

подпространства, в том числе и к его базисным векторам, что и доказывает необходимость выполнения условия теоремы. Теперь допустим, что вектор  $l$  ортогонален ко всем базисным векторам некоторого подпространства  $D \subset L$ , а следовательно, и к любой их линейной комбинации. Но так как каждый вектор подпространства  $D$  представляет собой линейную комбинацию его базисных векторов, то, следовательно, вектор  $l$  ортогонален ко всем векторам подпространства  $D$ . Отсюда вытекает, что вектор  $l$  ортогонален к подпространству  $D$ , что и доказывает достаточность условия теоремы. Теорема доказана.

**Список литературы.** 1. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 319 с. 2. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1975. 400 с. 3. Шилов Г.Е. Введение в теорию линейных пространств. М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит-ры, 1956. 304 с. 4. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978. 280 с. 5. Шабанов-Кушнаренко Ю.П. Неполные и полные логические пространства // Проблемы бионики, 1991. Вып. 46. С. 10-17. 6. Гвоздинская Н.А., Дударь З.В., Пославский С.А., Шабанов-Кушнаренко Ю.П. О логических пространствах // АСУ и приборы автоматизации, 1997. Вып.106. С. 21-30. 7. Гвоздинская Н.А., Дударь З.В., Пославский С.А., Шабанов-Кушнаренко Ю.П. О логических матрицах // Проблемы бионики, 1997. Вып.48. С. 12-22. 8. Джикарев М.Ю., Кольцов А.В., Шабанов-Кушнаренко Ю.П. Умножение и отрицание в алгебре идей // АСУ и приборы автоматизации, 1992. Вып. 98. С. 10-17. 9. Поваров Г.Н. О групповой инвариантности булевых функций // Применение логики в науке и технике. М.: Изд-во АН СССР, 1960. С. 263-340. 10. Воеводин В.В. Линейная алгебра. М.: Наука, 1980. 400 с.

Поступила в редколлегию 23.11.98

**Гвоздинская Наталья Анатольевна**, аспирантка кафедры ПО ЭВМ ХТУРЭ. Научные интересы: логическая алгебра. Адрес: Украина, 310093, Харьков, ул. Скорохода, 24, кв.79, тел. 72-19-76.

---

УДК 519.7

Н.А. ГВОЗДИНСКАЯ

**НЕКОТОРЫЕ ВИДЫ ЛИНЕЙНЫХ  
ЛОГИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ**

---

Линейный логический оператор  $A: L \rightarrow L$  назовем оператором умножения вектора на скаляр, если он каждый вектор  $l \in L$  переводит в вектор  $\lambda l \in L$ , где  $\lambda$  – произвольный элемент из поля логичес-

ких скаляров [5]. Для поля  $K=\{0, 1\}$  операторами умножения вектора на скаляр являются только единичный и нулевой операторы, которые переводят вектор  $l \in L$  в тот же вектор  $l \in L$  ( $l=1$ ) и в нулевой вектор ( $l=0$ ) соответственно. В случае, когда полем логических скаляров служит, например, множество одноместных предикатов, а векторным пространством – множество двухместных предикатов [3], ситуация усложняется. Возьмем  $\lambda=P_1=(0, 1)$ . Образами базисных векторов  $Q_6$  и  $Q_9$  будут векторы

$$\mathbf{A}Q_6=(0, 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = Q_2,$$

$$\mathbf{A}Q_9=(0, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Q_1,$$

а матрица оператора  $\mathbf{A}$  запишется в виде

$$A = \begin{pmatrix} P_1 & P_0 \\ P_0 & P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (0,1) & (0,0) \\ (0,0) & (0,1) \end{pmatrix}.$$

Квадратную логическую матрицу  $A$  назовем *скалярной* или *диагональной* [2, 4], если она имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & K & 0 \\ 0 & \lambda & K & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & K & \lambda \end{pmatrix},$$

т.е. ее элементы подчиняются соотношению

$$a_{ij} = \begin{cases} \lambda, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Если линейный логический оператор  $\mathbf{A}: L \rightarrow L$  является оператором умножения вектора на скаляр, то в булевых и предикатных логических пространствах ему соответствует скалярная логическая матрица.

Рассмотрим линейный логический оператор  $\mathbf{A}: L \rightarrow D$ . Пусть  $a_1, \dots, a_n$  – базис пространства  $L$ , а  $b_1, \dots, b_m$  – базис пространства  $D$ . В выбранных базисах оператору  $\mathbf{A}$  будет соответствовать некоторая логическая матрица  $A$ . Определим, как изменится эта матрица при переходе к новым базисам  $a'_1, \dots, a'_n$  и  $b'_1, \dots, b'_m$

пространств  $L$  и  $D$  соответственно. Обозначим матрицу оператора  $\mathbf{A}$  в новых базисах через  $A'$ , а координатное представление векторов  $l \in L$  и  $\mathbf{A}l = d \in D$  – через  $[l]'$  и  $[d]'$ . Тогда, если  $[d] = A[l]$ , то  $[d]' = A'[l]'$ . Матрицы перехода к новым базисам в пространствах  $L$  и  $D$  обозначим через  $F$  и  $G$  соответственно. Тогда [1, 3, 6]

$$[l] = F[l]'$$

$$[d] = G[d]'$$

Учитывая эти равенства и то, что  $[d] = A[l]$ , можно записать следующее:

$$[d]' = G^{-1}[d] = G^{-1}A[l] = G^{-1}AF[l]'$$

Обозначив через  $H$  матрицу обратного перехода к старому базису в пространстве  $D$ , т.е.  $H = G^{-1}$ , можно найти матрицу  $A'$ :

$$A' = HAF. \quad (1)$$

Две прямоугольные матрицы  $A$  и  $B$  одинаковой размерности  $m \times n$  назовем эквивалентными [6], если существуют две квадратные обратимые матрицы  $H_{m \times m}$  и  $F_{n \times n}$  такие, что

$$B = HAF. \quad (2)$$

Из выражения (2) вытекает, что соответствующие одному и тому же линейному логическому оператору  $A$  в различных базисах пространств  $L$  и  $D$  матрицы  $A$  и  $A'$  всегда эквивалентны. В рассматриваемых примерах в случае поля логических скаляров  $K = \{0, 1\}$  возьмем в качестве базисных векторов следующие:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a'_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, a'_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b'_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b'_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицами перехода от старых базисов к новым в этом случае будут

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Исходя из того, что  $G^{-1}=G^T$ , получаем, что матрица  $A'$  будет иметь вид

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Она будет соответствовать линейному логическому оператору  $\mathbf{A}: L \rightarrow D$  в новых базисах  $a'_1, \dots, a'_4$  и  $b'_1, \dots, b'_3$  пространств  $L$  и  $D$  соответственно.

Рассмотрим теперь оператор  $\mathbf{A}: L \rightarrow L$ . Пусть в старом базисе ему отвечает матрица  $A$ , в новом —  $A'$ . Координатное представление векторов  $l$  и  $Al=g \in L$  в новом базисе обозначим через  $[l]'$  и  $[g]'$ . Тогда в матричной форме это запишется как  $[g]=A[l]$  и  $[g]'=A'[l]'$ . Обозначим матрицу перехода от старого базиса к новому через  $T$ . Тогда  $[l]=T[l]'$  и  $[g]=T[g]'$ . Учитывая все это, можно записать следующее соотношение:

$$[g]'=T^{-1}[g]=T^{-1}A[l]=T^{-1}AT[l]',$$

откуда следует, что

$$A'=T^{-1}AT. \quad (3)$$

Две квадратные логические матрицы  $A$  и  $B$  назовем *подобными*, если они связаны следующим соотношением:

$$B=T^{-1}AT. \quad (4)$$

Из выражения (4) следует, что две матрицы, отвечающие одному и тому же оператору  $\mathbf{A}: L \rightarrow L$  в различных базисах, подобны друг другу. Следовательно, любому линейному логическому оператору  $\mathbf{A}: L \rightarrow L$  соответствует некоторое множество подобных матриц, отвечающих данному оператору в различных базисах. Для подобных матриц выполняется свойство *рефлексивности* (матрица  $A$  всегда подобна самой себе), *симметричности* (если  $A$  подобна  $B$ , то  $B$  подобна  $A$ ) и *транзитивности* (если  $A$  подобна  $B$ , а  $B$  подобна  $C$ , то  $A$  подобна  $C$ ).

Рассмотрим логический оператор  $\mathbf{A}: L \rightarrow D$ . Если для него выполняется свойство аддитивности, а также свойства

$$\mathbf{A}(l \wedge g) = \mathbf{A}l \wedge \mathbf{A}g, \quad (5)$$

$$\mathbf{A}(\bar{l}) = \overline{\mathbf{A}l}, \quad (6)$$



$$\begin{cases} \alpha_{11} \vee \dots \vee \alpha_{1n} = 1, \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_{m1} \vee \dots \vee \alpha_{mn} = 1, \end{cases} \quad (11)$$

т.е. дизъюнкция всех элементов каждой строки матрицы гомоморфного оператора  $\mathbf{A}: L \rightarrow D$  равна единице.

Достаточность. Обозначим координатный столбец вектора  $\mathbf{A}(Lg)$  через  $(\gamma_1, \dots, \gamma_m)^T$ , а координатный столбец вектора  $(\mathbf{A}L\mathbf{A}g)$  через  $(\rho_1, \dots, \rho_m)^T$ . Тогда для любого  $i=1, \dots, m$ , в силу (9),

$$\rho_i = (\alpha_{i1}\xi_1 \vee \dots \vee \alpha_{in}\xi_n) (\alpha_{i1}\eta_1 \vee \dots \vee \alpha_{in}\eta_n) = \alpha_{i1}\xi_1\eta_1 \vee \dots \vee \alpha_{in}\xi_n\eta_n = \gamma_i,$$

откуда следует выполнение свойства (5) для оператора  $\mathbf{A}$ .

Обозначим координатный столбец вектора  $\mathbf{A}\bar{l}$  через  $(\mu_1, \dots, \mu_m)^T$ , а координатный столбец вектора  $\overline{\mathbf{A}l}$  через  $(\delta_1, \dots, \delta_m)^T$ . Очевидно, что

$$\begin{cases} \mu_1 = \alpha_{11}\bar{\xi}_1 \vee \dots \vee \alpha_{1n}\bar{\xi}_n, \\ \dots\dots\dots \\ \mu_m = \alpha_{m1}\bar{\xi}_1 \vee \dots \vee \alpha_{mn}\bar{\xi}_n, \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \delta_1 = \overline{\alpha_{11}\xi_1 \vee \dots \vee \alpha_{1n}\xi_n}, \\ \dots\dots\dots \\ \delta_m = \overline{\alpha_{m1}\xi_1 \vee \dots \vee \alpha_{mn}\xi_n}. \end{cases} \quad (13)$$

Присвоим каждому разряду элементов скалярного поля логических пространств  $L$  и  $D$  некоторый индекс  $v=1, \dots, k^f$ , где  $f$  – арность предикатов, являющихся элементами поля скаляров, а  $k$  – количество символов в алфавите, над которым заданы эти предикаты. Тогда каждое равенство систем (12) и (13) распадается на  $k^f$  равенств:

$$\begin{cases} \mu_i^1 = \alpha_{i1}^1 \bar{\xi}_1^1 \vee \dots \vee \alpha_{in}^1 \bar{\xi}_n^1, \\ \dots\dots\dots \\ \mu_i^{k^f} = \alpha_{i1}^{k^f} \bar{\xi}_1^{k^f} \vee \dots \vee \alpha_{in}^{k^f} \bar{\xi}_n^{k^f}, \end{cases} \quad i=1, \dots, m, \quad (14)$$



Для того чтобы линейный логический оператор являлся гомоморфизмом, требования к нему можно ограничить только свойством (6), так как свойство аддитивности выполняется автоматически в силу того, что оператор является линейным, а из свойства аддитивности, свойства (6) и законов де Моргана вытекают следующие соотношения:

$$\mathbf{A}\bar{l} \wedge \mathbf{A}\bar{g} = \overline{\mathbf{A}l \wedge \mathbf{A}g} = \overline{\mathbf{A}l \vee \mathbf{A}g},$$

$$\overline{\mathbf{A}l \vee \mathbf{A}g} = \overline{\mathbf{A}(l \vee g)} = \mathbf{A}(\overline{l \vee g}),$$

$$\mathbf{A}(\overline{l \vee g}) = \mathbf{A}(\bar{l} \wedge \bar{g}),$$

откуда и следует свойство (5).

Оператор  $\mathbf{A}: L \rightarrow L$  назовем *изоморфным преобразованием*, или *изоморфизмом*, пространства  $L$ , если он является взаимно-однозначным гомоморфизмом. Например, оператор  $\mathbf{A}$ , которому соответствует матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} P_2 & P_1 \\ P_1 & P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1,0) & (0,1) \\ (0,1) & (1,0) \end{pmatrix},$$

является изоморфизмом. Взаимно-однозначный гомоморфизм  $\mathbf{A}: L \rightarrow W$ , где  $L$  и  $W$  имеют одинаковую размерность, назовем *изоморфизмом*  $L$  на  $W$ , если  $\mathbf{A}^{-1}: W \rightarrow L$  является гомоморфизмом  $W$  в  $L$  [9].

**Список литературы:** 1. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1975. 400 с. 2. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978. 280 с. 3. Гвоздинская Н.А., Дударь З.В., Пославский С.А., Шабанов-Кушнаренко Ю.П. О логических пространствах // АСУ и приборы автоматики. 1997. Вып. 106. С. 21-30. 4. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 320 с. 5. Шилов Г.Е. Введение в теорию линейных пространств. М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит-ры, 1956. 304 с. 6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. 548 с. 7. Сикорский Р. Булевы алгебры. М.: Мир, 1969. 375 с. 8. Расева Е., Сикорский Р. Математика метаматематики. М.: Наука, 1972. 592 с. 9. Мальцев А.И. Избранные труды. Т.2. Математическая логика и общая теория алгебраических систем. М.: Наука, 1976. 388 с.

Поступила в редколлегию 23.11.98

**Гвоздинская Наталья Анатольевна**, аспирантка кафедры ПО ЭВМ ХТУРЭ. Научные интересы: логическая алгебра. Адрес: Украина, 310093, Харьков, ул. Скорохода, 24, кв.79, тел. 72-19-76.