УДК 519.7

М.Ф. Бондаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко

ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

МОДЕЛИ КОМПАРАТОРНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ В ВИДЕ СЕМЕЙСТВ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ И СВЕРТОЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Рассмотрены интегральные модели некоторых функций цветового зрения человека в виде семейств интегральных трехпараметрических и сверточных операторов, применяемые для моделирования явления иррадиации зрения. Сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия, определяющие вид соответствующих операторов.

КОМПАРАТОРНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ, МЕТОД СРАВНЕНИЯ, АЛГЕБРА КОНЕЧНЫХ ПРЕДИКАТОВ, ПРЕДИКАТ

Введение

Настоящая статья является продолжением работ [1-5], в которых развивается метод компараторной идентификации функций человеческого зрения в виде линейных предикатов. Предложены математические средства, эффективные при моделировании психофизических процессов. Введены понятия линейного предиката и линейного n-мерного предиката; доказаны необходимые и достаточные условия линейности предиката для некоторых практически важных областей определения линейного оператора. Рассмотрены условия линейности предиката для конечных или счетных систем. Введены три варианта теории цвета, предназначенные для локального, глобального и полного исследования механизма формирования цвета. Для каждой из трех теорий дано математическое описание физических стимулов, вызывающих ощущение цвета.

В настоящей работе продолжается рассмотрение моделей цветового зрения человека. Предложены интегральные модели некоторых его функций. Сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия, определяющие вид соответствующих операторов.

1. Трехпараметрические семейства

Обозначим при произвольном $t \in (-\infty, \infty)$ через $L_t^2(R^2)$ пространство всех измеримых на $(-\infty, t) \times R^2$ функций, удовлетворяющих условию

$$\int_{-\infty}^{t} \iint e^{\tau} e^{-(u^2+v^2)} x^2(\tau, p, q) d\tau du dv < \infty, \qquad (1)$$

через $K_t(R^2)$ – положительный конус в этом пространстве. Рассмотрим семейство предикатов $\Phi_{t,z}(x, y)$, ($t \in R^1, z \in R^2$ – параметры), каждый из которых при соответствующем t определен на $K_t(R^2) \times K_t(R^2)$ и удовлетворяет условиям *а* – *в* из п. 4, [1]. Целью настоящего параграфа является нахождение условий, при которых для всех $t \in R^1$, $z \in R^2$ и $x, y \in K_t(R^2)$ имеет место равенство

$$\Phi_{t,z}(x, y) =$$
$$= D\left(\int_{-\infty}^{t} \iint Q(t-\tau, \xi-u, \eta-v) x(\tau, u, v) d\tau du dv,\right.$$
$$\left.\int_{-\infty}^{t} \iint Q(t-\tau, \xi-u, \eta-v) y(\tau, u, v) d\tau du dv\right), \qquad (2)$$

где D – предикат равенства, $z = (\xi, \eta) \in R^2$, $Q(\tau, u, v)$ – почти всюду неотрицательная функция на $[0, \infty) \times R^2$.

Определим, как и ранее, для любой функции $x \in K_t(R^2)$ и любых $\rho \in R^1$, $\zeta = (\xi, \eta) \in R^2$ функцию $\tilde{x}_{\rho,\zeta}$, являющуюся сдвигом функции x на вектор (ρ, ξ, η):

$$\tilde{x}_{\rho,\zeta}(\tau, u, v) = x(\tau-\rho, u-\xi, v-\eta). \qquad (3)$$

Теорема 1. *Для того чтобы для семейства предикатов $\Phi_{t,z}$ нашлась почти всюду неотрицательная функция $Q(\tau, u, v)$, удовлетворяющая при любых $\xi, \eta \in R^1$ условиям*

$$\int_{0}^{\infty} \iint e^{\tau} e^{-(u-\xi)^2+(v-\eta)^2} Q^2(\tau, u, v) d\tau du dv < \infty,$$
$$\int_{0}^{\infty} \iint Q(\tau, u, v) d\tau du dv = 1 \qquad (4)$$

и такая, что имеет место равенство (2), необходимо и достаточно, чтобы это семейство удовлетворяло следующим условиям:

г) для любых $t \in R^1$, $z \in R^2$ и $x, x', y, y' \in K_t(R^2)$ из равенств

$$\Phi_{t,z}(x, x') = 1, \quad \Phi_{t,z}(y, y') = 1$$

следует, что

$$\Phi_{t,z}(x+y, x'+y') = 1;$$

д) для любых $t \in R^1$, $z \in R^2$ и $x \in K_t(R^2)$ существует единственное неотрицательное число $[fx](t, z)$ такое, что

$$\Phi_{t,z}(x, [fx](t,z)) = 1;$$

е) величина $[fx](t, z)$ как функция от x при любых фиксированных $t \in R^1$, $z \in R^2$ непрерывна в метрике $L_t^2(R^2)$;

ж) для любых $t \in R^1$, $z \in R^2$, $x, y \in K_t, \rho \in R^1, \zeta \in R^2$ *из равенства*

$$\Phi_{t,z}(x, y) = 1$$

вытекает равенство

$$\Phi_{t+\rho,\, z+\zeta}(\tilde{x}_\zeta, \tilde{y}_\zeta) = 1.$$

Доказательство этого утверждения может быть проведено по аналогии с доказательством теоремы 1 (см. п. 1, [3]).

Полученный результат может быть применен к описанию инерции и иррадиации зрения в рамках единой математической модели. Пусть наблюдателю предъявляется зрительная картина с различными яркостями в разных точках пространства, причем яркости изменяются во времени произвольным образом. Различие в спектральных составах излучения в различных точках и в различные моменты времени здесь игнорируется. Пусть $x(\tau, u, v)$ — яркость излучения в точке зрительной картины с пространственными координатами (u, v) в момент τ. Пусть t — какой-либо фиксированный момент времени; $z = (\xi, \eta)$ — фиксированная точка зрительной картины. Предполагается, что для любой изменяющейся во времени зрительной картины $x(\tau, u, v)$, $-\infty < \tau \le t$, $-\infty < u, v < \infty$, существует единственная постоянная во времени и однородная в пространстве картина, уравнивающаяся наблюдателем с исходной в момент t в точке $z = (\xi, \eta)$. Постоянную яркость этой картины будем обозначать $[fx](t, z)$. Величину $[fx](t, z)$ будем называть эффективной яркостью. Очевидно, это понятие обобщает одноименные понятия в случае изменения зрительной картины только во времени или только в пространстве.

Предикат $\Phi_{t,z}(x, y)$ является формальной записью уравнивания зрительных картин:

$$\Phi_{t,z}(x, y) = 1$$

тогда и только тогда, когда картины $x(\tau, u, v)$ и $y(\tau, u, v)$ вызывают одинаковые реакции зрительной системы в момент времени t в точке z.

Условия *г — ж* интерпретируются в общем случае так же, как и в частных случаях, изучавшихся в [1].

Основным с точки зрения экспериментатора, как и ранее, является условие *г* аддитивности. Об экспериментах, подтверждающих выполнимость этого условия в частных случаях, см. в п. 2 и 3 [5]. Что касается экспериментальной проверки этого условия в общем случае, то, по-видимому, здесь не существует каких-либо экспериментальных данных.

Установим теперь, при каких условиях на семейство предикатов $\Phi_{t,z}(x, y)$ формула (2) может быть переписана в виде

$$\Phi_{t,z}(x,y) = D\Big(\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} T(t-\tau, (\xi-u)^2, (\eta-v)^2)\, x(\tau, u, v)\, d\tau du dv,\ \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} T(t-\tau, (\xi-u)^2, (\eta-v)^2)\, y(\tau, u, v)\, d\tau du dv\Big), \quad (5)$$

где D — предикат равенства, $t \in R^1$, $z = (\xi, \eta) \in R^2$, $T(\tau, R)$ — почти всюду неотрицательная функция.

Положим для произвольной функции $x(\tau, u, v)$ и произвольного $\theta \in [0, 2\pi)$

$$\breve{x}_\theta(\tau, u, v) = x(\tau,\ u\cos\theta + v\sin\theta,\ -u\sin\theta + v\cos\theta).$$

Теорема 2. *Для того чтобы для семейства предикатов* $\Phi_{t,z}$ *нашлась функция* T, *удовлетворяющая при всех* $\xi, \eta \in R^1$ *условиям*

$$\int_0^\infty \iint e^\tau e^{(u-\xi)^2+(v-\eta)^2} T^2(\tau, u^2+v^2)\, d\tau du dv < \infty,$$

$$\int_0^\infty T(\tau, r)\, d\tau dr = \frac{1}{\pi}$$

и такая, что имеет место равенство (5), необходимо и достаточно, чтобы семейство предикатов удовлетворяло условиям г — ж теоремы 1 и условию

з) для любых $x, y \in K_0$ *и любого* $\theta \in [0, 2\pi)$ *из равенства*

$$\Phi_{0,0}(x, y) = 1$$

вытекает равенство

$$\Phi_{0,0}(\breve{x}_\theta, \breve{y}_\theta) = 1\ .$$

Теорема 2 может быть выведена из теоремы 1 аналогично тому, как теорема 4 (см. п. 2, [4]) была выведена из теоремы 3 (см. п. 2 из [3]). Мы опустим этот вывод.

Физический смысл условия *з* состоит в следующем. Если наблюдатель уравнивает две зрительных картины в один и тот же момент времени в той же точке, то факт уравнивания сохраняется при предъявлении наблюдателю тех же картин, но повернутых на один и тот же угол.

Пусть t — произвольное число,

$$\Omega_t = \{(\lambda, \tau, p, q) \mid \lambda \in [0,1], \tau \in (-\infty, t], p, q \in (-\infty, \infty)\}$$

$L^2(\Omega_t)$ — пространство измеримых на Ω_t функций, удовлетворяющих условию

$$\int_0^1 \int_{-\infty}^{t} \iint e^\tau e^{-(p^2+q^2)} x^2(\lambda, \tau, p, q)\, d\lambda d\tau dp dq < \infty, \quad (6)$$

$K(\Omega_t)$ — положительный конус в этом пространстве. Рассмотрим семейство предикатов $\Phi_{t,z}$ $(t \in R^1, z \in R^2)$, каждый из которых определен при соответствующем t на $K(\Omega_t) \times K(\Omega_t)$ и удовлетворяет условиям *а — в* (см. п. 1 из [4]). Ниже устанавливаются условия, гарантирующие существование n линейно независимых функций $g_i \in L^2[0,1]$ почти всюду неотрицательной функции $Q(\tau, u, v)$ таких, что при всех $t \in R^1$, $z = (\xi, \eta) \in R^2$ и всех $x, y \in K(\Omega_t)$ равенство

$$\Phi_{t,z}(x, y) = 1 \quad (7)$$

эквивалентно системе равенств

$$\alpha_i^{(t,z)}(x) = \alpha_i^{(t,z)}(y), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad (8)$$

где

$$\alpha_i^{(t,z)}(x) = \int_0^1 \int_{-\infty}^{t} \iint g_i(\lambda) Q(t-\tau, \xi-p, \eta-q) \times x(\lambda, \tau, p, q)\, d\lambda d\tau dp dq. \quad (9)$$

Рассмотрим вначале частный случай, заключающийся в том, что приведенные функции $x(\lambda, \tau, u, v)$ зависят только от λ. Такие функции будем обозначать символами u и v. Для этих функций сформулированный выше вопрос состоит в следующем. При каких условиях можно гарантировать существование почти всюду ограниченных неотрицательных функций $g_i(\lambda)$ таких, что при всех $t \in R^1$, всех $z \in R^2$ и всех u, v из положительного конуса K пространства $L^2[0,1]$ равенство

$$\Phi_{t,z}(u,v) = 1 \tag{10}$$

эквивалентно системе равенств

$$\alpha_i(u) = \alpha_i(v), \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{11}$$

где

$$\alpha_i(u) = \int_0^1 g_i(\lambda) u(\lambda) d\lambda, \quad i = 1, 2, ..., n? \tag{12}$$

Решение этого вопроса дается теоремой 4 (см. п. 2.4). Будем, как и в п. 1, [2], именовать совокупность условий этой теоремы условиями A. Соответственно через Φ будем обозначать предикат на $K \times K$ такой, что $\Phi(u, v) = 1$, если $\Phi_{t,z}(u, v) = 1$ при каких-либо (а, следовательно, в силу условий A, и при любых) $t \in R^1$, $z \in R^2$.

Кроме того, выделим частный случай функций вида

$$x(\lambda, \tau, p, q) = \beta(\tau, p, q) u(\lambda), \tag{13}$$

где $\beta \in K_t(R^2)$, $u \in K$. Для этого случая сформулированный выше вопрос состоит в следующем. При каких условиях для любой функции $u \in K$ существует функция $\theta_u(\tau, p, q)$, удовлетворяющая условию (60) (см. [1]) и такая, что для любой функции $\beta(\tau, p, q)$ равенство

$$\Phi_{t,z}(\beta u, cu) = 1 \tag{14}$$

выполняется тогда и только тогда, когда константа $c = f_u^{(t,z)}(\beta)$, где

$$f_u^{(t,z)}(\beta) = \\ = \int_{-\infty}^{t} \iint Q_u(t - \tau, \xi - p, \eta - q) \beta(\tau, p, q) d\tau dp dq? \tag{15}$$

Этот вопрос был решен теоремой 1. Условия этой теоремы ниже именуются условиями C.

Теорема 3. *Для того чтобы для семейства предикатов $\Phi_{t,z}$ нашлась линейно независимая система функций $\{q_i\}_{i=1}^n \subset L^2[0,1]$ и почти всюду неотрицательная на $[0,\infty) \times R^2$ функция Q, удовлетворяющая условиям г и такая, что равенства (7) и (8) эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы это семейство удовлетворяло условиям A, C и*

г) для любых $t \in R^1$, $z \in R^2$ и $x, x', y, y' \in K(\Omega_t)$ из равенств

$$\Phi_{t,z}(x, x') = 1, \quad \Phi_{t,z}(y, y') = 1$$

следует, что

$$\Phi_{t,z}(x + y, x' + y') = 1.$$

д) для любых $t \in R^1$, $z \in R^2$ и $x \in K(\Omega_t)$ существует (не единственная) функция $u \in K$ такая, что

$$\Phi_{t,z}(x, u) = 1; \tag{16}$$

е) для любой последовательности $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset K(\Omega_t)$ сходящейся к нулю в $L^2(\Omega_t)$, существует последовательность $\{u_k\}_{k=1}^\infty \subset K$, сходящаяся к нулю в метрике $L^2[0,1]$ и такая, что

$$\Phi_{t,z}(x_k, u_k) = 1.$$

Доказательство теоремы мы проведем по той же схеме, что и доказательство теоремы 2 (см. [1]). *Достаточность.* Пусть при некоторых $t \in R^1$, $z \in R^2$ x – произвольный элемент $K(\Omega_t)$. Положим

$$\alpha_i^{(t,z)}(x) = \alpha_i(u), \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{17}$$

где u – какой-либо элемент из K, для которого справедливо (16). Элемент u не определяется равенством (16) однозначно. Поэтому следует проверить, что равенство (17) определяет величину $\alpha_i^{(t,z)}(x)$ вне зависимости от выбора u. Мы опустим эту проверку.

Покажем теперь, что при всех $t \in R^1$, $z \in R^2$ и $x, y \in K(\Omega_t)$ равенства

$$\Phi_{t,z}(x, y) = 1 \tag{18}$$

и

$$\alpha_i^{(t,z)}(x) = \alpha_i^{(t,z)}(y), \quad i = 1, 2, ..., n \tag{19}$$

эквивалентны. Подберем для x и y какие-либо элементы $u, v \in K$ такие, что

$$\Phi_{t,z}(x, u) = 1, \quad \Phi_{t,z}(y, v) = 1. \tag{20}$$

Если для x и y имеет место равенство (18), то из (20) на основании условий *б* и *в* легко вывести, что $\Phi_{t,z}(u, v) = 1$. Но тогда и

$$\alpha_i(u) = \alpha_i(v), \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{21}$$

Отсюда и из определения (17) вытекают равенства (19). Пусть обратно для x и y справедливо (19). Подберем для x и y элементы $u, v \in K$ так, чтобы имело место (20). Тогда справедливо (21) и, следовательно, $\Phi_{t,z}(u, v) = 1$. Вместе с (20) это дает (18).

Таким образом, равенство (7) эквивалентно равенству (8). Осталось проверить, что для величин $\alpha_i^{(t,z)}(x)$ справедлива формула (9). Рассмотрим произвольные элементы $x(\lambda, \tau, p, q)$ и $y(\lambda, \tau, p, q)$ конуса $K(\Omega_t)$. Пусть $u, v \in K$ удовлетворяют равенствам (20). Применив к этим равенствам условие *г*, получаем

$$\Phi_{t,z}(x + y, u + v) = 1.$$

Из этого равенства и (20) следует, что

$$\alpha_i^{(t,z)}(x) = \alpha_i(u), \quad \alpha_i^{(t,z)}(y) = \alpha_i(v),$$
$$\alpha_i^{(t,z)}(x + y) = \alpha_i(u + v), \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Поскольку $\alpha_i(u+v)=\alpha_i(u)+\alpha_i(v)$, то отсюда вытекает, что

$$\alpha_i^{(t,z)}(x+y)=\alpha_i^{(t,z)}(x)+\alpha_i^{(t,z)}(y),\quad i=1,2,\dots,n,$$

то есть функционалы $\alpha_i^{(t,z)}$ аддитивны. Проверим их непрерывность в нуле. Рассмотрим произвольную последовательность функций, сходящуюся к нулю. Подберем для нее последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}\subset K$ согласно условию *е*. Тогда

$$\Phi_{t,z}(x_k,u_k)=1,\quad \lim_{k\to\infty}u_k=0.$$

Из последнего равенства и непрерывности функционалов α_i следует, что

$$\lim_{k\to\infty}\alpha_i(u_k)=0,\quad i=1,2,\dots,n.$$

Но тогда из (17) следует, что

$$\lim_{k\to\infty}\alpha_i^{(t,z)}(x_k)=0,\quad i=1,2,\dots,n.$$

Таким образом, функционалы $\alpha_i^{(t,z)}$ определены на воспроизводящем конусе $K(\Omega_t)$ пространства $L^2(\Omega_t)$, аддитивны и непрерывны в нуле. Значит, они однозначно продолжаются до линейных функционалов на всем пространстве. По теореме об общем виде линейного функционала

$$\alpha_i^{(t,z)}(x)=$$
$$=\int_0^1\int_{-\infty}^{t}\iint e^{\tau}e^{-(p^2+q^2)}S_i^{(t,z)}(\lambda,\tau,p,q)d\lambda d\tau dpdq,\tag{22}$$

где $S_i^{(t,z)}\in L^2(\Omega_t)$.

Пусть функция $x(\lambda,\tau,p,q)$ имеет вид (13). Из (14) имеем

$$\Phi_{t,z}(\beta u,f_u^{(t,z)}(\beta)u)=1.\tag{23}$$

Поскольку условия *ж* и *з* эквивалентны, из (23) можно заключить, что

$$\alpha_i^{(t,z)}(\beta u)=\alpha_i^{(t,z)}(f_u^{(t,z)}(\beta)u),\quad i=1,2,\dots,n.\tag{24}$$

Выносим константу $f_u^{(t,z)}(\beta)$ из аргумента линейных функционалов $\alpha_i^{(t,z)}$, находим

$$\alpha_i^{(t,z)}(\beta u)=f_u^{(t,z)}(\beta)\alpha_i^{(t,z)}(u),\quad i=1,2,\dots,n.$$

Так же, как и при доказательстве теоремы 2 (см. [1]), можно показать, что на самом деле функция $f_u^{(t,z)}(\beta)$ не зависит от u. Так что

$$\alpha_i^{(t,z)}(\beta u)=f^{(t,z)}(\beta)\alpha_i^{(t,z)}(u),\quad i=1,2,\dots,n\tag{25}$$

и равенство (15) можно переписать в виде

$$f^{(t,z)}(\beta)=$$
$$=\int_{-\infty}^{t}\iint Q(t-\tau,\xi-p,\eta-q)\beta(\tau,p,q)d\tau dpdq.\tag{26}$$

Комбинируя равенство (25) с равенствами (12), (22) и (26), получаем

$$\int_0^1\int_{-\infty}^{t}\iint e^{\tau}e^{-(p^2+q^2)}S_i^{(t,z)}(\lambda,\tau,p,q)\beta(\tau,p,q)u(\lambda)d\lambda d\tau dpdq=$$
$$\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)\int_{-\infty}^{t}\iint Q(t-\tau,\xi-p,\eta-q)\beta(\tau,p,q)u(\lambda)d\tau dpdq,$$

то есть

$$\int_0^1(\int_{-\infty}^{t}\iint(e^{\tau}e^{-(p^2+q^2)}S_i^{(t,z)}(\lambda,\tau,p,q)-$$
$$-g_i(\lambda)Q(t-\tau,\xi-p,\eta-q))\beta(\tau,p,q)d\tau dpdq)u(\lambda)d\lambda=0.$$

Мы использовали здесь теорему Фубини. Поскольку в последнем равенстве $u(\lambda)$ – произвольный элемент положительного конуса K пространства $L^2[0,1]$ и конус K является воспроизводящим, то из равенства вытекает, что

$$\int_{-\infty}^{t}\iint e^{\tau}e^{-(p^2+q^2)}(S_i^{(t,z)}(\lambda,\tau,p,q)-$$
$$-e^{-\tau}e^{p^2+q^2}g_i(\lambda)Q(t-\tau,\xi-p,\eta-q))\beta(\tau,p,q)d\tau dpdq=0.$$

Далее, $\beta(\tau,p,q)$ – произвольный элемент воспроизводящего конуса $K_t(R^2)$ пространства $L_t^2(R^2)$ и поэтому из последнего равенства следует, что

$$S_i^{(t,z)}(\lambda,\tau,p,q)=-e^{-\tau}e^{p^2+q^2}g_i(\lambda)Q(t-\tau,\xi-p,\eta-q).$$

Подставляя это равенство в (22), приходим к (9). Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть линейно независимая система функций $\{g_i\}_{i=1}^{n}\subset L^2[0,1]$ и почти всюду неотрицательная на $[0,\infty)\times R^2$ функция Q, удовлетворяющая условиям *г*, таковы, что для них равенства (7) и (8) эквивалентны. Для функций $u\in K$ равенство (9) дает

$$S_i^{(t,z)}(u)=\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda\int_{-\infty}^{t}\iint Q(t-\tau,\xi-p,\eta-q)d\tau dpdq.$$

Отсюда и из равенства (4) следует, что

$$S_i^{(t,z)}(u)=\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda.$$

Отсюда видно, что величина $S_i^{(t,z)}$ на самом деле не зависит от u. Поэтому из эквивалентности равенств (7) и (8) вытекает эквивалентность равенств (10) и (11), где величины $\alpha_i(u)$ определяются формулой (12). Таким образом, условия A выполняются.

Перейдем к условиям C. Рассмотрим функции $x(\lambda,\tau,p,q)$ вида (13). Для таких функций формула (9) принимает вид

$$\alpha_i^{(t,z)}(\beta u)=\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{t}\iint Q(t-\tau,\xi-p,\eta-q)\beta(\tau,p,q)d\tau dpdq.\tag{27}$$

Определим функционалы α_i на $L^2[0,1]$ формулой (12) и функционалы $f^{(t,z)}$ на $L^2(\Omega_t)$ формулой (25). Равенство (26) может быть переписано в виде (24). Но по условию теоремы равенство (24) эквивалентно равенству (23) Обратно, пусть для некоторого $u\in K$, некоторого $\beta\in K(\Omega_t)$ и числа C имеет место равенство (14). Поскольку равенства (7) и (8) эквивалентны, это значит, что

$$\alpha_i^{(t,z)}(\beta u) = c \cdot \alpha_i^{(t,z)}(u), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Комбинируя это равенство с формулой (9), найдем, что $c = f^{(t,z)}(\beta)$. Итак, выполнимость условий C проверена.

Перейдем к условиям *г* – *е*. Справедливость *г* вытекает из аддитивности функционала (9). Проверим *д*. Пусть $x \in K(\Omega_t)$. Положим

$$u(\lambda) = \int_{-\infty}^{t} \iint Q(t-\tau, \xi - p, \eta - q) x(\lambda, \tau, p, q) d\tau dp dq. \quad (28)$$

Очевидно, функция $u(\lambda)$ почти всюду неотрицательна. Далее, имеем, используя неравенство Коши-Буняковского,

$$u(\lambda) \le \sqrt{\int_{-\infty}^{t} \iint e^{-\tau} e^{p^2+q^2} Q(t-\tau, \xi-p, \eta-q) d\tau dp dq} \times$$

$$\times \sqrt{\int_{-\infty}^{t} \iint e^{-\tau} e^{p^2+q^2} x^2(t-\tau, \xi-p, \eta-q) d\tau dp dq} \le$$

$$\le c_1 \sqrt{\int_{-\infty}^{t} \iint e^{\tau} e^{-(p^2+q^2)} x^2(t-\tau, \xi-p, \eta-q) d\tau dp dq}.$$

Здесь c_1 – некоторая положительная константа, существование которой вытекает из неравенства (4). Из последнего неравенства получаем

$$\int_0^1 u^2(\lambda) d\lambda \le c_1^2 \sqrt{\int_0^1 \int_{-\infty}^{t} \iint e^{\tau} e^{-\left(p^2+q^2\right)} x^2(\lambda, \tau, p, q) d\lambda d\tau dp dq}.$$

Поэтому из (6) следует, что $u \in L^2[0,1]$ и

$$\| u \| \le c_1 \| x \|, \quad (29)$$

где $\|u\|$ – $L^2[0,1]$ – норма элемента u; $\|x\|$ – $L^2(\Omega_t)$ – норма элемента x. Легко видеть, что $\alpha_i^{(t,z)}(x) = \alpha_i^{(t,z)}(u)$. Следовательно, $\Phi_{t,z}(x,u) = 1$ и условие *д* выполняется.

Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ – сходящаяся к нулю последовательность элементов из $K(\Omega_t)$. Определим для нее последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subset K$ по формуле (41) (см. [1]). Тогда $\Phi_{t,z}(x_k, u_k) = 1$, а из неравенства (29) видно, что последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к нулю. Значит, условие *е* выполняется.

Теорема 2 доказана.

С прикладной точки зрения этот результат является попыткой описать в рамках единой модели явления иррадиации и инерции зрения, учитывая при этом цветовое восприятие. Предположим, что наблюдателю предъявляется зрительная картина с различными спектральными плотностями лучистой яркости в различных точках пространства, изменяющимися произвольным образом во времени. Обозначим через $x(\lambda, \tau, p, q)$ спектральную плотность на длине волны λ в точке (p,q) в момент времени τ. Пусть t – произвольный момент времени, $z = (\xi, \eta)$ – произвольная точка зрительной картины. Будем говорить, что две зрительные картины со спектральными плотностями $x(\lambda, \tau, p, q)$ и $y(\lambda, \tau, p, q)$ соответственно (t,z) – метамерны, если их воздействие в точке z в момент времени t представляется наблюдателю одинаковым. Записывать этот факт будем в виде $\Phi_{t,z}(x,y) = 1$. В частном случае, когда спектральная плотность сравниваемых излучений не изменяется в пространстве и во времени, отношение (t,z) -метамерности переходит в классическую метамерность. Математической записью этого факта являются условия A. Рассмотрим теперь зрительные картины со спектральным составом вида (13), где $u(\lambda)$ – спектральная плотность постоянного во времени и пространстве излучения, а $\beta(\tau, p, q)$ – интенсивность излучения, изменяющаяся во времени и пространстве. Этот частный случай изучался выше и там объяснен физический смысл условий C.

Предположение *г* об аддитивности (t,z) -метамерности для различных частных случаев изменения сигнала (только во времени, только в пространстве или постоянные во времени и пространстве сигналы с различными спектральными плотностями излучений) обсуждалось в предыдущих параграфах. Нам не известны какие-либо эксперименты, направленные на проверку выполнимости этого предположения в рассматриваемой здесь общей ситуации.

Предположение *д* является обобщением предположения о существовании эффективной яркости. Его смысл состоит в том, что для любого момента времени t, любой точки пространства z и любой зрительной картины $x(\lambda, \tau, p, q)$ существует единственная постоянная во времени и пространстве зрительная картина $u(\lambda)$, которая (t,z) -метамерна исходной. Наконец, смысл условия *е* примерно такой же, как и в случае аналогичного условия теорем 1 и 2 (см. [1]). Его выполнимость на практике априори представляется обеспеченной.

2. Сверточные семейства

Пусть t – произвольное действительное число, L_t^2 – пространство измеримых на $(-\infty, t]$ действительных функций $x(\tau)$, для которых существует и конечен интеграл

$$\int_{-\infty}^{e} e^{\tau} x^2(\tau) d\tau, \quad (30)$$

K_t – положительный конус в этом пространстве. Рассмотрим семейство предикатов $\Phi_t(x,y)$ (t – параметр), каждый из которых при соответствующем t определен на $K_t \times K_t$ и удовлетворяет условиям рефлексивности, симметричности и транзитивности. Исследуем возможность представления семейства Φ_t в виде

$$\Phi_t(x,y) = D(x(t) - \int_{-\infty}^{t} B(t-\tau) x(\tau) d\tau,$$
$$\int_{-\infty}^{t} B(t-\tau) y(\tau) d\tau), \quad (31)$$

где D – предикат равенства; $B(\xi)$ – некоторая весовая функция на полуоси $[0,\infty)$.

Уточним постановку вопроса. В строгой формулировке элементами пространства L_t^2 являются не квадратично суммируемые функции, а их классы эквивалентности по отождествлению функций, совпадающих почти всюду. Поэтому для элемента $x \in L_t^2$ не существует понятия значения $x(t)$ в точке t. Например, функции $x(\tau) \equiv 1$ $(\tau \le t)$ и

$$\hat{x}(\tau) = \begin{cases} 1, \tau \ne t, \\ 0, \tau = t, \end{cases}$$

где $x(t)$ – любое действительное число, совпадают как элементы L_t^2. Условимся, чтобы придерживаться аккуратности в формулировках, считать, что в (31) $x, y \in K_t \times R^1$. При этом число $x(t)$ может принимать любое значение независимо от поведения функции $x(\tau)$ при $\tau < t$.

Будем, как и в п. 1, обозначать при любом $x \in L_t^2$ и любом положительном ξ через $\tilde{x}_\xi(\tau)$ функцию, определенную на $(-\infty, t+\xi]$ равенством

$$\tilde{x}_\xi(\tau) = x(\tau - \xi).$$

Теорема 4. *Для того чтобы для семейства предикатов $\Phi_t(x, y)$ нашлась функция $B(\xi)$, удовлетворяющая условиям*

$$\int_0^\infty e^\xi B^2(\xi)d\xi < \infty, \quad \int_0^\infty B(\xi)d\xi < \infty \tag{32}$$

и такая, что имеет место равенство (31), необходимо и достаточно, чтобы это семейство удовлетворяло следующим условиям:

г) для любого $t \in (-\infty, \infty)$ и любого $x \in K_t \times R^1$ существует единственное число $[fx](t)$ такое, что

$$\Phi_t(x, [\tilde{fx}](t)) = 1 \tag{33}$$

(здесь $[\tilde{fx}](t) = (0, [fx](t) \in K_t \times R^1)$;

д) величина $[fx](t) - x(t)$ не зависит от выбора числа $x(t)$;

е) для любых $t \in (-\infty, \infty)$ и $x, x', y, y' \in K_t \times R^1$ из равенств $\Phi_t(x, x') = 1$ и $\Phi_t(y, y') = 1$ следует, что

$$\Phi_t(x + y, x' + y') = 1; \tag{34}$$

ж) величина $[fx](t) - x(t)$ непрерывно зависит от функции $x(\tau)$ $\tau < t$ в метрике L_t^2;

з) для любого $t \in (-\infty, \infty)$, любых $x, y \in K_t$ и любого положительного ξ из равенства

$$\Phi_t(x, y) = 1$$

вытекает равенство

$$\Phi_{t+\xi}(\tilde{x}_\xi, \tilde{y}_\xi) = 1.$$

Доказательство. *Необходимость.* Условие *г*, очевидно, выполняется. При этом

$$[fx](t) = x(t) - \int_{-\infty}^t B(t-\tau)x(\tau)d\tau. \tag{35}$$

Из равенства (35) видно, что

$$[fx](t) - x(t) = -\int_{-\infty}^t B(t-\tau)x(\tau)d\tau \tag{36}$$

и, следовательно, не зависит от выбора числа $x(t)$. Таким образом, выполняется условие *д*. Посылка условия *е* означает, что

$$x(t) - \int_{-\infty}^t B(t-\tau)x(\tau)d\tau = x'(t) - \int_{-\infty}^t B(t-\tau)x'(\tau)d\tau$$

и

$$y(t) - \int_{-\infty}^t B(t-\tau)y(\tau)d\tau = y'(t) - \int_{-\infty}^t B(t-\tau)y'(\tau)d\tau.$$

Из этих равенств следует, что

$$(x(t) + y(t)) - \int_{-\infty}^t B(t-\tau)(x(\tau) + y(\tau))d\tau =$$

$$(x(t) + y'(t)) - \int_{-\infty}^t B(t-\tau)(x'(\tau) + y'(\tau))d\tau,$$

то есть получили (34). Для проверки условия *ж* положим

$$A(\xi) = B(\xi)e^\xi, \quad \xi \ge 0. \tag{37}$$

Тогда из (36) следует, что

$$[fx](t) - x(t) = -e^{-t}\int_{-\infty}^t e^\tau A(t-\tau)x(\tau)d\tau. \tag{38}$$

С другой стороны,

$$\int_{-\infty}^t e^\tau A^2(t-\tau)d\tau = e^t \int_0^\infty e^\xi B^2(\xi)d\xi.$$

Поэтому из (32) следует, что $A(t-\tau) \in L_t^2$. Таким образом, как это видно из (38), величина $[fx](t) - x(t)$ является линейным функционалом от $x(\tau)$ $(\tau < t)$ на L_t^2. Значит, выполняется условие *ж*. Проверим условие *з*. Оно означает, что

$$x(t) - \int_{-\infty}^t B(t-\tau)x(\tau)d\tau = y(t) - \int_{-\infty}^t B(t-\tau)y(\tau)d\tau. \tag{39}$$

Нужно показать, что отсюда вытекает равенство

$$\tilde{x}_\xi(t+\xi) - \int_{-\infty}^{t+\xi} B(t-\tau)\tilde{x}_\xi(\tau)d\tau = \tilde{y}_\xi(t+\xi) - \int_{-\infty}^{t+\xi} B(t-\tau)\tilde{y}_\xi(\tau)d\tau.$$

Учитывая определение функции $\tilde{x}_\xi$, последнее равенство можно переписать в виде

$$x(t) - \int_{-\infty}^{t+\xi} B(t-\tau)x(\tau-\xi)d\tau = y(t) - \int_{-\infty}^{t+\xi} B(t-\tau)y(\tau-\xi)d\tau.$$

Легко видеть, что это равенство, действительно, вытекает из (39). Необходимость доказана.

Достаточность. Рассмотрим при фиксированном t функцию $[fx](t)$. Согласно условию *г*, для любых $x, y \in K_t \times R^1$ будет

$$\Phi_t(x, [\tilde{fx}](t)) = 1, \quad \Phi_t(y, [\tilde{fy}](t)) = 1.$$

Отсюда и из условия *е* следует, что

$$\Phi_t(x + y, [\tilde{fx}](t) + [\tilde{fy}](t)) = 1. \tag{40}$$

Согласно условию *д*

$$\Phi_t(x+y,[\tilde{f}(x+y)](t))=1,$$

причем функция $[\tilde{f}(x+y)](t)$ определяется последним равенством однозначно. Значит

$$[\tilde{f}(x+y)](t)=[\tilde{f}x](t)+[\tilde{f}y](t).$$

Таким образом, $[fx](t)$ является аддитивным функционалом. Значит, и $[fx](t)-x(t)$ — аддитивный функционал. Согласно условиям *д* и *ж* этот функционал при фиксированном t зависит только от функции $x(\tau)\,(\tau<t)$ и указанная зависимость является непрерывной в метрике L_t^2. Тогда $[fx](t)-x(t)$ — линейный функционал на K_t. Он, следовательно, допускает единственное продолжение до линейного функционала на всем пространстве L_t^2. Поэтому существует такая функция $A_t(\tau)\in L_t^2$, что

$$[fx](t)-x(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{\tau}A_t(\tau)x(\tau)d\tau. \tag{41}$$

Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 1 (см. [1]), можно показать, используя условие *з*, что из (41) вытекает формула

$$[fx](t)=x(t)-\int_{-\infty}^{t}\ (t-\tau)x(\tau)d\tau, \tag{42}$$

где функция $B(\xi)$ удовлетворяет условиям (42).

Проверим справедливость равенства (31). Нужно показать, что при любом t для любых $x,y\in K_t\times R^1$ равенство

$$\Phi_t(x,y)=1 \tag{43}$$

выполняется тогда и только тогда, когда

$$[fx](t)=[fy](t). \tag{44}$$

Пусть имеет место (43). Вместе с (32) это дает

$$\Phi_t(y,[\tilde{f}x](t))=1. \tag{45}$$

Согласно условию *г*, отсюда следует равенство

$$[f\tilde{x}](t)=[f\tilde{y}](t), \tag{46}$$

а значит, и (44). Обратно, пусть имеет место равенство (44). В таком случае выполняется и (46). Комбинируя (46) и (33), получаем

$$\Phi_t(x,[\tilde{f}y](t))=1. \tag{47}$$

Согласно условию *г*

$$\Phi_t(y,[\tilde{f}y](t))=1. \tag{48}$$

Требуемое равенство (43) вытекает из (47) и (48).

Теорема 4 доказана.

Обсудим теперь физический смысл полученного результата. В качестве примера приложения рассмотрим вопрос об адаптации зрительной системы человека к уровню освещения. Предположим, что наблюдателю предъявляется излучение постоянного относительного спектрального состава с интенсивностью, изменяющейся во времени. Обозначим через $x(\tau)$ яркость излучения в момент времени τ. Рассмотрим случай ступенчатого изменения яркости. Пусть

$$x(\tau)=\begin{cases} a, \tau\le T,\\ b, \tau>T.\end{cases}$$

Тогда в соответствии с (42)

$$[fx](t)=\begin{cases} a-a\int_{-\infty}^{t}B(t-\tau)d\tau, t\le T,\\ b-a\int_{-\infty}^{T}B(t-\tau)d\tau-b\int_{T}^{t}B(t-\tau)d\tau, t>T,\end{cases}$$

то есть

$$[fx](t)=\begin{cases} ae, & t\le T,\\ ac-(b-a)(1-\int_{0}^{t-T}B(u)du), & t>T,\end{cases}$$

где

$$e=1-\int_{0}^{\infty}B(u)du.$$

В случае $a<b$ графики функций $x(\tau)$ и $[fx](t)$ изображены на рис. 1 и 2 соответственно.

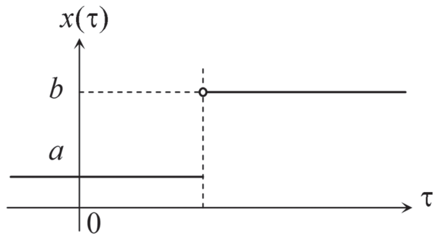

Рис. 1

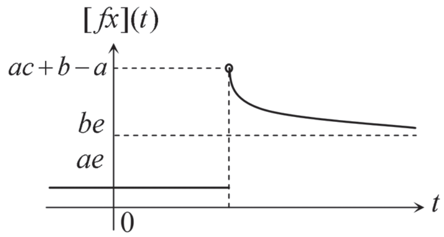

Рис. 2

Для случая $a>b$ графики функций $x(\tau)$ и $[fx](t)$ изображены на рис. 3 и 4.

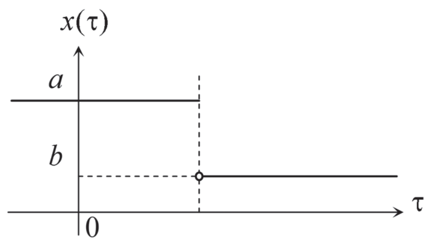

Рис. 3

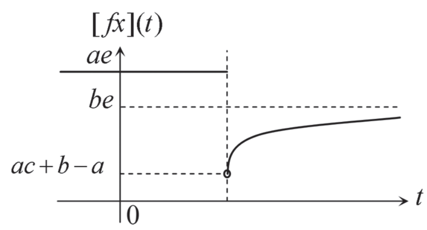

Рис. 4

Как видно из рис. 1 – 4, при скачкообразном увеличении яркости происходит резкое увеличение уровня субъективного ощущения яркости, затем зрительная система постепенно адаптируется к новому уровню яркости и через некоторое время ощущение практически становится равным ощущению bc постоянной яркости b. При скачкообразном снижении уровня яркости ощущение яркости в первый момент резко ослабевает, а затем в результате адаптации чувствительность усиливается. В результате ощущение яркости стремится к ощущению постоянной яркости b.

Разумеется, приведенные выше выводы из модели справедливы лишь в том случае, если модель обоснована. Для обоснования модели следует экспериментально проверить выполнимость условий *а* – *з* теоремы. Обсудим вопрос о возможности такой проверки на примере для случая субъективного восприятия яркости. Предположение г означает, что для любого закона изменения яркости $x(\tau)$, $-\infty < \tau \le t$, существует единственное значение яркости $[fx](t)$ такое, что закон $x(\tau)$ и закон

$$\begin{cases} 0, \tau < t, \\ [fx](t), \tau = t \end{cases}$$

вызывают одинаковое ощущение яркости в момент t. Если это предположение выполняется, то в эксперименте доступны для наблюдения функция $x(\tau)\,(\tau < t)$ и числа $x(t)$ и $[fx](t)$.

Таким образом, все условия теоремы 4 сформулированы в терминах, допускающих экспериментальную проверку.

3. Семейства интегральных сумм

Будем, как и ранее, обозначать при произвольном числе t через $\bar{L}_t^2$ пространство измеримых на $[0,1]\times(-\infty, t]$ действительных функций $x(\lambda,\tau)$, для которых конечен интеграл

$$\int_0^1 \int_{-\infty}^t e^{\tau} x^2(\lambda,\tau) d\lambda d\tau. \tag{49}$$

Рассмотрим семейство предикатов $\Phi_t(x, y)$, каждый из которых при соответствующем t определен на $\bar{K}_t \times \bar{K}_t$, где $\bar{K}_t$ – положительный конус в пространстве $\bar{L}_t^2$ и удовлетворяет условиям *а* – *в*. Нас интересует возможность представления семейства предикатов формулой

$$\begin{gathered}\Phi_t(x, y) = D((\alpha_1^{(t)}(x),...,\alpha_n^{(t)}(x)), \\ (\alpha_1^{(t)}(y),...,(\alpha_n^{(t)}(y))),\end{gathered} \tag{50}$$

где D – предикат равенства на R^n,

$$\begin{gathered}\alpha_1^{(t)}(x) = \int_0^1 g_i(\lambda) x(\lambda, t) d\lambda - \\ -\int_0^1 \int_{-\infty}^t g_i(\lambda) B(t-\tau) x(\lambda, t) d\lambda d\tau,\end{gathered} \tag{51}$$

g_i $(i = 1, 2,.., n)$ и B – некоторые функции на $[0,1]$ и $[0, \infty)$ соответственно.

Как и в предыдущем параграфе, постановка вопроса нуждается в уточнении, поскольку для элемента $x \in \bar{L}_t^2$ ограничение на прямую $\tau = t$ не определено. Поэтому будем считать, что в (51) $x \in \bar{K}_t \times L^2[0,1]$, то есть под x понимается упорядоченная пара: функция $x(\lambda,\tau) \in \bar{K}_t$ и функция от переменной λ при фиксированном t $x(\lambda, t) \in L^2[0,1]$.

Рассмотрим, как и в п. 2, два частных случая. Первый из них заключается в том, что функция $x(\lambda,\tau)$ в действительности не зависит от τ. Такие функции в настоящем параграфе обозначаются символами u и v, В рассматриваемом частном случае равенство (50) принимает вид

$$\begin{gathered}\Phi_t(u,v) = D((\alpha_1(u),...,\alpha_n(u)), \\ (\alpha_1(v),...,\alpha_n(v))),\end{gathered} \tag{52}$$

где

$$\alpha_i(u) = e\int_0^1 g_i(\lambda) u(\lambda) d\lambda. \tag{53}$$

Здесь

$$e = 1 - \int_0^\infty B(\xi) d\xi. \tag{54}$$

Условия представимости предиката в таком виде установлены в теореме 4 (см. [1]). Совокупность условий этой теоремы будем именовать условиями A.

Второй частный случай функций из $\bar{K}_t$ – это функции, представимые в виде

$$x(\lambda,\tau) = \beta(\tau) u(\lambda), \tag{55}$$

где $\beta(\tau) \in K_t$, $u(\lambda) \in K$ – положительный конус пространства $L^2[0, l]$. Для таких функций формулы (50), (51) означают, что для любой функции $u \in K$ существует функция $B_n(\xi)$, удовлетворяющая условиям (51) и такая, что при любой функции $\beta(\tau)$ равенство

$$\Phi_t(\beta u, cu) = 1 \tag{56}$$

выполняется тогда и только тогда, когда число $C = f_u^{(t)}(\beta)$, где

$$f_u^{(t)}(\beta) = \frac{1}{e}(\beta(t) - \int_{-\infty}^t B_n(t-\tau)\beta(\tau) d\tau). \tag{57}$$

Условия справедливости формул (56), (57) установлены в теореме 4. Будем называть их условиями B'.

Теорема 5. *Для того чтобы для семейства предикатов $\Phi_t(x, y)$ нашлась система линейно независимых функций $\{g_i\}_{i=1}^n \subset L^2[0,1]$ и функция $B(\xi)$, удовлетворяющая условиям (32), такие, что имеют место равенства (50), (51), необходимо и достаточно, чтобы это семейство удовлетворяло условиям A, B' и*

г) для любого $t \in (-\infty, \infty)$ и любого $x \in \bar{K}_t \times L^2[0,1]$ существует (не единственная) функция $u \in K$ такая, *что*

$$\Phi_t(x,u)=1; \qquad (58)$$

д) для любых $t\in(-\infty,\infty)$ *и любых*

$$x,x',y,y'\in\bar{K}_t\times L^2[0,1]$$

из равенств $\Phi_t(x,x')=1$ и $\Phi_t(y,y')=1$ *следует, что*

$$\Phi_t(x+y,x'+y')=1;$$

е) для любой последовательности

$$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\bar{K}_t\times L^2[0,1],$$

сходящейся к нулю в метрике $L_t^2\times L^2[0,1]$*, существует последовательность* $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}\subset K$ *, сходящаяся к нулю в метрике* $L^2[0,1]$ *и такая, что*

$$\Phi_t(x_k,u_k)=1,\quad k=1,2,\ldots.$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть для семейства предикатов $\Phi_t(x,y)$ при некоторых функциях g_i $(i=1,2,..,n)$ и B имеют место формулы (50), (51). Для функций $u\in K$ равенство (51) принимает вид

$$\alpha_i^{(t)}(u)=\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda-\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{t}B(t-\tau)d\tau=e\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda. \qquad (59)$$

Правая часть этого равенства не зависит от t. Значит, и левая часть не зависит от t. Тогда, как видно из (50), ограничение предиката Φ_t на $K\times K$ не зависит от t. Следовательно, на $K\times K$ определен предикат Φ такой, что при всех $u,v\in K$

$$\Phi(u,v)=D((\alpha_1(u),\ldots,\alpha_n(u)),$$
$$(\alpha_1(v),\ldots,\alpha_n(v))),$$

где величины $\alpha_i(u)$ определены равенством (53). Это и означает выполнимость условий A.

Рассмотрим теперь случай функций вида (55). Для таких функций равенство (51) принимает вид

$$\alpha_i^{(t)}(\beta u)=\beta(t)\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda-\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{t}B(t-\tau)\beta(\tau)d\tau=\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda\times \qquad (60)$$
$$\times(\beta(t)-\int_{-\infty}^{t}B(t-\tau)\beta(\tau)d\tau).$$

В частности, при $\beta(\tau)=A$ $(\tau\le t)$ имеем

$$\alpha_i^{(t)}(cu)=ce\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda.$$

Таким образом, равенство

$$\alpha_i^{(t)}(\beta u)=\alpha_i^{(t)}(cu)\quad(i=1,2,\ldots,n) \qquad (61)$$

выполняется тогда и только тогда, когда $c=f_u^{(t)}(\beta)$, где величина $f_u^{(t)}(\beta)$ определена равенством (57). Поэтому из формулы (50) следует, что при фиксированном $u\in K$ для любой функции $\beta(\tau)$ существует единственное число c такое, что $\Phi_t(\beta u,cu)=1$, причем c определено равенством (57). Это означает выполнимость условий B'.

Проверим выполнимость условий *г – е*. Рассмотрим при фиксированном t произвольный элемент x пространства $\bar{K}_t\times L^2[0,1]$. Пусть величина $\alpha_i^{(t)}(x)$ определена равенством (51). Положим

$$u(\lambda)=\frac{1}{e}(u(\lambda,t)-\int_{-\infty}^{t}B(t-\tau)x(\lambda,\tau)d\tau). \qquad (62)$$

Тогда в соответствии с (59)

$$\alpha_i^{(t)}(u)=\int_0^1 g_i(\lambda)(x(\lambda,t)-\int_{-\infty}^{t}B(t-\tau)x(\lambda,\tau)d\tau).$$

Сравнивая это равенство с (51), получаем

$$\alpha_i^{(t)}(x)=\alpha_i^{(t)}(u)\quad(i=1,2,\ldots,n). \qquad (63)$$

Поэтому из (50) следует, что $\Phi_t(x,u)=1$. Нужно лишь проверить, что функция $u(\lambda)$, определенная равенством (62), является интегрируемой с квадратом. Для этого достаточно проверить, что каждая из функций от переменной λ:

$$x(\lambda,t)\quad\text{и}\quad\int_{-\infty}^{t}B(t-\tau)x(\lambda,\tau)d\tau$$

удовлетворяет этому условию. По условию, при фиксированном t функция $x(\lambda,t)\in L^2[0,1]$ Имеем далее

$$\int_{-\infty}^{t}B(t-\tau)x(\lambda,\tau)d\tau=$$
$$=\int_{-\infty}^{t}(e^{\sqrt{t-\tau}}B(t-\tau))(e^{\sqrt{t-\tau}}x(\lambda,\tau))d\tau.$$

Таким образом,

$$\left|\int_{-\infty}^{t}B(t-\tau)x(\lambda,\tau)d\tau\right|\le$$
$$\le\sqrt{\int_{-\infty}^{t}(e^{t-\tau}B^2(t-\tau))d\tau}\sqrt{e^t\int_{-\infty}^{t}e^{\tau}x(\lambda,\tau)d\tau}.$$

Отсюда и из неравенства (51) следует, что

$$\left|\int_{-\infty}^{t}B(t-\tau)x(\lambda,\tau)d\tau\right|\le ce^{-\frac{t}{2}}\sqrt{\int_{-\infty}^{t}e^{\tau}x(\lambda,\tau)d\tau}.$$

Поэтому

$$\int_0^1(\int_{-\infty}^{t}B(t-\tau)x(\lambda,\tau)d\tau)^2d\lambda\le c^2e^{-t}\int_{-\infty}^{t}e^{\tau}x^2(\lambda,\tau)d\lambda d\tau. \qquad (64)$$

Поскольку интеграл (49) конечен, то из последнего равенства вытекает требуемый результат. Итак, условие *г* выполняется. Выполнимость условия *д* очевидна. Проверим условие *е*. Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}\subset\bar{K}_t\times L^2[0,1]$ – произвольная сходящаяся к нулю последовательность. Определим для каждого x_k элемент u_k по формуле (62). Тогда из (64) следует, что

$$\|u_k\| \le \frac{1}{e}\|x_k(.,t)\| + ce^{-\frac{t}{2}}\|x_k\|. \qquad (65)$$

Здесь $\|u_k\|$ — $L^2[0,1]$ — норма элемента u_k, $\|x_k(.,t)\|$ — $L^2[0,1]$ — норма функции $\lambda \to x_k(\lambda,t)$, ($\lambda \in [0,1]$), $\|x_k\|$ — $\bar{L}_t^2$ — норма функции x_k. Из (65) видно, что последовательность $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к нулю. Из (63) имеем

$$\alpha_i^{(t)}(x_k) = \alpha_i^{(t)}(u_k), \quad i = 1,2,\ldots,n, \quad k = 1,2,\ldots.$$

Следовательно

$$\Phi_t(x_k, u_k) = 1, \quad k = 1,2,\ldots.$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Для любого $x \in \bar{K}_t \times L^2[0,1]$ положим

$$\alpha_i^{(t)}(x) = \alpha_i^{(t)}(u), \quad i = 1,2,\ldots,n, \qquad (66)$$

где u — произвольный элемент из K, связанный с x условием (58); α_i — линейный функционал, заданный формулой (53). Условие *г* не гарантирует единственности элемента u, удовлетворяющего равенству (58). Поэтому следует проверить, что правые части равенства (66) не зависят от выбора элемента u. Рассмотрим какой-либо другой элемент $v \in K$ такой, что $\Phi_t(x,v) = 1$. Из равенств $\Phi_t(x,u) = 1$ и $\Phi_t(x,v) = 1$ следует, что $\Phi_t(u,v) = 1$. Поэтому на основании (52) можно заключить, что

$$\alpha_i(v) = \alpha_i(u), \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

Проверим теперь справедливость формулы (50). Пусть для некоторых $x, y \in \bar{K}_t \times L^2[0,1]$ имеет место равенство

$$\Phi_t(x,y) = 1. \qquad (67)$$

Подберем элементы $u, v \in K$, согласованные с элементами x и y соответственно условием *г*, то есть

$$\Phi_t(x,u) = 1, \ \Phi_t(y,v) = 1. \qquad (68)$$

Из равенств (67) и (68) заключаем, что $\Phi_t(u,v) = 1$. В этих условиях формула (52) дает $\alpha_i(u) = \alpha_i(v), \quad i = 1,2,\ldots,n.$. Поэтому в соответствии с определением (66)

$$\alpha_i^{(t)}(x) = \alpha_i^{(t)}(y), \quad i = 1,2,\ldots,n. \qquad (69)$$

Обратно, пусть для некоторых $x, y \in \bar{K}_t \times L^2[0,1]$ имеет место равенство (69). Подберем элементы $u, v \in K$ так, чтобы

$$\Phi_t(x,u) = 1, \ \Phi_t(u,v) = 1. \qquad (70)$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\alpha_i^{(t)}(x) = \alpha_i^{(t)}(u), \\ &\alpha_i^{(t)}(y) = \alpha_i^{(t)}(v), \quad i = 1,2,\ldots,n. \end{aligned} \qquad (71)$$

Из (71) заключаем, что

$$\alpha_i(u) = \alpha_i(v), \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

Поэтому из (67) (см. [1]) следует, что $\Phi_t(u,v) = 1$. Вместе с (70) это дает (67). Справедливость формулы (50) доказана. Осталось доказать, что для функционалов $\alpha_i^{(t)}(x)$ имеет место формула (51).

Функционалы $\alpha_i^{(t)}$ аддитивны. Действительно, пусть x, y — произвольные элементы из $\bar{K}_t \times L^2[0,1]$. Нужно показать, что

$$\alpha_i^{(t)}(x+y) = \alpha_i^{(t)}(x) + \alpha_i^{(t)}(y), \quad i = 1,2,\ldots,n. \qquad (72)$$

Подберем элементы $u, v \in K$ так, чтобы выполнялись равенства (70) и, следовательно, (71). Из (70) и условия *д* заключаем, что

$$\Phi_t(x+y, u+v) = 1.$$

Но тогда по определению величины $\alpha_i^{(t)}$

$$\alpha_i^{(t)}(x+y) = \alpha_i^{(t)}(u+v). \qquad (73)$$

Функционалы α_i аддитивны:

$$\alpha_i(u+v) = \alpha_i^{(t)}(u) + \alpha_i^{(t)}(v). \qquad (74)$$

Комбинируя равенства (73), (74) и (71), получаем (72).

Рассмотрим произвольную последовательность элементов $x_k \in \bar{K}_t \times L^2[0,1]$, сходящуюся к нулю в норме $\bar{L}_t^2 \times L^2[0,1]$. Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset K$ — последовательность, согласованная с $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ в смысле условия *е*:

$$\lim_{k\to\infty} u_k = 0, \quad \Phi_t(x_k, u_k) = 1. \qquad (75)$$

Поскольку α_i — линейные функционалы, то

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_i(u_k) = 0. \qquad (76)$$

Но из второго равенства (75) следует, что

$$\alpha_i^{(t)}(x_k) = \alpha_i^{(t)}(u_k), \quad i = 1,2,\ldots,n, \ k = 1,2,\ldots. \qquad (77)$$

Из (76) и (77) получаем, что

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_i^{(t)}(x_k) = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

Значит, функционалы $\alpha_i^{(t)}$ на $\bar{K}_t \times L^2[0,1]$ аддитивны и непрерывны в нуле. Так как $\bar{K}_t$ — воспроизводящий конус в $\bar{L}_t^2$, то $\bar{K}_t \times L^2[0,1]$ — воспроизводящий конус пространства $\bar{L}_t^2 \times L^2[0,1]$. Следовательно, функционалы $\alpha_i^{(t)}$ однозначно продолжаются до линейных функционалов на этом пространстве. Общий вид линейного функционала на пространстве $L^2[0,1]$:

$$u \to \int_0^1 g(\lambda)u(\lambda)d\lambda, \quad g \in L^2[0,1],$$

а на пространстве $\bar{L}_t^2$:

$$u \to \int_0^1 \int_{-\infty}^t e^{\tau} A^{(t)}(\lambda,\tau)x(\lambda,\tau)d\lambda d\tau, \quad A^{(t)} \in \bar{L}_t^2.$$

Поэтому функционалы $\alpha_i^{(t)}$ записываем в виде

$$\alpha_i^{(t)}(x) = \\ = \int_0^1 g_i(\lambda)x(\lambda,\tau)d\lambda + \int_0^1 \int_{-\infty}^t e^\tau A^{(t)}(\lambda,\tau)x(\lambda,\tau)d\lambda d\tau. \quad (78)$$

Пусть функция x имеет вид (55). Из (56) имеем

$$\Phi_t(\beta u, f_u^{(t)}(\beta)u) = 1.$$

Комбинируя это равенство с (50), получаем

$$\alpha_i^{(t)}(\beta u) = f_u^{(t)}(\beta)\alpha_i^{(t)}(u). \quad (79)$$

Так же, как и при доказательстве теоремы 2 (см. [1]), можно показать, что функция $f_u^{(t)}(\beta)$, в действительности, не зависит от u. Поэтому

$$\alpha_i^{(t)}(\beta u) = f^{(t)}(\beta)\alpha_i^{(t)}(u), \quad (80)$$

а равенство (57) принимает вид

$$f^{(t)}(\beta) = \frac{1}{e}(\beta(t) - \int_{-\infty}^t B(t-\tau)\beta(\tau)d\tau). \quad (81)$$

Подставляя в (79) значения $\alpha_i^{(t)}(\beta u)$, $f^{(t)}(\beta)$ и $\alpha_i^{(t)}(u)$ в виде (78), (81) и (53) соответственно, получаем

$$\beta(t)\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda + \int_0^1 \int_{-\infty}^t e^\tau A_i^{(t)}(\lambda,\tau)\beta(\tau)u(\lambda)d\lambda d\tau = \\ = (\beta(t) - \int_{-\infty}^t B(t-\tau)\beta(\tau)d\tau) \cdot \int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda,$$

или после упрощения

$$\int_0^1 \int_{-\infty}^t e^\tau A_i^{(t)}(\lambda,\tau)\beta(\tau)u(\lambda)d\lambda d\tau = \\ = -\int_0^1 g_i(\lambda)u(\lambda)d\lambda \cdot \int_{-\infty}^t B(t-\tau)\beta(\tau)d\tau.$$

Теорема Фубини позволяет переписать это равенство в виде

$$\int_0^1 u(\lambda)(\int_{-\infty}^t \beta(\tau)(e^\tau A_i^{(t)}(\lambda,\tau) + g_i(\lambda)B(t-\tau))d\tau)d\lambda = 0.$$

Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 1 (см. [1]), из последнего равенства можно заключить, что

$$e^\tau A_i^{(t)}(\lambda,\tau) + g_i(\lambda)B(t-\tau) = 0.$$

Поэтому равенство (78) можно переписать в виде (51). Теорема 5 доказана.

Выводы

Рассмотрены интегральные модели некоторых функций цветового зрения человека в виде семейств интегральных трехпараметрических и сверточных операторов, применяемые для моделирования инерции и иррадиации зрения в рамках единой математической модели. При этом учитывается цветовое восприятие зрительной картины с различными спектральными плотностями лучистой яркости в различных точках пространства, меняющимися произвольным образом во времени. Рассмотрены интегральные модели адаптации зрительной системы человека к уровню освещения в виде сверточных семейств операторов и семейств интегральных сумм. Сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия, определяющие вид соответствующих операторов.

Список литературы: **1.** *Бондаренко, М.Ф.* Линейные предикаты и их применение для моделирования цветового зрения человека [Текст] / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 33-51. **2.** *Бондаренко, М.Ф.* О системе условий линейности предиката [Текст] / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 52-64. **3**. *Бондаренко, М.Ф.* Интегральные представления линейных предикатов [Текст] / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 65-78. **4.** *Бондаренко, М.Ф.* Дедуктивное построение теории цвета предиката [Текст] / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 79-85. **5.** *Бондаренко, М.Ф.* Модели компараторной идентификации в виде семейств интегральных одно- и двухпараметрических операторов / [Текст] / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 86-97.

Поступила в редколлегию 23.09.2011.

УДК 519.7

Моделі компараторної ідентифікації у вигляді сімейств інтегральних трьохпараметричних і згортальних операторів / М.Ф. Бондаренко, Ю.П. Шабанов-Кушнаренко, С.Ю. Шабанов-Кушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2011. – № 2 (76). – С. 98-108.

Розглянуто інтегральні моделі деяких функцій колірного зору людини у вигляді сімейств інтегральних трьохпараметричних і згортальних операторів, вживані для моделювання інерції і іррадіації зору у рамках єдиної математичної моделі. Розглянуто інтегральні моделі адаптації зорової системи людини до рівня освітлення у вигляді згортальних сімейств операторів і сімейств інтегральних сум.

Іл. 4. Бібліогр.: 5 найм.

UDC 519.7

Models of comparator identification as three-parameters and convolutional integral operators families / M.F. Bondarenko, S.Yu. Shabanov-Kushnarenko, Yu.P. Shabanov-Kushnarenko // Bionics of Intelligense: Sci. Mag. – 2011. – № 2 (76). –P. 98-108.

The integral models of some colour sight functions are considered as families of integral three-self-reactance and convolutional operators, inertias applied for a design and to the sight irradiation within the framework of single mathematical model. The integral models of adaptation of the visual system of man are considered to the level of illumination as convolutional families of operators and families of operators of integral sums.

Fig. 4. Ref.: 5 items.