УДК519.3

ФОРМАЛИЗМ ДУБОВИЦКОГО-МИЛЮТИНА В ОБЩЕЙ СТРУКТУРЕ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ.I

РАДИЕВСКИЙ А.Е.

Анализируются работы Дубовицкого А.Я. и Милютина А.А., относящиеся к первому этапу (1963-1978 гг.) становления формализма Дубовицкого-Милютина.

1. Введение

Математической основой решения экстремальных задач является вариационное исчисление [1]. Большой вклад в развитие вариационного исчисления внесли И.Кеплер, П. Ферма, И.Ньютон, Г.Лейбниц, братья Бернулли, Эйлер, Ж.Пуанкаре и др. На первых этапах развития вариационного исчисления основное внимание уделялось анализу гладких функций и функционалов, заданных на всем пространстве или в ограниченных пределах гладкого многообразия. Условия экстремума записывались в виде уравнения Эйлера с множителями Лагранжа при наличии ограничений (класс "классических" задач). Потребности экономики вызвали появление специальных методов поиска экстремума гладких функций на замкнутых областях с кусочно-гладкой границей. Первые результаты здесь были получены в 1939г. Канторовичем Л.В. В настоящее время эта область математики называется математическим (нелинейным) программированием. Развитие техники поставило перед вариационным исчислением ряд новых задач – управление объектами, параметры которых изменяются в замкнутом множестве, имеющем края (класс "неклассических" задач). Широкий класс подобных задач был исследован в работах Понтрягина Л.С., Болтянского В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф., получивших необходимое условие экстремума в виде "принципа максимума Понтрягина" [2]. В конце 1962г. Дубовицкий А.Я. и Милютин А.А. получили необходимые условия экстремума в виде уравнения, записанного в терминах функционального анализа. Они показали, что класс "неклассических" задач может быть исследован методами, которые использовались при исследовании класса "классических" задач и которые приводят к уравнению Эйлера. Из этого условия удалось вывести как частные случаи все известные ранее необходимые условия экстремума. Метод исследования экстремальных задач, разработанный Дубовицким А.Я. и Милютиным А.А. (формализм Дубовицкого-Милютина), возник на основе изучения идей, заложенных в "принципе максимума Понтрягина" и теории математического (нелинейного) программирования. По своему подходу он является современным аналогом классического метода исследования функций на экстремум при наличии ограничений. Изменилось лишь пространство, на котором задана минимизируемая функция, а также метод учета ограничений: вместо техники погружения используется метод отделения выпуклых множеств.

2. Особенности формализма Дубовицкого-Милютина

Первые результаты Дубовицкого А.Я. и Милютина А.А. по необходимым условиям экстремума были изложены в работах [3-6]. Основным моментом в предложенной ими схеме является то обстоятельство, что определение необходимых условий экстремума сводится к определению условий непересечения некоторых множеств, заданных с помощью линейных форм – выпуклых конусов. Для эффективного применения условий экстремума в рассмотрение вводятся сопряженные конуса, на которых задаются линейные неотрицательные функционалы такие, что их сумма равна нулю. Последнее выражение названо уравнением Эйлера и является необходимым и достаточным условием непересечения выпуклых конусов.

3. Общая схема формализма Дубовицкого-Милютина

Пусть в полном нормированном пространстве W заданы множества $W_i, i \in [0, n]$, функционал $F(w)$, конечное число ограничений типа неравенство и равенство. Необходимо найти элемент $w^0 \in W_i$, такой что $F(w^0) = \min F(w) \quad \forall w \in W_i, i \in [0, n]$.

Первая вариация. В рассмотрение вводятся конус Ω_0 запрещенных вариаций, конуса $\Omega_i, i \in [1, n]$ допустимых вариаций по i-му ограничению типа неравенство и конус Ω допустимых вариаций по ограничению типа равенство.

Теорема [5]. *Пусть* $\Omega_i, i \in [0,n]$ *-открытые, выпуклые конусы с вершиной в начале координат и* Ω *–замкнутый выпуклый конус с вершиной в начале координат. Тогда для того чтобы пересечение всех перечисленных конусов было пусто, необходимо и достаточно, чтобы существовали линейные функционалы* $J_i \in [0,n], J$ *с такими свойствами:*

1) $$\sum_0^n J_i + J = 0\,; \qquad (1)$$

2) *не все функционалы равны нулю;*

3) $J_i(\Omega_i) \geq 0, i \in [0,n], J(\Omega) \geq 0$.

Равенство (1) называется уравнением Эйлера для первой вариации.

Вторая вариация. В рассмотрение вводится конус $\widetilde{\Omega}_0$ запрещенных вариаций, конуса $\widetilde{\Omega}_i, i \in [1,n]$ допустимых вариаций по i-му ограничению типа неравенство и конус $\widetilde{\Omega}$ допустимых вариаций по ограничению типа равенство.

Теорема [5]. *Пусть* $\widetilde{\Omega}_i, i \in [0,n]$ *-открытые, выпуклые конусы с вершиной в начале координат и* $\widetilde{\Omega}$ *- замкнутый выпуклый конус с вершиной в начале координат. Тогда для того чтобы пересечение всех перечисленных конусов было пусто, необходимо и достаточно, чтобы существовали линейные функционалы* $\widetilde{J}_i \in [0,n], \widetilde{J}$ *и постоянные* $\delta_i \in [0,n], \delta$ *с такими свойствами:*

1) $$\sum_0^n \widetilde{J}_i + \widetilde{J} = 0\,; \qquad (2)$$

2) $$\sum_0^n \delta_i + \delta = 0\,; \qquad (3)$$

3) *не все пары* $(\widetilde{J}, \delta) = 0$;

4) $\widetilde{J}_i(\widetilde{\Omega}_i) + \delta_i \geq 0, i \in [0,n], \widetilde{J}(\widetilde{\Omega}) + \delta \geq 0$.

Условия (2) и (3) называются уравнением Эйлера для второй вариации.

4. Развитие общей схемы формализма Дубовицкого-Милютина в работах авторов

Развитие формализма Дубовицкого-Милютина в работах авторов проходило по следующим основным направлениям.

Формализм Дубовицкого-Милютина и общие схемы получения необходимых условий экстремума. Общие схемы получения необходимых условий экстремума возникли в результате обобщения теоремы Куна-Таккера на бесконечномерные пространства и анализа принципа максимума Понтрягина Л.С. [7]. Условие Куна-Таккера не является условием стационарности, а в принципе максимума Понтрягина Л.С. этот случай допускается. Исследование “принципа максимума Понтрягина” Дубовицким А.Я. и Милютиным А.А. [3] привело к представлению о стационарности как об условии непересечения аппроксимаций некоторой системы множеств. Условие стационарности сформулировано как условие существования нетривиального решения уравнения Эйлера. Это позволило утверждать, что подобное представление имеет общий характер. Общие схемы получения необходимых условий экстремума, предлагаемые различными авторами (Б.Н. Пшеничный, Л. Нейштадт, Р.В. Гамкрелидзе), отличаются с этой точки зрения выбором пространства, в котором исследуется задача, и способом аппроксимации множеств.

Задачи понтрягинского типа. На основе идей, изложенных в [3,5], в [8,9] исследуются вопросы отделимости системы непустых выпуклых конусов в линейных пространствах, индуктивных системах линейных пространств [8] и линейных топологических пространствах [9]. Предметом вариационного исследования является следующая задача.

Задача 1. Найти минимум функционала

$$J(\mu) = \iint \Phi(u,t)\mu(du,t)\, dt$$

при наличии ограничений

$$\int \Psi(u,t)\mu(du,t) = 0\,;$$

$$\int \mu(du,t) = 1\,;$$

$$\mu(du,t) \geq 0$$

и выполнении следующих условий:

$\varphi_\mu(t) = \int \Phi(u,t)\mu(du,t)$ – абсолютно интегрируемая функция; $\Psi_\mu(t) = \int \Psi(u,t)\mu(du,t)$ – ограниченная измеримая функция.

Доказывается существование нетривиального решения уравнения Эйлера. Проанализированы некоторые частные случаи задачи 1.

Необходимые условия слабого экстремума в задачах оптимального управления со смешанными ограничениями. Названные условия исследуются в [10-15]. Они имеют форму принципа максимума, выполнение которого является необходимым и достаточным условием стационарности в классе вариаций малых в метрике пространства L_∞. Предметом вариационного исследования в [10] является следующая задача.

Задача 2. Найти минимум функционала

$$J(x,u) = \int_0^t F(x,u,t)\, dt$$

при наличии ограничений

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u,t), x(0) = x_0,\ x(t) = x_1\,;$$

$$g_i(x,u) \leq 0, i \in [1,m]\,,$$

где $f(x,u,t)$, $g_i(x,u)$, и $F(x,u,t)$ равномерно дифференцируемые по (x,u) функции, измеримые по t, а их производные по (x,u) непрерывны в каждой ограниченной области пространства (x,u,t).

Показано, что в задаче 2 поведение управления может быть охарактеризовано только через его значения на множествах положительной меры. С этим обстоятельством связан и характер функционалов в пространствах существенно ограниченных измеримых функций. Наряду с абсолютно непрерывными функционалами существуют линейные функционалы (сингулярные функционалы), которые не могут быть локализованы на каком-нибудь множестве положительной меры. Получено уравнение Эйлера, являющееся необходимым условием оптимальности и необходимым и достаточным условием стационарности. Это уравнение приведено к форме принципа максимума. Исследуются различные частные случаи задачи 2. Задача со смешанными ограничениями типа равенство исследуется в [11]. При помощи понятия “множество фазовых точек траектории” с единой точки зрения исследуются как чисто фазовые, так и смешанные ограничения. Полное решение вопроса о необходимых условиях слабого экстремума в общей задаче оптимального управления, содержащей смешанные ограничения типа равенство и неравенство на фазовые координаты и управление, приведено в [12]. Предметом вариационного исследования является следующая задача.

Задача 3. Найти минимум функционала

$$J(x,u) = \int_0^t F(x,u)\,dt$$

при наличии ограничений

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u,t)\;, x(0) = x_0,\; x(t) = x_1\,;$$

$$g_j(x,u) = 0, j \le r\,; (x,u) \in \overline{Q}_i, Q_i \in E^{n+k}, x \in E^n,$$

$u \in E^r$, $i \le M, r < k, M -$ любое, $k -$ размерность управления; функции $g_j(x,u)$, $f(x,u)$, $F(x,u,t)$ -непрерывно дифференцируемы по своим аргументам на некотором открытом множестве; Q_i – локально выпуклые множества.

Отмечается, что методика, развитая в [10], не может быть использована при исследовании задачи 3. Построена аппроксимативная теория решений уравнения Эйлера в линейных топологических пространствах, сопряженных к локально-выпуклым топологическим и нормированным пространствам, что позволяет проводить вариационный анализ задачи 3, ограничиваясь рассмотрением функционалов из пространства L_1. Рассмотрены два варианта вывода локального принципа максимума, основанные на анализе аппроксимативной формы решения уравнения Эйлера и непосредственном преобразовании заданного нетривиального решения уравнения Эйлера при помощи аппроксимативной теории к эквивалентной ему форме принципа максимума. Линейные системы с общими выпуклыми смешанными ограничениями исследуются в [13-15]. В [13,14] содержится усиление результатов, полученных в [16]. Обобщая принцип максимума, полученный в [11,12], на случай стационарных последовательностей показано, что в [16] найдены не все принципы максимума, а только регулярные. Кроме того, показано, что для теории принципа максимума в постановке работы [16] требование существования оптимальной траектории не является существенным. Достаточно предположения о существовании конечной нижней грани оптимизируемого функционала на допустимых траекториях. В [15] находится принцип максимума значения $\inf J_0(p)$ функционала $J(p)$, который является эквивалентом экстремальности $J_0(p)\quad p(x(t_0),t_0,x(t_1),t_1)$.

*Необходимые условия сильного экстремума в задачах оптимального управления со смешанными ограничениями***.** Отмечается, что наличие большого числа не связанных друг с другом постановок задач оптимального управления, разнообразие форм их записи, а также интересы приложений сделали актуальным вопрос о нахождении возможно более общей формы записи задачи оптимального управления. В [17-20] исследуются необходимые условия сильного экстремума (интегральный принцип максимума) в следующей вариационной задаче.

Задача 4. В классе ограниченных измеримых функций необходимо найти $\min J(p);\quad p(x(t_0),t_0,x(t_1),t_1)$

если $\dfrac{dx}{dt} = f(x,u,t),\, K(p) = 0;\, K : G \to E^m;$

$$f : G \to E^n, x \in E^n;\; u = (u_1,u_2),$$

$$u_i \in E^{k_i},\;\; i \in [1,2],\, k = k_1 + k_2;$$

$$g(x,u,t) = 0,\, g : G \to E^r;$$

$$(x,u,t) \in \overline{Q}_i,\, i \le M,\, p \in \overline{Q},$$

$u_2 \in R, \quad Q_i \in E^{n+k+1}, Q \in E^{2n+2},\; R \in E^{k_2}$; G - открытое множество пространства (x,u,t,p), Q_i, Q - открытые множества, R – произвольное множество пространства E^{k_2}; $M \ge 0$ -произвольное натуральное число; функции $f(x,u,t), K(p), g(x,u,t)$ и их частные производные по (x,u,t,p) непрерывны по своим аргументам; множества Q_i, Q – локально-выпуклые по (x,u,t,p); $J(p)$ – локально-выпуклая функция p.

Показано, что задача 4 является канонической для широкого, замкнутого относительно некоторых способов введения параметров, класса задач. Указаны простые стандартные приемы сведения к ней широкого класса задач оптимального управления, содержащего как все решенные другими авторами задачи, так и много нерешенных и актуальных по своим приложениям задач. Показано, что уже в случае задачи 4 с регулярными смешанными ограничениями выписывание уравнения Эйлера перестает быть решающим этапом вариационного исследования. Основным моментом становится расшифровка решения уравнения Эйлера (переход от уравнения Эйлера к эквивалентной форме локального принципа максимума). В качестве необходимого условия сильного экстремума траектории $(x(t_0),t_0,x(t_1),t_1)$ принимается ее стационарность относительно всех ν-вариаций. Под интегральным принципом максимума понимается условие, эквивалентное локальной стационарности всех присоединенных траекторий присоединенной ν-задачи. Для расшифровки уравнения Эйлера разработан теоретико-функциональный аппарат [17], основным элементом которого являются: аппроксимативная теория уравнения Эйлера в пространствах, сопряженных к локально-выпуклым, и теория квазифазовых точек. Использование этого аппарата позволило довести расшифровку уравнения Эйлера до эквивалентной формы локального принципа максимума. При рассмотрении вопроса преобразования локального принципа максимума к интегральному исследуются два случая: регулярные и нерегулярные задачи. В регулярных задачах присоединенные траектории образуют сеть, переходя к пределу по которой можно получить интегральный принцип максимума. Для нерегулярных задач структура множества присоединенных траекторий сложна и не допускает однозначного расчленения присоединенных траекторий на сети.

Теория принципа максимума. Итогом исследования по теории принципа максимума, которое проводилось Дубовицким А.Я. и Милютиным А.А. в 1963-1978 годах, являются их работы [21,22]. Отмечается, что в теории оптимального управления встречаются четыре класса вариаций: локальные, игольчатые, скольжения и ν-вариации. Первым этапом вариационного исследования является выбор класса вариаций и выписывание отвечающих ему присоединенных задач и присоединенных траекторий. Далее возникает вопрос о нахождении эквивалента локальной стационарности присоединенных траекторий в терминах, аналогичных принципу максимума. Ответ на этот вопрос не тривиален. Лишь в наиболее простых случаях он сводится к существованию принципа максимума. В общем случае ответ формулируется с помощью целого набора независимых между собой принципов максимума. Главная трудность связана с необходимостью эквивалентного описания образов некоторых множеств при отображении пространства L'_∞ в C. Математический аппарат, который используется для решения названной проблемы, базируется на аппроксимативной (трехэтажной) теореме (дополнение к теореме о существовании системы непустых выпуклых множеств [3]), понятии замыкания по мере и теореме о сублинейных функционалах [21]. В [21,22] предметом вариационного исследования являются две задачи оптимального управления: с гладкой и непрерывной зависимостью от времени.

Задача 5 (гладкая зависимость от времени). В классе всех измеримых функций $\left(x(t), u(t), t_0, t_1\right)$ необходимо найти $\min J(p),\ p=(x(t_0), x(t_1) t_0, t_1)$, если $\dfrac{dx}{dt}=f(x,u,t),\ K(p)=0, \varphi(p)\le 0$, $g(x,u,t)=0$, $\Phi(x,u,t)\le 0$, функции $K(p), f(x,u,t), g(x,u,t)$ непрерывны вместе со своими производными по переменным (x,u,t,p); функции $J(p), \varphi(p), \Phi(x,u,t)$ – локально-выпуклые по (x,u,t,p); размерности вектор-функций $\Phi=\{\Phi_i\}, \varphi=\{\varphi_i\}$ – произвольные числа, множество $R\subset E^{k_2}$ – произвольное.

Показано, что общность приведенных предположений такова, что задача 5 является канонической для целого класса сводящихся к ней задач оптимального управления. Вариационное исследование задачи 5 проводится на основе ν-вариаций. Используя Гамильтонов формализм, получили условия ν-стационарности, при выполнении которых в задаче 5 выполняются необходимые условия экстремума.

Задача 6 (непрерывная зависимость от времени на фиксированном временном отрезке).

Найти min $J(p),\ p=(x(t_0), x(t_1))$, если

$$\frac{dx}{dt}=f(x,u,t), K(p)=0, \varphi(p)\le 0;\ \ g(x,u,t)=0;$$

$$\Phi(x,u,t)\le 0;\ u=(u_1,u_2), u_2\in R(t), x\in R^n,$$

$$x\in R^n, u_{1,2}\in R^{k_{1,2}}, k_1+k_2=k.$$

Предполагается, что функции $J(p), \varphi(p), \Phi(x,u,t)$ - локально-выпуклые по (x,u,t), размерности функций $\varphi(p), \Phi(x,u,t)$ - произвольные; функции $K(p), f(x,u,t), g(x,u,t)$ непрерывны вместе со своими производными по переменным (x,u,t),

Вариационное исследование задачи 6 проводится на основе вариаций скольжения. Используя Гамильтонов формализм, получили условия локальной стационарности, при выполнении которых в задаче 6 выполняются необходимые условия экстремума траектории.

Задачи дискретной оптимизации. Необходимые условия экстремума в задаче дискретной оптимизации исследуются в [23,24]. Предметом вариационного исследования является следующая задача.

Задача 7. Найти $\min J(x_0,x_n)$, если $K(x_0,x_n)=0$,

$$\varphi(x_0,x_n)\le 0;\ x_{i+1}=f_i(x_i,u_i), \Phi_i(x_i,u_i)\le 0,$$

$$g_i(x_i,u_i)=0,\ \varphi(x_i)=0, u_i=(u_i', u_i'');\ \ u_i''\in R_i,$$

$$i\in[0,n-1],$$

где $x_i\in E^{n_i}, u_i', u_i''\in E^{k_i}$, $k_i=k_i'+k_i''$, вектор-функции $\varphi(x)_i, f(x_i,u_i), \Phi(x_i,u_i)_i, g(x_i,u_i)$ и множество R_i заданы для $i\in[0,n-1]$.

Вариационный анализ проводится методом присоединенных задач [18]. При локальном исследовании экстремали в каждой из присоединенных задач используется аппарат нетривиальных решений уравнения Эйлера [8]. Необходимые условия имеют вид целого набора независимых между собой дискретных принципов максимума, каждый из которых эквивалентен стационарности экстремали относительно некоторого частного множества значений управлений и распространен на это множество. Для получения дискретного принципа максимума множество присоединенных задач разбивается на сети, вдоль которых свойство локальной стационарности исследуемой экстремали оказывается наследственным. Каждой из сетей отвечает свой дискретный принцип максимума, эквивалентный стационарности экстремали относительно всех присоединенных задач этой сети. Такой принцип максимума определяется посредством трансляции нетривиальных решений уравнения Эйлера присоединенных задач сети. Определяется класс задач дискретной оптимизации, для которых необходимые условия экстремума эквивалентны выполнению одного принципа максимума. Отмечается, что все ранее исследованные в литературе задачи дискретной оптимизации содержатся в этом классе и, в частности, при

$$J(x_0, x_n) = \sum_i f_i^0(x_i, u_i) \quad ,$$

где $f_i^0(x_i, u_i)$ – локально-выпуклые функции.

5. Заключение

Исследованы работы Дубовицкого А.Я. и Милютина А.А. по первому этапу (1963-1978 гг.) их деятельности по теории задач оптимального управления. Объектом исследования является класс “неклассических” задач оптимального управления (задачи с раздельными и смешанными ограничениями на фазовые координаты и управление). Проведенное исследование позволило получить *следующие новые результаты,* имеющие *научное и прикладное значение. Научная значимость результатов исследования* состоит в акцентировании того факта, что созданный Дубовицким А.Я. и Милютиным А.А. математический аппарат (формализм Дубовицкого-Милютина) позволяет “неклассические” задачи оптимального управления исследовать методами, которые применялись при исследовании “классических” задач и которые приводят к уравнению Эйлера. *Практическая значимость результатов* исследования определяется тем, что единообразный подход (введение понятия “каноническая задача оптимального управления”) к исследованию различных классов задач оптимального управления позволяет унифицировать процедуру разработки математического обеспечения при проектирования систем автоматического управления.

Литература: 1. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Наука,1979. 432 с. **2.** *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: ФМГ,1961. 391 с. **3.** *Дубовицкий А.Я., Милютин А.А.* Задачи на экстремум при наличии ограничений // Докл. АН СССР. 1963. 149, N4. С.759-762. **4.** *Дубовицкий А.Я., Милютин А.А.* Вторые вариации в задачах на экстремум при наличии ограничений // Докл. АН СССР. 1965. 160, N1. С.18-21. **5.** *Дубовицкий А.Я., Милютин А.А.* Задачи на экстремум при наличии ограничений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1965. 5, N3. С.395-453. **6.** *Милютин А.А.* Задачи на экстремум при наличии. Автореф. дисс. на соискание ученой степени д-ра физ.-мат. наук. М.,1966. 11с. **7**. *Милютин А.А.* Общая схема получения необходимых условий экстремума и задачи оптимального управления // Успехи математических наук . 1970. 25, N5. С.110-116. **8.** *Дубовицкий А.Я., Милютин А.А.* Трансляция уравнения Эйлера // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1969. 9, N6. С.1263-1284. **9.** *Дубовицкий А.Я.* Отделимость и трансляция уравнения Эйлера в линейных топологических пространствах // Изв. АН СССР. Серия математическая. 1978. 42, N1. С.200-211. **10.** *Дубовицкий А.Я., Милютин А.А.* Необходимые условия слабого экстремума в задаче оптимального управления со смешанными ограничениями типа неравенств // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1968. 8, N4. С.725-779. **11.** *Дубовицкий А.Я., Милютин А.А.* Принцип максимума в классе вариаций, малых по абсолютной величине для задач со смешанными ограничениями типа равенств и неравенств // Докл. АН СССР. 1969. 189, N6. С.1177-1180.**12.** *Дубовицкий А.Я., Милютин А.А.* Необходимые условия слабого экстремума в общей задаче оптимального управления. М.: Наука,1971. 112с. **13**. *Дубовицкий А.Я., Милютин А.А.* Необходимые условия экстремума в некоторых линейных задачах со смешанными ограничениями. Черноголовка, 1976. 28с. (Препринт АН СССР. Институт химической физики). **14**. *Дубовицкий А.Я., Милютин А.А.* Необходимые условия экстремума в некоторых линейных задачах со смешанными ограничениями // Вероятностные процессы и управление. М.: Наука, 1978. С.42 -74.**15**. *Дубовицкий А.Я., Милютин А.А.* Принцип максимума в линейных задачах с выпуклыми смешанными ограничениями // Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendugen Z. Anal. und. Anwend. 1985. 4,N2. С.133-191.**16.** *Тер-Крикоров А.М.* Некоторые линейные задачи оптимального управления с фазовыми ограничениями// Журнал вычислительной математики и математической физики. 1975. 15, N1. С.55-66.**17.** *Дубовицкий А.Я.* Теоретико-функциональный аппарат общей задачи оптимального управления. Черноголовка, 1975. 48с. (Препринт АН СССР. Институт химической физики). **18.** *Дубовицкий А.Я.* Интегральный принцип максимума в общей задаче оптимального управления. Автореф. дисс. на соискание ученой степени д-ра физ.-мат. наук. Черноголовка,

1975. 38с. **19.** *Дубовицкий А.Я.* Интегральный принцип максимума в общей задаче оптимального управления. М. : Изд-во института химической физики АН СССР, 1974. 151с. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 10.10.74, N2639 - 74 ДЕП.).**20.** *Дубовицкий А.Я.* Интегральный принцип максимума. Черноголовка, 1976-46с. (Препринт АН СССР. Институт химической физики). **21.** *Дубовицкий А.Я., Милютин А.А.* Теория принципа максимума. Черноголовка, 1979. 35с. (Препринт АН СССР. Институт химической физики). **22.** *Дубовицкий А.Я., Милютин А.А.* Теория принципа максимума // Методы теории экстремальных задач в экономике. М.:Наука,1981.С.6-46. **23**. *Дубовицкий А.Я.* Дискретный принцип максимума . Черноголовка,1978. 26с. (Препринт. АН СССР. Институт химической физики). **24.** *Дубовицкий А.Я.* Дискретный принцип максимума // Автоматика и телемеханика. 1978. N10. С.56-71.

Поступила в редколлегию 04.09.2009

Рецензент: д-р техн.наук, проф. Дуэль М.А.

Радиевский Анатолий Евгеньевич, заведующий лабораторией ГП “Харьковский НИИ комплексной автоматизации” (ХИКА) Минтопэнерго Украины. Научные интересы: математическая теория экстремальных задач, задачи динамического синтеза, динамические задачи многокритериальной оптимизации. Адрес: Украина, 61003, Харьков, пер. Кузнечный,2, тел. 731-93-64, 80506512648.