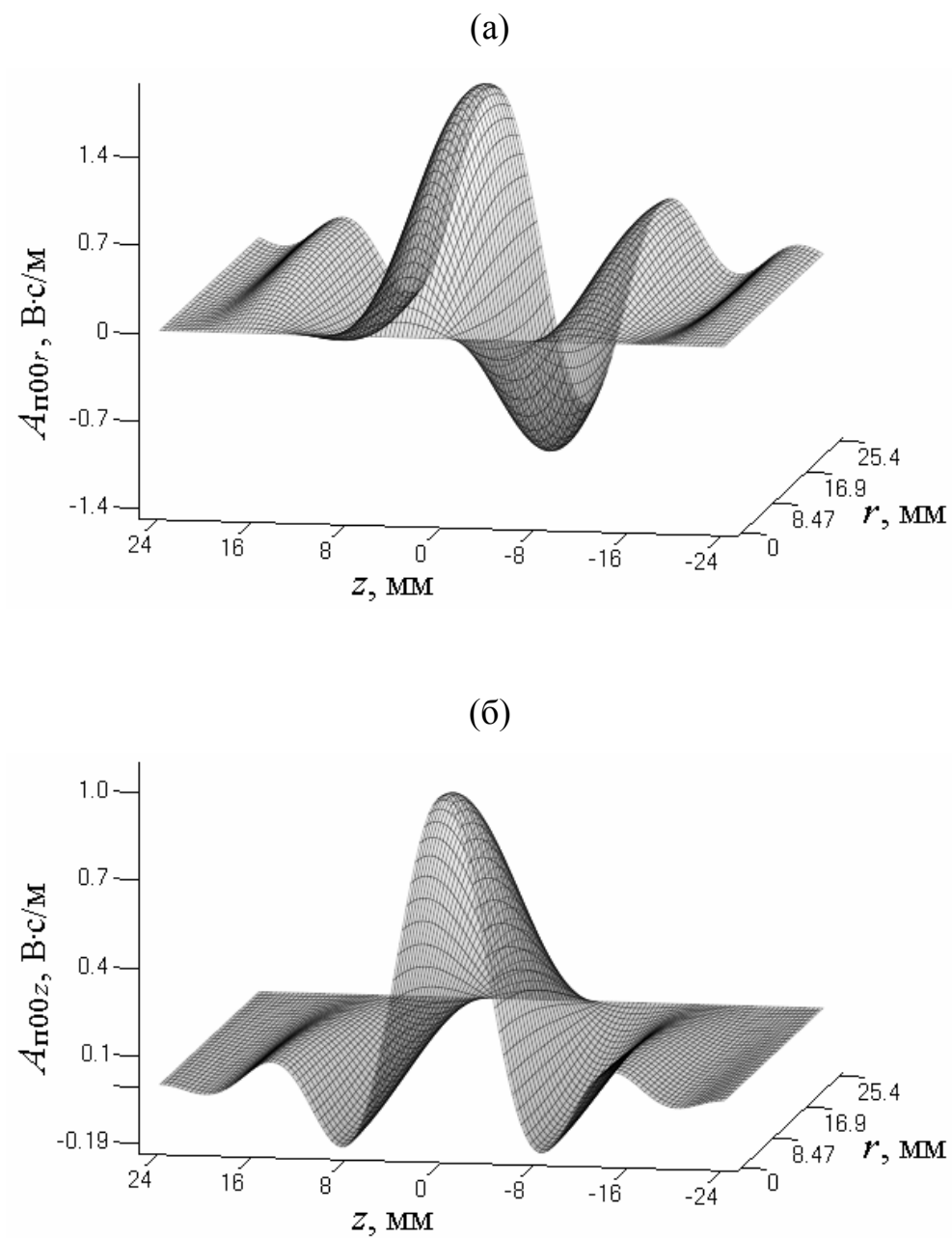
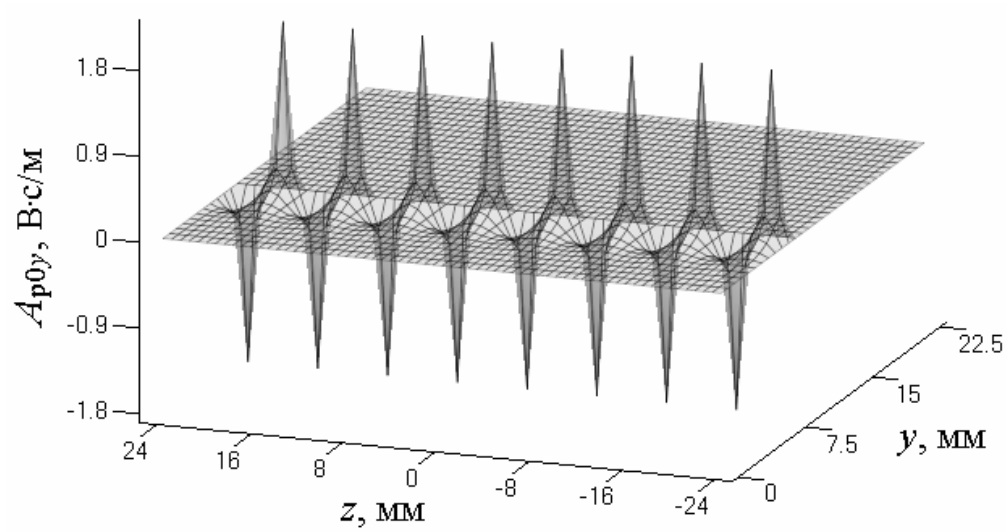


Рис. 2.

(a)



(б)

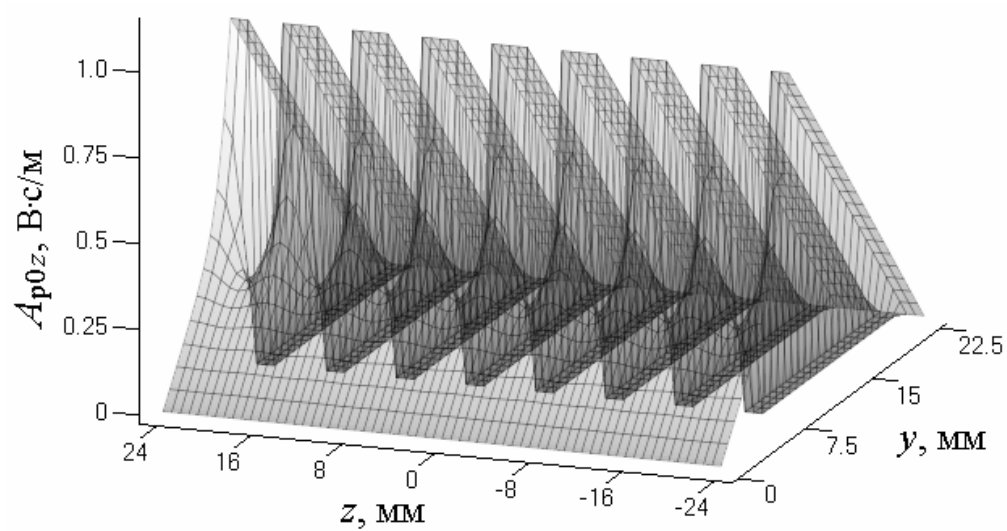
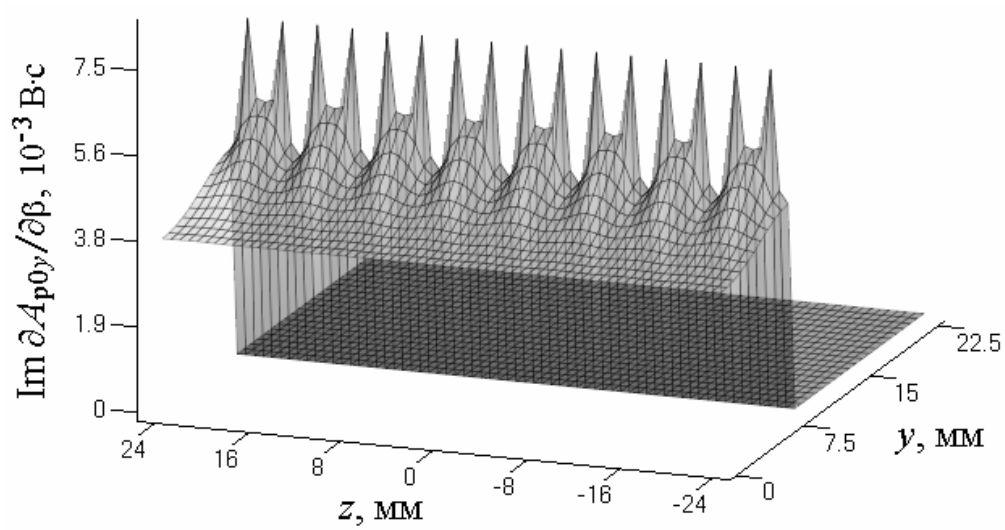


Рис. 3.

(a)



(б)

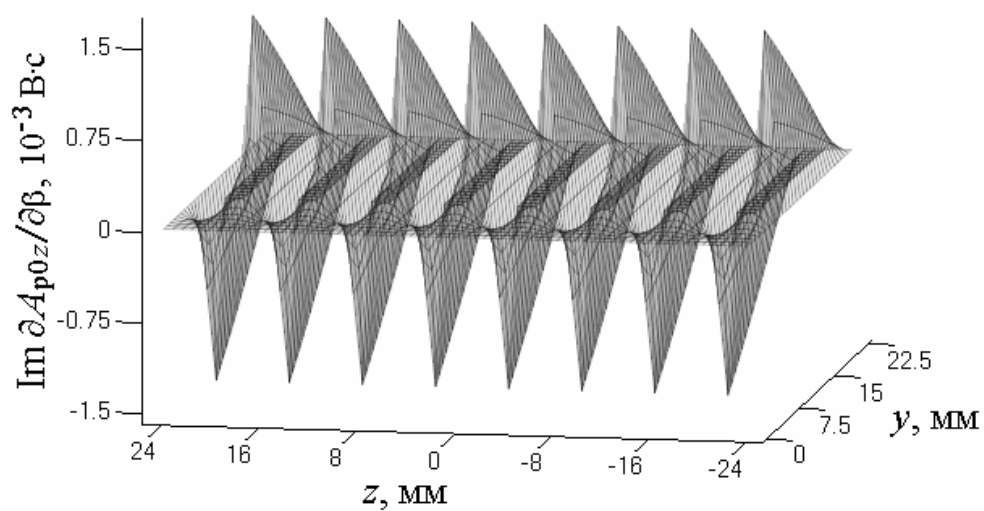
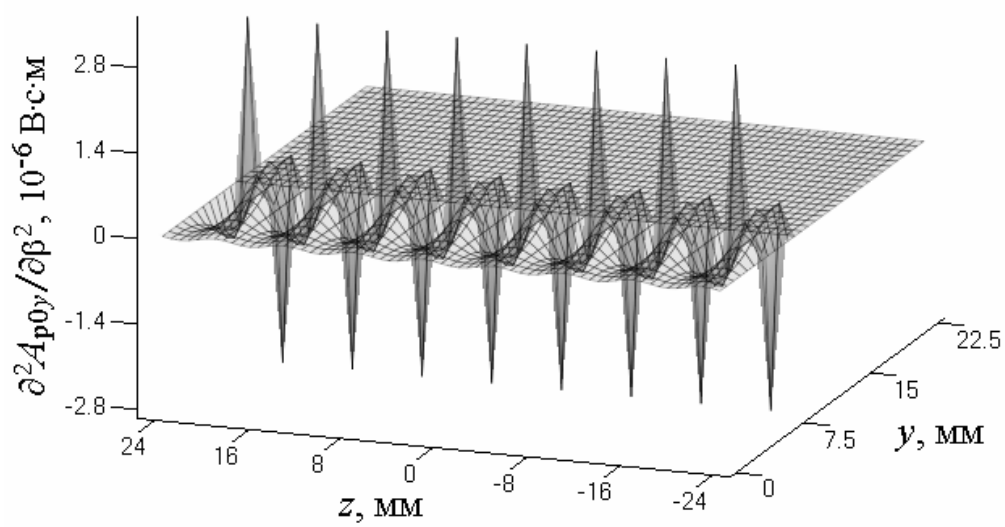


Рис. 4.

(a)



(б)

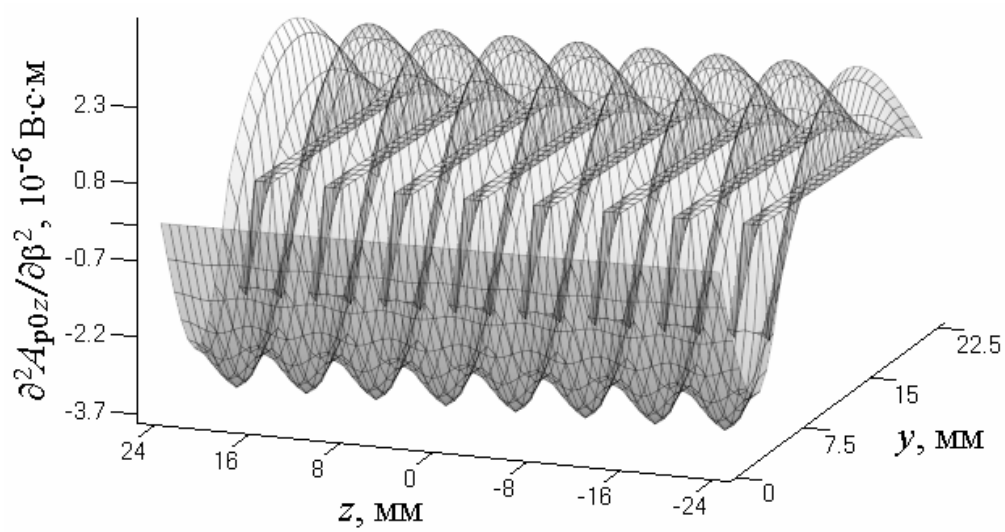


Рис. 5.

ПОДПИСИ К РИСУНКАМ

Рис. 1. Нулевая парциальная мода в полосе пропускания LE_0 гребенчатой замедляющей системы: зависимости поперечной A_{n00y} (а) и продольной A_{n00z} (б) составляющих векторного потенциала от поперечной y и продольной z координат.

Рис. 2. Нулевая парциальная мода для волны TM_{01} цилиндрического волновода: зависимости радиальной A_{n00r} (а) и аксиальной A_{n00z} (б) составляющих векторного потенциала от радиальной r и аксиальной z координат.

Рис. 3. Регулярная мода в полосе пропускания LE_0 гребенчатой замедляющей системы: зависимости поперечной A_{p0y} (а) и продольной A_{p0z} (б) составляющих векторного потенциала от поперечной y и продольной z координат.

Рис. 4. Первая производная регулярной моды в полосе пропускания LE_0 гребенчатой замедляющей системы: зависимости мнимых частей первых производных поперечной $\partial A_{p0y} / \partial \beta$ (а) и продольной $\partial A_{p0z} / \partial \beta$ (б) составляющих векторного потенциала по постоянной распространения β от поперечной y и продольной z координат.

Рис. 5. Вторая производная регулярной моды в полосе пропускания LE_0 гребенчатой замедляющей системы: зависимости вторых производных поперечной $\partial^2 A_{p0y} / \partial \beta^2$ (а) и продольной $\partial^2 A_{p0z} / \partial \beta^2$ (б) составляющих векторного потенциала по постоянной распространения β от поперечной y и продольной z координат.