УДК 62.506.2

А. Г. МУРАШКО, канд. техн. наук, *Г. Г. ЧЕТВЕРИКОВ*

ИЗВЛЕЧЕНИЕ КВАДРАТНОГО КОРНЯ СРЕДСТВАМИ АЛГЕБРЫ ПРЕДИКАТОВ

В данной работе исследуется вопрос математического описания процесса извлечения квадратного корня из многоразрядных двоичных кодов с помощью средств алгебры конечных предикатов [1, 2, 3]. На основе этого описания предполагается смоделировать работу некоторого конечного автомата, позволяющего решать различные аналогичные задачи. Автомат предназначен для выполнения рассматриваемой операции путем параллельного и независимого решения системы логических уравнений (СЛУ), к которой математически сведен процесс извлечения корня. В статьях [2, 4] сведены арифметические операции: сложение и умножение (для двоичных и троичных кодов соответственно).

В работе [3] введены уравнения теории интеллекта, описывающие различные информационные процессы, реализуемые естественным и искусственным интеллектом. В этом плане одной из задач является получение требуемых уравнений, которые в дальнейшем могут быть реализованы.

Перейдем к выводу системы логических уравнений, являющейся результатом математического описания процесса извлечения корня квадратного из многоразрядных двоичных кодов средствами алгебры предикатов.

Опишем отношение H между многоразрядными двоичными кодами $X(x_m, x_{m-1}, \ldots, x_1)$, $Y=(y_m, y_{m-1}, \ldots, y_1)$, вводимое уравнением $X=\sqrt{Y}$.

Пусть задан Y. Требуется найти значение X. В общем случае значение X ищем с недостатком, то есть в виде $X=\sqrt{Y-C}$ (1), где $C=(c_{2m}, c_{2m-1}, \ldots, c_1)$. Значение C также неизвестно, поэтому составим второе уравнение, получаемое из следующих рассуждений. Так как $Y<(X+1)^2$, после несложных преобразований получим $2X+1-C>0$, т. е. $2X+1-C\geqslant 1 \Rightarrow 2X-C>0$ или $2X=C+L$ (2), где $L=(l_{2m}, l_{2m-1}, \ldots, l_1)$.

Согласно [2] опишем полученные отношения. Для каждой арифметической операции уравнений (1), (2) запишем соответствующую СЛУ, представив для большей наглядности уравнения в виде: $X \cdot X+C=Y$ (1) $2 \cdot X=C+L$. (2)

Для операции умножения X на X запишем следующую систему, состоящую в общем случае из m^2 уравнений:

$$
\begin{aligned}
& x_1^0 r_{1,1}^0 \vee x_1^1 r_{1,1}^1 = 1; \\
& (x_2^0 \vee x_1^0)\, r_{1,2}^0 \vee X_2^1 x_1^1 r_{1,2}^0 = 1; \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& (x_m^0 \vee x_1^0)\, r_{1,m}^0 \vee x_m^1 x_1^1 r_{1,m}^1 = 1; \\
& (x_1^0 \vee x_2^0)\, r_{2,2}^0 \vee x_1^1 x_2^1 r_{2,2}^1 = 1; \\
& x_2^0 r_{2,3}^0 \vee x_2^1 r_{2,3}^1 = 1; \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& (x_m^0 \vee x_2^0)\, r_{2,m}^0 \vee x_m^1 x_2^1 r_{2,m}^1 = 1; \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& x_m^0 r_{m,2m-1}^0 \vee x_m^1 r_{m,2m-1}^1 = 1;
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

где $r_{j,i+j-1}$ $(1\leqslant i,\ j\leqslant m)$ — частичные произведения, получаемые при умножении множимого на j-ю цифру множителя.

Производим суммирование частичных произведений с помощью СЛУ (3), которая применяется последовательно $m-1$ раз. Вид получаемой СЛУ такой:

$$
\begin{gathered}
(r_{1,j}^0 r_{2,j}^0 t_j^0 \vee r_{1,j}^1 r_{2,j}^1 t_j^1)(t_{j-1}^0 a_j^0 \vee t_{j-1}^1 a_j^1) \vee (r_{1,j}^0 r_{2,j}^1 \vee r_{1,j}^1 r_{2,j}^0) \times \\
\times (t_{j-1}^0 t_j^0 a_j^1 \vee t_{j-1}^1 t_j^1 a_j^0) = 1; \quad (r_{3,j}^0 a_j^0 s_j^0 \vee r_{3,j}^1 a_j^1 s_j^1)(s_{j-1}^0 b_j^0 \vee s_{j-1}^1 b_j^1) \vee \\
\vee (r_{3,j}^0 a_j^1 \vee r_{3,j}^1 a_j^0)(s_{j-1}^0 s_j^0 b_j^1 \vee s_{j-1}^1 s_j^1 b_j^0) = 1; \quad (r_{m,j}^0 k_j^0 p_j^0 \vee \\
\vee r_{m,j}^1 k_j^1 p_j^1)(p_{j-1}^0 z_j^0 \vee p_{j-1}^1 z_j^1) \vee (r_{m,j}^0 k_j^1 \vee r_{m,j}^1 k_j^0)(p_{j-1}^0 p_j^0 z_j^1 \vee \\
\vee p_{j-1}^1 p_j^1 z_j^0) = 1 \quad (0 \leqslant j \leqslant 2m),
\end{gathered}
\qquad (4)
$$

где $A=(a_{2m}, a_{2m-1}, \ldots, a_1)$; $B=(b_{2m}, b_{2m-1}, \ldots, b_1)$, ...; $Z=(z_{2m}, z_{2m-1}, \ldots, z_1)$ — суммы соответствующих значений частичных произведений. Количество уравнений в системе равно $2m(m-1)$.

Аналогично с помощью СЛУ (3) суммируем переменные Z и C в уравнении (1). В данном случае система содержит $2m$ уравнений.

Ниже опишем отношение Q, задаваемое уравнением (2). Тогда СЛУ имеет вид:

$$l_1^0c_1^0d_1^0 \vee l_1^1c_1^1d_1^1 = 1; \; (l_i^0c_i^0d_i^0 \vee l_i^1c_i^1d_i^1)(d_{i-1}^0x_{i-1}^0 \vee d_{i-1}^1x_{i-1}^1) \vee$$
$$\vee (l_i^0c_i^1 \vee l_i^1c_i^0)(d_{i-1}^0d_i^0x_{i-1}^1 \vee d_{i-1}^1d_i^1x_{i-1}^0) = 1; \; (l_j^0c_j^0d_j^0 \vee$$
$$\vee l_j^1c_j^1d_j^1)d_{j-1}^0 \vee (l_j^0c_j^1 \vee l_j^1c_j^0)d_{j-1}^1d_j^1 = 1; \; (2 \leqslant i \leqslant m+1,$$
$$m+2 \leqslant j \leqslant 2m), \tag{5}$$

где $D = (d_{2m}, d_{2m-1}, \ldots, d_1, d_0)$; $T = (t_{2m}, t_{2m-1}, \ldots, t_1, t_0)$; $S = (s_{2m}, s_{2m-1}, \ldots, s_1, s_0)$; $\ldots$; $A = (p_{2m}, p_{2m-1}, \ldots, p_1, p_0)$ — перенос из младшего разряда в старший. В общем случае при описании отношения Q СЛУ состоит из $2m$ уравнений.

Общее число уравнений при описании исходного отношения H для $m \geqslant 3$ составит $m(3m+2)$. Таким образом, располагая системами (3)—(5) и методами их решения, получаем возможность решать различные арифметические задачи, в которых фигурирует отношение H.

Рассмотрим пример. Пусть $m = 2$, $Y = 0111$. Найти значение X. В данном случае система (3) выразится четырьмя уравнениями:

$$x_1^0r_{1,1}^0 \vee x_1^1r_{1,1}^1 = 1; \; (x_2^0 \vee x_1^0)r_{1,2}^0 \vee x_2^1x_1^1r_{1,2}^1 = 1;$$
$$(x_1^0 \vee x_2^0)r_{2,2}^0 \vee x_1^1x_2^1r_{2,2}^1 = 1; \; x_2^0r_{2,3}^0 \vee x_2^1r_{2,3}^1 = 1.$$

Система (4) представится в виде двух систем по четыре уравнения в каждой, первая имеет вид:

$$(r_{1,i}^0r_{2,i}^0t_i^0 \vee r_{1,i}^1r_{2,i}^1t_i^1)(t_{i-1}^0z_i^0 \vee t_{i-1}^1z_i^1) \vee (r_{1,i}^0r_{2,i}^1 \vee$$
$$\vee r_{1,i}^1r_{2,i}^0)(t_{i-1}^0t_i^0z_i^1 \vee t_{i-1}^1t_i^1z_i^0) = 1 \quad (l = \overline{1,4}); \tag{7}$$

вторая:

$$(z_i^0c_i^0s_i^0 \vee z_i^1c_i^1s_i^1)(s_{i-1}^0y_i^0 \vee s_{i-1}^1y_i^1) \vee$$
$$\vee (z_i^0c_i^1 \vee z_i^1c_i^0)(s_{i-1}^0s_i^0y_i^1 \vee s_{i-1}^1s_i^1y_i^0) = 1 \quad (i = \overline{1,4}). \tag{8}$$

Система (5) примет следующий вид:

$$l_1^0c_1^0d_1^0 \vee l_1^1c_1^1d_1^1 = 1; \; (l_2^0c_2^0d_2^0 \vee l_2^1c_2^1d_2^1)(d_1^0x_1^0 \vee d_1^1x_1^1) \vee$$
$$\vee (l_2^0c_2^1 \vee l_2^1c_2^0)(d_1^0d_2^1x_1^0 \vee d_1^1d_2^1x_1^0) = 1; \; l_3^0c_3^0(d_2^0x_2^0 \vee d_2^1x_2^1) \vee$$
$$\vee (l_3^0c_3^1 \vee l_3^1c_3^0)d_2^0x_2^1 = 1. \tag{9}$$

Далее, упрощая левые части систем логических уравнений (6)—(9) по правилам алгебры предикатов, окончательно имеем: $x_1^0x_2^1r_{1,1}^0r_{1,2}^0r_{2,2}^0r_{2,3}^1z_1^0c_1^1d_1^1l_1^1z_3^1c_3^0t_2^0d_2^1l_3^0c_2^1z_2^0l_2^0 = 1$, откуда $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $z_1 = 0$; $z_2 = 0$; $z_3 = 1$; $c_1 = 1$; $c_2 = 1$; $c_3 = 0$; $l_1 = 1$; $l_2 = l_3 = l_4 = 0$, то есть $X \approx 10$.

Полученное значение X найдено с недостатком (с точностью до единицы), величина которого определяется значением $\sqrt{C}$.

Список литературы: 1. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Об алгебре конечных предикатов.— В кн.: АСУ и приборы автоматики. Харьков, 1979, вып. 50, с. 14—20. 2. *Мурашко А. Г., Четвериков Г. Г., Шабанова-Кушнаренко З. Ю.* Математическое описание арифметических отношений двоичных кодов.— В кн.: АСУ и приборы автоматики. Харьков, 1979, вып. 50, с. 23—32. 3. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Об уравнениях теории интеллекта.— В кн.: АСУ и приборы автоматики. Харьков, 1979, вып. 53, с. 52—56. 4. *Четвериков Г. Г., Шабанова-Кушнаренко З. Ю.* О математическом описании арифметических отношений троичных кодов.— В кн.: АСУ и приборы автоматики. Харьков, 1979, вып. 52, с. 47—51.

Поступила 8 июля 1978 года