УДК 519.7

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОБЪЕКТОВ, ОПИСЫВАЕМЫХ ЧИСЛОВЫМИ СИСТЕМАМИ

М.Ф. Бондаренко[1], С.Ю. Шабанов-Кушнаренко[2] Ю.П. Шабанов-Кушнаренко[3]

[1, 2, 3] ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

В процессе компараторной идентификации объектов приходится записывать различные условия, которым удовлетворяют исследуемые предикаты. Чтобы иметь в дальнейшем возможность делать это беспрепятственно, надо располагать полным языком формального описания логических условий. В данной статье описывается разработанная нами для этой цели алгебра предикатных операций.

КОМПАРАТОРНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ, ЦВЕТОВОЕ ЗРЕНИЕ, ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО

Введение

Представленные в настоящей статье результаты по идентификации понятия числа имеют много общего с известными положениями из учения об основаниях арифметики, поэтому необходимо проанализировать различие между ними. В нашей постановке речь идет только об идентификации (то есть математическом описании) понятия числа, вопрос об обосновании этого понятия не ставится. При решении задачи идентификации объектов все средства формального описания хороши, лишь бы они были надежны; нет необходимости их ограничивать, как это делается в математической логике при обосновании понятий арифметики. Снятие запрета на средства формального описания дает возможность идентифицировать именно ту арифметику, которая фактически используется в математической практике, а не тот ее вариант, который носит название формальной арифметики.

1. Разработка полного формального языка идентификации

Пусть U – какое–либо множество предметов, называемое универсумом. На множестве U вводим предметные переменные $x_1, x_2,..., x_m$. Если $a_1, a_2,..., a_m \in U$ и $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$,..., $x_m = a_m$, то будем говорить, что предметный вектор $(a_1, a_2,..., a_m)$ принадлежит пространству U^m размерности m. Любое подмножество P пространства U^m называется отношением на U^m. Любая функция $P(\xi) = (x_1, x_2,..., x_m)$, отображающая U^m в множество $\Sigma = \{0, 1\}$, называется предикатом на U^m. Пусть L – множество всех отношений на U^m, M – множество всех предикатов на U^m. Отношение $P \in L$ и предикат $P \in M$ называются соответствующими друг другу, если при любом $\xi = (x_1, x_2,..., x_m)$

$$P(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } \xi \in P, \\ 0, \text{ если } \xi \notin P. \end{cases}$$

Предикатом узнавания предмета $a \in U$ по переменной x_i называется предикат x_i^a из M, определяемый условием

$$x_i^a = \begin{cases} 1, \text{ если } x_i = a, \\ 0, \text{ если } x_i \neq a. \end{cases}$$

Отрицанием предиката P называется предикат $\overline{P}$, соответствующий отношению $\overline{P}$. Дизъюнкцией предикатов P и Q называется предикат $P \vee Q$, соответствующий отношению $P \cup Q$. Конъюнкцией предикатов P и Q называется предикат $P \wedge Q$, соответствующий отношению $P \cap Q$. Нулевым предикатом 0 называется предикат, соответствующий пустому отношению. Множество $\boldsymbol{M}$ всех предикатов на U^m называется универсумом предикатов.

На множестве $\boldsymbol{M}$ вводим предикатные переменные $X_1, X_2,..., X_n$. Множество $\boldsymbol{M}^n$ называется предикатным пространством размерности n. Элементы множества $\boldsymbol{M}^n$ называются предикатными векторами. Любая функция $\boldsymbol{F}(X_1, X_2,..., X_n) = Y$, отображающая множество $\boldsymbol{M}^n$ в множество $\boldsymbol{M}$, называется предикатной операцией. Образуем множество R всех предикатных операций, отображающих $\boldsymbol{M}^n$ в $\boldsymbol{M}$. Алгеброй предикатных операций над R называется любая алгебра, заданная на носителе R. Отрицанием предикатной операции $\boldsymbol{F}$ называется операция $\overline{\boldsymbol{F}}$, отображающая R в R, значения которой определяются по правилу:

$$\overline{\boldsymbol{F}}(X_1, X_2,..., X_n) = \overline{\boldsymbol{F}(X_1, X_2,..., X_n)}.$$

Дизъюнкцией предикатных операций $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{T}$ называется операция $\boldsymbol{F} \vee \boldsymbol{T}$, отображающая $R \times R$ в R, значения которой определяются по правилу:

$$(\boldsymbol{F} \vee \boldsymbol{T})(X_1, X_2,..., X_n) = \boldsymbol{F}(X_1, X_2,..., X_n) \vee \\ \vee \boldsymbol{T}(X_1, X_2,..., X_n).$$

Конъюнкцией предикатных операций $\boldsymbol{F}$ и $\boldsymbol{T}$ называется операция $\boldsymbol{F} \wedge \boldsymbol{T}$, отображающая $R \times R$ в R, значения которой определяются по правилу:

$$(\boldsymbol{F} \wedge \boldsymbol{T})(X_1, X_2,..., X_n) = \boldsymbol{F}(X_1, X_2,..., X_n) \\ \wedge \boldsymbol{T}(X_1, X_2,..., X_n).$$

Константной предикатной операцией называется любая предикатная операция вида $\boldsymbol{F}(X_1, X_2,..., X_n) = P$, где P – предикат из $\boldsymbol{M}$. Будем обозначать ее символом P и называть константным предикатом. Тождественной предикатной операцией по переменной $X_i (i = \overline{1, n})$ называется операция вида $\boldsymbol{F}(X_1, X_2, ..., X_i) = X_i$. Будем обозначать ее символом X_i и называть предикатной переменной. Предикатной операцией узнавания предиката P по переменной $X_i (i = \overline{1, n})$ называется операция из R вида:

$$X_i^p = \begin{cases} 1, \text{ если } X_i = P, \\ 0, \text{ если } X_i \neq P. \end{cases}$$

Дизъюнктивно–конъюнктивной алгеброй предикатных операций называется такая алгебра над R, у которой базисными операциями служат дизъюнкция и конъюнкция предикатных операций, а базисными элементами являются любые константные предикаты и любые предикатные операции узнавания предиката.

Утверждение 1. (О полноте дизъюнктивноконъюнктивной алгебры предикатных операций). Любая предикатная операция выражается в дизъюнктивноконъюнктивной алгебре в виде:

$$\boldsymbol{F}(X_1, X_2, ..., X_n) = \vee \boldsymbol{F}(P_1, P_2, ..., P_n)\, X_1^{p_1} X_2^{p_2} \dots X_n^{p_n}$$
$$P_1, P_2, ..., P_n \in \boldsymbol{M}.$$

Доказательство очевидно.

Подстановкой $x_i / a(P) = Q$ значения $a \in U$ на место аргумента $x_1\ (i = \overline{1, m})$ называется предикатная операция, отображающая $\boldsymbol{M}$ в $\boldsymbol{M}$ и определяемая правилом:

$$Q(x_1, x_2, ..., x_m) = P(x_1, x_2, ..., x_{i-1}, a, x_{i-1}, ..., x_m).$$

Подстановку можно понимать не только как предикатную операцию, но и как операцию над предикатными операциями. При таком понимании она определяется следующим образом:

$$x_i / a(F(X_1, X_2, ..., X_n)) =$$
$$= F(x_i / a(X_1), x_i / a(X_2), ..., x_i / a(X_n)).$$

Алгеброй подстановочных операций называется такая алгебра предикатных операций над R, у которой базисными операциями служат всевозможные подстановки вида:

$$x_i / a(i = \overline{1, m, a \in U}),$$

а также операции отрицания и дизъюнкции, а базисными элементами являются предикаты равенства $D(x_1, x_i), (i = \overline{2, m})$ и переменные $X_i (i = \overline{1, m})$.

Утверждение 2. (О полноте алгебры подстановочных операций). Любая предикатная операция выражается в алгебре подстановочных операций.

Доказательство. Теорема будет доказана, если все базисные элементы и базисные операции дизъюнктивноконъюнктивной алгебры будут выражены через базисные элементы и операции алгебры подстановочных операций. Операция дизъюнкции в алгебре подстановочных операций имеется. Выражаем конъюнкцию: $\boldsymbol{F} \vee \boldsymbol{T} = \overline{\overline{\boldsymbol{F}} \vee \overline{\boldsymbol{T}}}$. Выражаем нулевой предикат: $0 = X_1 \wedge \overline{X_1}$. Выражаем узнавания предмета: $x_1^a = x_2 / a(D(x_1, x_2)), \quad (a \in U)$, $x_i^a = x_i / a(D(x_1, x_i)), \ (i = \overline{1, m})$. Выражаем предикаты узнавания предикатов: $X_1^p = \forall \xi (X_i(\xi) \sim P(\xi))$. Любой постоянный предикат выражаем с помощью операций дизъюнкции и конъюнкции, примененных к нулевому предикату и предикатам узнавания предметов. Переменный предикат X_i в базисе алгебры подстановочных операций имеется. Выражаем операцию равнозначности: $\boldsymbol{F} \sim \boldsymbol{F}\boldsymbol{T} = \overline{\boldsymbol{F}}\,\overline{\boldsymbol{T}} \vee \boldsymbol{F}\boldsymbol{T}$. Выражаем квантор общности по предметному вектору $\forall \xi(\boldsymbol{F}) = \forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_m (\boldsymbol{F})$. Выражаем квантор общности по переменной $x_i\ (i = \overline{1, m}) : \forall x_i(\boldsymbol{F}) = = \bigwedge_{a \in U} x_i / a(\boldsymbol{F})$. Мы выразили все базисные элементы и все базисные операции дизъюнктивноконъюнктивной алгебры через базисные элементы и базисные операции алгебры подстановочных операций. Утверждение доказано.

Кванторы общности и существования по произвольному множеству R выражаются формулами:

$$\forall x \in A\ P(x) = \forall x (A(x) \supset P(x)),$$
$$\exists\, x \in A\ P(x) = \exists x (A(x) \wedge P(x)).$$

Квантор существования и единственности выражается в виде:

$$\exists!\, x P(x) = (\exists x\ P(x)) \wedge \forall x\, \forall y (P(x) \wedge P(x) \supset D(x, y)).$$

Кванторы общности и существования по предикату P имеют вид:

$$\forall P\ \boldsymbol{F}(P) = \bigwedge_{P \in M} \boldsymbol{F}(P);$$
$$\exists\ P\ \boldsymbol{F}(P) = \bigvee_{P \in M} \boldsymbol{F}(P).$$

Здесь $\boldsymbol{F}(P)$ – произвольно выбранная формула алгебры предикатных операций, в которую входит переменный предикат P. Кванторы общности и существования по переменному отношению P, включенному в фиксированное отношение $\boldsymbol{M}$, выражаются следующим образом:

$$\forall P \subseteq MF(P) = \bigwedge_{P \in M} \forall \xi (P(\xi) \supset M(\xi) \supset F(P)),$$
$$\exists P \subseteq MF(P) = \bigvee_{P \in M} \forall \xi (P(\xi) \supset M(\xi) \wedge F(P)).$$

2. Идентификация объектов, описываемых натуральными числами

Абстракция числовой системы широко используется на практике для целей математического описания совокупностей сигналов различного вида. Например световые излучения часто описывают в форме спектров с конечным числом линий, каждая из которых характеризуется неотрицательным числом. Ощущение цвета формально описывают в виде тройки чисел. Место работы человека характеризуется конечным набором числовых характеристик, таких как зарплата, продолжительность оплачиваемого отпуска, расстояние от места проживания до места работы и тому подобное. Как узнать, подходит та или иная совокупность сигналов, встречающихся в реальном мире, под понятие числовой системы? Эта задача может быть решена методом логической идентификации. Под логической идентификацией понимается формальное описание предикатов, характеризующее изучаемые системы преобразования сигналов в виде некоторой совокупности логических условий, связывающих эти предикаты. Компараторная идентификация систем является частным случаем логической. В рассматриваемом случае задача логической идентификации сводится к формулировке достаточного числа свойств (признаков), по которым можно было бы распознать, является ли данная совокупность сигналов числовой системой или нет. Решение этой задачи начнем с установления характеристических признаков натурального ряда чисел. Затем это же будет сделано для системы рациональных чисел и, наконец, для системы вещественных чисел.

С содержательной точки зрения натуральный ряд чисел представляет собой такую совокупность N сигналов, каждый из которых можно занумеровать, то есть снабдить собственным именем, взятым из последовательности знаков $1, 2, \ldots$. Такой процесс нумерации сигналов называется их счетом. Процесс счета можно формально охарактеризовать функцией счета $y = q(x)$, отображающей множество N в себя. Функция счета ставит в соответствие каждому сигналу x из множества N следующий за ним в натуральном ряду сигнал $y = q(x)$. Множество N и функция счета q обладают многими свойствами. Идентификация натурального ряда будет осуществлена, если удастся отобрать из числа таких свойств часть из них так, чтобы последние определяли множество N и функцию q в абстрактном смысле единственным образом (то есть с точностью до обозначений). Свойства, образующие такую исходную совокупность, называются аксиомами натурального ряда. Один из возможных вариантов аксиом натурального ряда впервые указал в 1889 году итальянский математик Пеано [1]. Эти аксиомы (записывемые нами на языке логики предикатов) будут далее использоваться при решении задачи идентификации понятия натурального ряда чисел.

Введем предикат $Q(x, y)$ на $N \times N$, соответствующий отношению, задаваемому равенством $y = q(x)$. Если $Q(x, y) = 1$, то будем говорить, что число y следует за числом x или что число x предшествует числу y. Значение предиката Q определяем для любых $x, y \in N$ следующим образом:

$$Q(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ если } y = q(x), \\ 0, \text{ если } y \neq q(x). \end{cases} \qquad (1)$$

Предикат Q называется предикатом счета. Пусть U – универсум, то есть. множество, интерпретируемое как множество всевозможных сигналов, а N – какое–нибудь его подмножество. Множество N называется натуральным рядом чисел, если на его декартовом квадрате определен предикат Q, удовлетворяющий приведенным ниже четырем аксиомам. Выражение «предикат Q определен на $N \times N$ » содержательно интерпретируем в том смысле, что реально существует некий преобразователь сигналов $t = Q(x, y)$ с двумя входами x и y и одним выходом t, который на любую пару сигналов, взятых из множества N, однозначно реагирует сигналом 0 или сигналом 1. В частном случае в роли такого преобразователя сигналов может выступать человек или автомат.

Ниже формулируются четыре аксиомы натурального ряда чисел.

1) $\forall x \in N \; \exists! y \in N \; Q(x, y)$.

Аксиома 1 означает, что за каждым числом натурального ряда следует единственное натуральное число. Она постулирует существование функции счета $y = q(x)$, отображающей множество N в N, которая соответствует предикату $Q(x, y)$.

2) $\exists! y \in N \; \forall x \in N \neg Q(x, y)$.

Аксиома 2 означает, что в натуральном ряду имеется единственное число y, у которого нет предшествующего числа. Число y, обладающее свойством 2, то есть первое в натуральном ряду, называется единицей и обозначается символом 1.

3) $\forall x_1, x_2, y \in N \; (Q(x_1, y) \wedge Q(x_2, y) \supset D(x_1, x_2))$.

Аксиома 3 означает, что в натуральном ряду каждому числу предшествует не более, чем одно число. В аксиоме 3 запись $D(x_1, x_2)$. обозначает предикат равенства на U^2.

4) $\forall M \subseteq N (M(1) \wedge \forall x, y \in N (M(x) \wedge Q(x, y) \supset M(y)) \supset \forall x \in N \; M(x))$.

Аксиома 4 представляет собой принцип математической индукции: если свойством M обладает число 1, и, кроме того, из предположения, что свойством M обладает число x, следует, что тем же свойством обладает и число $q(x)$, то свойством M обладают все натуральные числа. В аксиоме 4 символ M используется в двоякой роли: в записи $M \subseteq N$ он обозначает множество, а в записях $M(1)$, $M(x)$ и $M(y)$ он обозначает предикат, соответствующий множеству M. Предикат, соответствующий множеству M, определяется для всех $x \in U$ следующим образом:

$$M(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in M, \\ 0, \text{ если } x \notin M. \end{cases} \qquad (2)$$

В универсуме U может содержаться много разных подмножеств сигналов, которые идентифицируются как натуральные ряды чисел. Ранее мы содержательно определили предикат счета, выразив его через функцию счета. Однако предикат счета можно определить формально, не опираясь на содержательно введенное понятие функции счета, а именно: любой бинарный предикат Q на N

, удовлетворяющий аксиомам натурального ряда, называется предикатом счета. Теперь мы можем определить функцию счета формально, выразив ее через предикат счета: $y = q(x)$, если $Q(x, y) = 1$; $y \neq q(x)$, если $Q(x, y) = 0$.

Утверждение 3. Если Q на $N \times N$ и Q' на $N' \times N'$ – предикаты, удовлетворяющие аксиомам натурального ряда, то существует биекция $\varphi : N \to N'$ такая, что для всех $x, y \in N$ имеет место равенство $Q(x, y) = Q'(\varphi(x), \varphi(y))$.

Доказательство. Определим предикат Φ на $N \times N'$ следующим образом $\Phi(1, 1') = 1$; если $\Phi(x, x') = 1$ и $Q'(x', y') = 1$, то $\Phi(y, y') = 1\,(a)$. Покажем, что такое определение корректно, то есть данные условия определяют единственный предикат Φ, а также тот факт, что Φ – биекция. Предположим, некоторый предикат Φ удовлетворяет условиям (a). Рассмотрим элементы $a_1 \in N, a_1' \in N'$ такие, что $Q(1, a_1) = Q'(1', a_1') = 1$. Тогда $\Phi(a_1, a_1') = 1$. Найдем элементы a_2, a_2' такие, что $Q(a_1, a_2) = Q'(a_1, a_2') = 1$. Тогда $\Phi(a_2, a_2') = 1$. Продолжая этот процесс, получим не более чем счетные множества $M = \{1, a_1, a_2, ..., a_k, ...\}$, $M' = \{1', a_1', a_2', ..., a_k', ...\}$, причем, $\Phi(a_1, a_1') = 1$ $i = 1, 2, ..., k, ...$ Из аксиомы 4 следует $M = N, M' = N'$. Так как на каждом шаге в силу аксиомы 1 элементы a_i, a_i' определяются однозначно, и мы исчерпали множества N и N', то предикат Φ условиями (a) задается единственным образом. Для доказательства биективности Φ достаточно показать, что на каждом шаге мы получали новые элементы a_i, a_i', то есть не может существовать таких $p, s (p < i, s < i)$, что $a_i = a_p, a_i = a_s'$. Покажем это для элементов множества N. Предположим, $a_i = a_p$, $p < i$. Тогда $Q(a_{p-1}, a_p) = Q(a_{i-1}, a_p)$, откуда в силу 3 $a_{i-1} = a_{p-1}$. Точно так же показывается, что $a_{i-2} = a_{p-2}, ..., a_{i-p+1} = a_1, a_{i-p} = 1$, но так как $p < i$, в силу 2 получаем противоречие. Аналогично показывается $a_i' \neq a_s'$, $s < i$. Мы показали биективность Φ. Положим $\varphi(x) = x' <=> \Phi(x, x') = 1$ для всех $x \in N, x' \in N'$. Из способа построения предиката Φ непосредственно вытекает $Q(x, y) = Q'(\varphi(x), \varphi(y))$ для всех $x, y \in N$. Утверждение доказано.

Таким образом, система 1 – 4 полна в том смысле, что она содержит достаточный набор признаков, с помощью которых можно распознать натуральный ряд чисел в любой совокупности сигналов. При этом идентификация производится с исчерпывающей полнотой, поскольку сигналы в любых совокупностях, распознанных как натуральные ряды чисел, отличаются только обозначениями, то есть несущественно. В абстрактном смысле натуральный ряд единственный. Любое множество, фактически имеющее структуру натурального ряда, всегда может быть идентифицировано как натуральный ряд чисел с помощью аксиом 1 – 4. Вместе с тем, любое реальное множество, фактически не вписывающееся в содержательное представление о натуральном ряде, при идентификации с помощью свойств 1 – 4 не пройдет и будет отвергнуто.

3. Идентификация объектов, описываемых арифметикой натуральных чисел

Под арифметикой натуральных чисел здесь понимается натуральный ряд чисел вместе с операциями сложения и умножения и отношением линейного порядка на нем. Сначала формально введем понятие сложения натуральных чисел. Отправляясь от натурального ряда чисел, формально представленного предикатами N и Q, определяем на нем предикат $S(x, y, z)$ на N^3 следующими двумя аксиомами:

5) $\forall x \in N\ \exists u \in N (S(x, 1, u) \wedge Q(x, u))$,

6) $\forall x, y \in N\ \exists u, v, w \in N (S(x,\ u, w) Q(y, u) \wedge$
$\wedge S(x, y, v) Q(u, w))$,

которые называются аксиомами сложения натуральных чисел. Предикат S, удовлетворяющий аксиомам 5 и 6, называется предикатом сложения. Можно доказать, что для каждого натурального ряда, представленного множеством N и предикатом Q, существует единственный предикат сложения, и что он функционален. Это означает, что предикату $S(x, y, z)$ соответствует функция $z = x + y$, которая называется сложением натуральных чисел. Сложение отображает $N \times N$ на N. С использованием функций счета и сложения свойства 5 и 6 записываются более просто в виде равенств $x + 1 = q(x)$ и $x + (y + 1) = (x + y) + 1$, справедливых для всех $x, y \in N$. Очевидно, что свойства так формально определенной операции + совпадают со всеми свойствами рассматриваемой в арифметике операции сложения натуральных чисел. Выражение «множество сигналов N идентифицируется как натуральный ряд, на котором определена операция сложения чисел» содержательно означает, что на заданном множестве сигналов N действуют два преобразователя сигналов, один $N = Q(x, y)$ с двумя входами и второй $t' = S(x, y, z)$ – с тремя, выходные сигналы t и t' которых принимают значения 0 и 1 и подчиняются условиям $1 - 6$.

После того, как на множестве натуральных чисел N введено сложение S, формально вводим на нем операцию умножения. Для этого определяем на множестве C предикат $P(x, y, z)$ следующими двумя аксиомами:

7) $\forall x \in P(x, 1, x)$,

8) $\forall x, y \in N\ \exists u, v, w \in N (P(x, u, w) Q(y, u) \wedge$
$\wedge S(v, x, w) P(x, y, v))$,

называемыми аксиомами умножения натуральных чисел.

Предикат P на N^3, удовлетворяющий аксиомам 7 и 8, называется предикатом умножения. Можно доказать, что для каждого натурального ряда, характеризуемого предикатами N и Q, существует единственный предикат умножения, и что он функционален. Это означает, что предикату $P(x, y, z)$ может быть поставлена в соответствие функция $z = x * y$, которая называется умножением натуральных чисел. Умножение отображает $N \times N$ в N. С использованием функций сложения и умножения чисел свойства 7 и 8 запишутся более просто в виде равенств $x*1 = x$ и $x*(y+1) = x*y + x$, справедливых для всех $x, y \in N$. Очевидно, что свойства так определенной операции $*$ совпадают со свойствами рассматриваемой в арифметике операции умножения натуральных чисел.

Для того чтобы идентифицировать заданную совокупность сигналов N как натуральный ряд, на котором определены операции сложения и умножения чисел, достаточно убедиться в том,что на ней действуют три преобразователя сигналов Q, S и P, первый – с двумя входами, второй и третий – с тремя, реагирующие на входные сигналы двоичным ответом, поведение которых подчиняется требованиям 1 – 8. Именно благодаря действию этих трех преобразователей, совокупность сигналов N превращается в множество натуральных чисел с операциями сложения и умножения. Если действие преобразователей Q, S и P прекращается, то множество N тотчас же превращается в такую совокупность сигналов, о которой можно сказать лишь то, что ее мощность счетна. Утверждать, что сигналы совокупности N суть полноценные натуральные числа, которые можно реально сосчитывать, складывать и умножать, теперь нет никаких оснований. В данном случае на множестве N можно ввести операции сложения и умножения его элементов, но фактически они не введены

Вслед за сложением S на множестве N натуральных чисел, кроме умножения можно определить бинарный предикат порядка T. Он характеризуется единственным свойством, называемым аксиомой порядка:

9) $\forall x, y \in N (T(x, y) \sim \exists u \in N\ S(x, u, y))$.

Предикат порядка условием (a) определяется единственным образом по предикату сложения S. Если $x, y \in N$ таковы, что $T(x, y) = 1$, то будем писать $x < y$. Аксиома 9 означает, что при любых $x, y \in N$ утверждение $x < y$ равносильно утверждению о существовании такого $u \in N$, при котором $x + u = y$. Предикат порядка введен прямым определением. В отличие от этого предикаты счета, сложения и умножения натуральных чисел были введены косвенными определениями. Косвенным определением было введено также и само множество натуральных чисел N.

Прямое определение характеризуется тем, что вновь вводимое понятие явно выражается через понятия, введенные ранее. Каждое понятие представлено своим предикатом. Косвенные определения выражают вводимые ими понятия неявно, связывая их одним или несколькими логическими уравнениями (условиями) с уже введенными ранее понятиями. Множество N и предикат Q не выражаются через другие понятия, являясь первичными для арифметики, они неявно задаются системой связывающий их логических уравнений 1 – 4. Аналогично отношению $x < y$ прямым определением вводится отношение $x \leq y$. Утверждение $x \leq y$ равносильно утверждению «$x < y$ или $x = y$». С содержательной точки зрения отношения $<$ и $\leq$, равно как и отношение равенства =, можно считать заданными на множестве сигналов N. Кроме преобразователей Q, S и P, действует также и преобразователь $T(x, y)$, обладающий свойством 9, а также преобразователи, соответствующие отношениям $\leq$ и $=$.

Необходимо особо отметить, что на базе изложенной выше теории идентификации числовых объектов не представляется возможным распознавать реальные процессы, подпадающие под другие, еще не введенные формально, понятия арифметики натуральных чисел (например, вычитания и деления, четного и простого числа и тому подобного). Чтобы получить возможность распознавать и эти процессы, требуется для каждого из них предварительно ввести их характеристические свойства. Делается это просто: на основе прямого определения соответствующего понятия, уже введенного в применяемой на практике арифметике натуральных чисел. Каждое такое определение добавляется к числу аксиом (свойств), с помощью которых осуществляется идентификация объектов. При этом каждому вновь привлекаемому понятию ставится в соответствие некоторый предикат, явно выражаемый через ранее введенные предикаты. С содержательной точки зрения это означает, что на множестве сигналов, формально представляемых как натуральные числа, придется вводить все новые и новые преобразователи с двоичным ответом. Реализация этих преобразователей средствами вычислительной техники позволит искусственно воспроизводить арифметические способности человека. Возможности искусственного интеллекта будут постепенно расширяться по мере освоения машиной все новых и новых арифметических понятий. Подобным способом можно развивать не только арифметические, но и любые другие интеллектуальные способности машины.

4. Идентификация объектов, описываемых арифметикой рациональных чисел

Обозначим множество всех положительных рациональных чисел символом B. Ближайшая задача будет состоять в том, чтобы формально задать множество B такими логическими условиями, которые бы определили понятие положительного рационального числа, в точности соответствующее тому понятию, которое под тем же именем фактически используется в классической арифметике рациональных чисел. Будем предполагать, что множество N натуральных чисел, предикат Q, а также операции $+$, $*$ и отношение $<$ уже выбраны в соответствии с их формальными определениями, указанными выше. Пусть R — некоторый предикат на $N \times N \times B$, называемый предикатом деления натуральных чисел. Содержательно предикат $R(x, y, z)$ интерпретируем как связь $x * z = y$, где x и y — натуральные числа, z — положительное рациональное число. Операция, обозначенная «$*$», понимается как умножение натурального числа x на такое положительное рациональное число z, что в результате получается натуральное число y.

Ниже формулируются четыре аксиомы положительных рациональных чисел:

10) $\forall x, y, z \in N\ \forall z_2 \in B\ P(y, z_1, x) \wedge$
$\wedge R(x, y, z_2) \supset z_1 = z_2$.

Содержательно аксиома 10 означает следующее: если имеется положительное рациональное число z_1, удовлетворяющее условию $yz_1 = x$, где x, y — натуральные числа, и операция $\dfrac{x}{y} = z_2$ дает в результате положительное рациональное число z_2, то всегда $z_1 = z_2$. Иначе говоря, операция $\dfrac{x}{y} = z_2$ дает, когда *x* нацело делится на *y,* тот же результат, что и решение уравнения $yz_1 = x$. Это означает, что предикат R совпадает (после соответствующей перестановки аргументов) с предикатом P, если область значений его аргумента z_2 сузить с множества B до множества N. Следствием этого свойства является то, что все натуральные числа оказываются включенными в множество положительных рациональных чисел.

11) $\forall x, y \in N\ \exists!\, z \in B\ R(x, y, z)$.

Согласно аксиоме 11, предикату R соответствует функция $r(x, y) = z$, отображающая $N \times N$ в B. Иначе говоря, решение уравнения $y * z = x$ относительно переменной z всегда существует и единственно в области положительных рациональных чисел при условии, что x и y — натуральные числа. Функцию $r(x, y)$ будем записывать в виде дроби: $r(x, y) = \dfrac{x}{y}$. Подчеркнем, что дробь — это не положительное рациональное число, а операция над двумя натуральными числами x и y. Горизонтальная черта, разделяющая натуральные числа x и y — это просто другой способ обозначения операции r.

12) $\forall z \in B\ \exists x, y \in N\ R(x, y, z)$.

Аксиома 12 утверждает, что любое положительное рациональное число z можно представить в виде дроби $\dfrac{x}{y}$, иначе говоря, функция R сюръективна.

13) $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in N\ (\exists z \in B\ R(x_1, y_1, z) \wedge$
$\wedge R(x_2, y_2, z) \sim \exists t \in N\ P(x_1, y_1, t) \wedge P(x_2, y_1, t))$.

Аксиома 13 формально выражает известное правило, определяющее равенство дробей: для любых натуральных чисел x_1, x_2, y_1, y_2

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} <=> x_1\ y_2 = x_2\ y_1 .$$

Любое множество B, для которого существует предикат R на $N \times N \times B$, удовлетворяющий аксиомам 10-13, называется множеством положительных рациональных чисел, согласованным с натуральным рядом, определяемым множеством N и предикатом Q. Характеризуя натуральный ряд чисел, приходится указывать не только множество N, но и предикат Q. Вместе с тем, предикат P указывать не обязательно, поскольку он однозначно определяется выбором N и Q.

Пусть N и Q фиксированы, $R(x, y, z)$ и $R'(x, y, z')$ — предикаты на $N \times N \times B$ и $N \times N \times B'$, удовлетворяющие условиям 10-13. Тогда можно доказать, что существует биекция $\varphi : B \to B'$ такая, что для всех $x, y \in N$ и $z \in B$ $R(x, y, z) = R'(x, y, \varphi(z))$. Иными словами, положительные рациональные числа определяются аксиомами 10-13 с точностью до изоморфизма, то есть в абстрактном смысле однозначно.

Сложение положительных рациональных чисел выражается через сложение и умножение натуральных чисел следующим прямым определением:

$$\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in N(\frac{x_1}{x_2} + \frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1 * y_2 + x_2 * y_1}{x_2 * y_2}) . \quad (3)$$

Аналогично определяется умножение положительных рациональных чисел:

$$\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in N(\frac{x_1}{x_2} * \frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1 * y_1}{x_2 * y_2}) . \quad (4)$$

Отношение $<$ порядка на множестве положительных рациональных чисел формально вводим следующим определением:

$$\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in N(\frac{x_1}{x_2} < \frac{y_1}{y_2} \sim x_1 * y_2 < x_2 * y_1), \quad (5)$$

которое выражает его через отношение порядка и операцию умножения натуральных чисел. Нетрудно доказать, что определения операций сложения и умножения и отношения порядка для положительных рациональных чисел корректны, то есть значения этих функций и отношения не зависят от того, какими дробями представлены числа.

Переходим к формальному определению понятия произвольного рационального числа. Множество всех рациональных чисел обозначаем символом *C*. Пусть T — некоторый предикат на $B \times B \times C$. Содержательно предикат $T(x, y, z)$ интерпретируем как связь $x + z = y$, где x, y — положительные рациональные числа, z — рациональное число.

Операция, обозначенная знаком «+», в данном случае понимается как сложение положительного рационального числа x с таким рациональным числом z, что в результате получается положительное рациональное число y.

Пусть $S_B(x, y, z)$ — предикат на B^3, соответствующий отношению $x + y = z$, где x, y, z — положительные рациональные числа. Ниже формулируются четыре аксиомы рациональных чисел:

14) $\forall x, y, z_1 \in B\ \forall z_2 \in C\ S_B(y, z_1, x) \wedge T(x, y, z) \supset$

$\supset z_1 = z_2$,

15) $\forall x, y \in B\ \exists! z \in C\ T(x, y, z)$,

16) $\forall z \in C\ \exists x, y \in B\ T(x, y, z)$,

17) $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in B (\exists z \in C\ T(x_1, y_1, z) \wedge$

$\wedge T(x_2, y_2, z) \sim \exists S \in B\ S_B(x_1, y_2, s) \wedge S_B(x_2, y, s))$.

Содержательно аксиома 14 означает следующее: если имеется рациональное число z_1, удовлетворяющее условию $x + z_1 = y$, где x, y — положительные рациональные числа, и операция $x - y = z_2$ дает в результате рациональное число z_2, то всегда $z_1 = z_2$. Иначе говоря, операция $x - y = z_2$, когда существует положительная разность $x - y$, дает тот же результат, что и решение уравнения $yz_1 = x$. Это означает, что предикат T совпадает (после соответствующей перестановки аргументов) с предикатом S_B, если область значения его аргумента z_2 сузить с множества C до множества B. Следствием этого свойства является то, что все положительные рациональные числа оказываются включенными в множество рациональных чисел.

Согласно аксиоме 15, предикату T соответствует функция $t(x, y) = z$, отображающая $B \times B \to C$. Иначе говоря, решение уравнения $y + z = x$ относительно переменной z всегда существует и единственно в области рациональных чисел при условии, что x и y — положительные рациональные числа. Функцию $t(x, y)$ будем записывать в виде разности: $t(x, y) = x - y$. Аксиома 16 утверждает, что любое рациональное число z можно представить в виде разности $x - y$, иначе говоря, функция t сюръективна. Аксиома 17 формально выражает известное правило, определяющее равенство разностей: для любых положительных рациональных чисел x_1, x_2, y_1, y_2

$$x_1 - y_1 = x_2 - y_2 \Leftrightarrow x_1 + y_2 = x_2 + y_1.$$

Любое множество C, для которого существует предикат T на $B \times B \to C$, удовлетворяющий аксиомам 10-17, называется множеством рациональных чисел, согласованным с натуральным рядом, определяемым множеством N и предикатом Q. Можно доказать, что множество C и предикат T определяются множеством N и предикатом Q с точностью до обозначений, то есть в абстрактном смысле однозначно.

Сложение рациональных чисел выражается через сложение положительных рациональных чисел следующим прямым определением:

$$\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in B$$
$$(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) = (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2). \tag{6}$$

Аналогично определяется умножение рациональных чисел:

$$\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in B \quad ((x_1 - y_1) * (x_2 - y_2) =$$
$$= (x_1 * x_2) - (y_1 * y_2) - (x_1 * y_2 + y_1 * x_2)). \tag{7}$$

Отношение порядка на множестве рациональных чисел формально вводим следующим определением:

$$\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in B$$
$$(x_1 - y_1 < x_2 - y_2 \sim y_1 + x_2 < y_1 + x_2). \tag{8}$$

Число 0 вводим определением 0=11. Между различными арифметиками рациональных чисел, удовлетворяющими аксиомам 1-17, существует параллелизм понятий. Параллельные понятия в таких арифметиках отличаются между собой только обозначениями и по существу идентичны.

5. Идентификация объектов, описываемых арифметикой вещественных чисел

При формальном введении вещественных чисел будем предполагать, что множество рациональных чисел уже формально определено вместе с операциями сложения и умножения и отношением порядка. Пусть C — множество всех рациональных чисел, а + и * — суть операции сложения и умножения рациональных чисел и $<$ есть отношение порядка на C. Множество всех вещественных чисел обозначаем символом V. Пусть $L(x, u)$ — предикат на $C \times V$. С его помощью мы свяжем натуральные числа x с вещественными числами u. В роли аксиом вещественного числа будут использованы некоторые свойства предиката L. Предварительно нам потребуется понятие сечения, введенное в 1872 году немецким математиком Дедекиндом [2].

Любое подмножество множества C называется сечением, если оно удовлетворяет следующим трем условиям: 1) подмножество содержит рациональное число, но не каждое рациональное число; 2) каждое содержащееся в подмножестве рациональное число меньше каждого не содержащегося; 3) в подмножестве нет наибольшего рационального числа. Наглядно сечение α можно представить как левую часть оси рациональных чисел (рис. 1). В множестве α нет крайней правой рациональной точки. Но зато может существовать крайняя левая точка a вне сечения. Между точкой a и любой точкой сечения α можно вставить еще одну рациональную точку. Наименьшее рациональное число, не принадлежащее сечению α, называется границей сечения α. Не исключаются такие сечения, у которых нет границы в виде рационального числа.

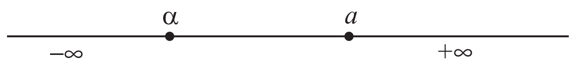

Рис. 1

Множество V и предикат L требуется связать такими условиями, чтобы для каждого вещественного числа u множеством всех корней уравнения $L(x,u)=1$ относительно переменной x являлось некоторое сечение α, причем, когда переменная u пробегает все свои значения, то множество всех корней уравнения $L(x,u)=1$ пробегает всевозможные сечения. Если существует рациональная граница a сечения α, то в роли вещественного числа u принимается рационально число a, то есть $u=a$. Такое вещественное число называется рациональным. Все рациональные числа входят в состав множества вещественных чисел V. Если для сечения α граница не существует, то вещественное число u называется иррациональным.

После пополнения множества рациональных чисел всеми иррациональными ось рациональных чисел превращается в ось вещественных чисел. В результате у каждого сечения появляется единственная граница – рациональная или иррациональная. И каждой вещественной границе всегда соотвествует единственное сечение. В силу наличия взаимно однозначного соответствия между вещественными числами и сечениями можно вещественные числа считать просто именами сечений. Оказывается, что вещественные числа, как и числа рациональные, линейно упорядочены. Это позволяет представить множество всех вещественных чисел как числовую ось.

Ниже приводится формулировка семи свойств множества V и предиката L, которые принимаются нами в роли аксиом, определяющих понятие вещественного числа.

18) $\forall u\in V\ \exists x\in C\ L(x,u)$,

19) $\forall u\in V\ \exists x\in C\,\neg L(x,u)$,

20) $\forall x,y\in C\ \forall u\in V(L(x,u)\wedge\neg L(x,u)\supset x<y)$,

21) $\forall u\in V\forall x\in C(L(x,u)\supset\exists y\in C(L(y,u)\wedge(x<y)))$,

22) $\forall u\in V\forall x\in C(\neg L(x,u)\wedge(\forall y\in C(\neg L(y,u)\supset$
$\supset x\le y))\supset x=u)$,

23) $\forall u,v\in V(\forall x\in C(L(x,u)\sim L(x,v))\supset u=v)$,

24) $\forall M\subseteq C((\exists x\in C\ M(x)\wedge\exists x\in C\neg M(x))\wedge\forall x\in C$
$\forall y\in C\ M(x)\wedge\neg M(y)\supset x<y)\wedge\forall x\in C(M(x)\supset$
$\supset\exists y\in C(M(y)\wedge(x<y)))\supset\exists u\in V\forall x\in C(M(x)\sim$
$\sim L(x,u)))$.

Аксиома 18 означает, что сечение u не пусто, то есть содержит по крайней мере одно рациональное число. Аксиома 19 означает, что в каждом сечении u содержатся не все рациональные числа. Вместе взятые, эти две аксиомы формально задают первое свойство сечения. Аксиома 20 формально характеризует второе свойство сечения: любое рациональное число, содержащееся в сечении, меньше любого рационального числа, не содержащегося в нем. Аксиома 21 формально выражает третье свойство сечения: какое бы число сечения мы не взяли, в этом же сечении найдется большее число. Аксиома 22 гласит: если сечение u имеет рациональную границу x, то оно отождествляется с рациональным числом x. Аксиома 23 утверждает, что каждому сечению соответствует не более одного вещественного числа. Одновременно с этим очевидно, что каждому вещественному числу соответствует некоторое сечение. Поэтому имеет место взаимно однозначное соответствие между всеми сечениями и всеми вещественными числами. Аксиома 24 означает, что для каждого сечения найдется соответствующее ему вещественное число. Свойства 18-24 называются аксиомами вещественных чисел.

Утверждение 4. Если L на $C\times V$ и L' на $C\times V'$ – предикаты, удовлетворяющие аксиомам 18-24, то существует биекция $\varphi:V\to V'$ такая, что для всех $x\in C$ и $u\in V$ $L(x,u)=L(x,\varphi(u))$.

Доказательство. Пусть W – система всех подмножеств множества C. Построим на множестве $W\times V$ отношение ψ_1 следующим образом: $M\psi_1 u$, если и только если $x\in C$ $(M(x)\sim L(x,u))$. Покажем, что это отношение является биективным отображением множества сечений рациональных чисел на множество V. Действительно, аксиомы 18-21 показывают, что $M\psi_1 u$ влечет выполнение для M всех свойств сечения. Из самого определения отношения ψ_1 следует, что для каждого $u\in V$ найдется единственный предикат M такой, что $M\psi_1 u$. Остается показать, что для любого предиката M, соответствующего сечению рациональных чисел, найдется единственный элемент $u\in V$ такой, что $M\psi_1 u$. Существование такого элемента вытекает из аксиомы 24, а единственность следует из 23. Таким образом, ψ_1 – биекция. Зададим отношение ψ_2 на множестве $W\times V'$ следующим образом: $M\psi_2 u$, если и только если $x\in C$ $(M(x)\sim L'(x,u'))$. Так же, как и раньше, показывается, что ψ_2 – биекция. Определим биекцию φ следующим образом: $\varphi=\psi_2\psi_1^{-1}$. Тогда из определений отношений ψ_1 и ψ_2, а также из 21 следует, что для всех $x\in C$ и $u\in V$ $L(x,u)=L'(x,\varphi(u))$. Утверждение доказано.

Утверждение 4 означает, что условия 18-24 определяют множество вещественных чисел в абстрактном смысле единственным образом. Иными словами, система условий 18-24, определяющая понятие вещественного числа, полна. Вместе с тем, используемое на практике понятие вещественного числа, очевидно, удовлетворяет всем условиям 18-24. Таким образом, условия 18-24 можно рассматривать в качестве полной системы аксиом, формально определяющей понятие вещественного числа.

Сложение вещественных чисел формально определяется следующим образом:

$$\forall x, y \in C \forall u, v \in V(x \in u \wedge y \supset v \sim x + y \in u + v). \quad (9)$$

Здесь символы u и v удобно рассматривать двояко: и как сечения, которым принадлежат рациональные числа (в таком смысле понимаем записи $x \in u$ и $y \in v$), и как вещественные числа, которые можно складывать (такое понимание естественно для записи $u+v$). Запись $x \in u$ равносильна утверждению $L(x,u)=1$. Согласно определению (9) сумма $u+v$ сечений u и v образуется из всевозможных сумм $x+y$ рациональных чисел, одно из которых x принадлежит сечению u, а другое y сечению v. Умножение вещественных чисел формально определяется так:

$$\forall x, y \in C \forall u, v \in V(x \in u \wedge y \supset v \sim xy \in uv). \quad (10)$$

Согласно определению (10) произведение $u*v$ сечений u и v образуется из всевозможных произведений $x*y$ рациональных чисел, одно из которых x принадлежит сечению u, а другое y сечению v.

Порядок $<$ на множестве вещественных чисел определяется следующим образом:

$$\forall u, v \in V(u \subset v \sim u < v). \quad (11)$$

Согласно этому определению вещественное число u меньше вещественного числа v в том и только том случае, когда сечение u строго включено в сечение v. Из условия (11) следует, что для любых вещественных чисел либо $u<v$, либо $u=v$, либо $u>v$. Это означает, что все вещественные числа вытягиваются в линию, поэтому естественно говорить о множестве всех вещественных чисел как об оси. Если ограничить сферу действия операций +,* и отношения < рациональными вещественными числами, то они переходят в соответствующие операции и отношение над рациональными числами. Операции вычитания и деления вещественных чисел вводятся аналогично сложению и умножению с помощью прямых определений. Вычитание представляет собой операцию, отображающую $V \times V$ в V, а операция деления отображает $V \times (V \setminus 0)$ в V.

Выводы

Наиболее близкую к формулируемой здесь постановку задачи мы находим в классической работе Ландау [3], опубликованной впервые в 1930 году. Насколько нам известно, до настоящего времени результаты этой работы не пересматривались и не улучшались. Главный недостаток данной работы, оцениваемой нами с точки зрения задачи идентификации (а такая задача в ней не ставится, поскольку речь там идет только об обосновании арифметики), заключается в том, что в ней все аксиомы арифметики записаны на неформализованном логическом языке, то есть на том языке, который был общепринятым среди математиков в то время, когда эта работа была написана. При решении задачи идентификации этого недостаточно: необходимо использовать язык логики предикатов. Именно это мы и осуществили в данной статье.

Аксиомы 1-9 по существу повторяют формулировки Ландау, различие заключается лишь в языке описания. Аксиомы 10-13 у Ландау вовсе отсутствуют. Это обусловлено тем, что он не различает дроби как пары натуральных чисел и как положительные рациональные числа и поэтому не вводит связывающий их предикат R. Однако при использовании языка логики предикатов сделать это необходимо. То же самое относится и к аксиомам 14-17, в которых фигурирует отсутствующий у Ландау предикат T, связывающий пары положительных рациональных чисел с соответствующими им рациональными числами. У Ландау отсутствует также предикат L, связывающий сечения с соответствующими им вещественными числами. Введение предиката L потребовало существенно иной системы аксиом для теории вещественного числа (аксиомы 18-24).

Список литературы: 1. *Клини С.* Математическая логика. – М.: Мир, 1973. – 480 с. 2. *Дедекинд Ю.* Непрерывность и иррациональные числа. Одесса: 1923. – 40 с. 3. *Ландау Э.* Основы анализа. – М.: ИЛ, 1947. – 182 с.

Поступила в редколлегию 28.08.2008

УДК 519.7

Ідентифікація об'єктів, що описуються числовими системами / М.Ф. Бондаренко, С.Ю. ШабановКушнаренко, Ю.П. ШабановКушнаренко // Біоніка інтелекту: наук.-техн. журнал. – 2008. – № 2 (69). – С. 23-31.

У статті розвивається теорія компараторної ідентифікації. Розроблено повну формальну мову компараторної ідентифікації. Розроблено методи ідентифікації об'єктів, що описуються натуральними числами, арифметиками натуральних, раціональних та дійсних чисел.

Іл. 1. Бібліогр.: 3 найм.

UDC 519.7

Identification of the objects which are described by numbers systems / M.F. Bondarenko, S.Yu. ShabanovKushnarenko, Yu.P. ShabanovKushnarenko // Bionics of Intelligence: Sci. Mag. – 2008. – № 2 (69). – P. 23-31.

In article the comparator identifications theory is develops. The comparator identifications full formal language is developed. The objects identification methods which are described by natural numbers, natural, rational and real numbers arithmetics are developed.

Fig. 1. Ref.: 3 items.