НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА УПОРЯДОЧЕННЫХ РЕШЕТКАХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ТЕЛ

Н. А. Хижняк

Задача о рассеянии электромагнитных волн на упорядоченных решетках диэлектрических и металлических тел при произвольном соотношении между размерами тел и длиной рассеиваемой волны представляет большой теоретический и прикладной интерес. За последнее время появились интересные исследования; в некоторых случаях они доведены до конечных формул — при рассмотрении рассеяния электромагнитных волн на простейших решетках металлических полос. С другой стороны, широкие возможности в исследовании простейших задач на рассеяние открыла вычислительная техника [1]. В настоящей работе рассматривается ряд общих интегральных соотношений задачи о рассеянии, позволяющих в некоторых случаях значительно упростить формулировку задач о рассеянии волн на упорядоченных системах диэлектрических тел. Показано, как можно свести задачу о рассеянии плоской волны на плоской решетке бесконечных диэлектрических полос к решению двух связанных интегро-дифференциальных уравнений, и найдено ядро этих уравнений.

1. Общие интегральные уравнения задачи о рассеянии

С помощью интегральных уравнений работы [2] можно построить интегральные уравнения задачи о рассеянии электромагнитных волн на упорядоченной решетке однотипных рассеивающих тел.

Пусть $\vec{r}_{\lambda\mu\nu}$ — радиус-вектор центра рассеивающего тела, расположенного на $\lambda\mu\nu$-м узле пространственной решетки. Пусть $\hat{\varepsilon}$ и $\hat{\mu}$ есть тензоры диэлектрических и магнитных проницаемостей вещества, из которого изготовлен рассеивающий элемент. Пусть решетка занимает полностью или частично полупространство $z > 0$ и не ограничена по направлению x и y.

Рассмотрим общее соотношение, характеризующее отражение или прохождение монохроматической волны, зависящей от времени как $e^{i\omega t}$ и падающей на решетку из полупространства $z < 0$.

Обозначим через $\vec{E}_0(\vec{r})$ и $\vec{H}_0(\vec{r})$ векторы напряженности электрического и магнитных полей этой волны, которые были бы в точке $\vec{r}$ при отсутствии рассеивающих тел.

Тогда при наличии рассеивающих тел напряженности электрического и магнитного поля равны:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \vec{E}_0(\vec{r}) + \sum_{\lambda\mu\nu} \vec{E}_{\text{расс}}(\vec{r}, \vec{r}_{\lambda\mu\nu}), \\ \vec{H}(\vec{r}) &= \vec{H}_0(\vec{r}) + \sum_{\lambda\mu\nu} \vec{H}_{\text{расс}}(\vec{r}, \vec{r}_{\lambda\mu\nu}), \end{aligned} \tag{1}$$

где суммирование производится по всем элементам решетки рассеивающих тел.

Таким образом, основной задачей является определение полей, рассеянных каждым элементом решетки в отдельности. Эти поля известны, если только известны поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ внутри каждого рассеивающего тела. Тогда

$$\vec{E}_{\text{расс}}(\vec{r}, \vec{r}_{\lambda\mu\nu}) = \frac{1}{4\pi}(\text{grad div} + k^2\varepsilon_1\mu_1)\int\limits_V\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1\right)\vec{E}(\vec{r}_{\lambda\mu\nu} + \vec{\eta}) \times$$
$$\times f(|\vec{r}_{\lambda\mu\nu} - \vec{r} + \vec{\eta}|)\,d\vec{\eta} - \frac{ik\mu_1}{4\pi}\,\text{rot}\int\limits_V\left(\frac{\mu}{\mu_1} - 1\right)\vec{H}(\vec{r}_{\lambda\mu\nu} + \vec{\eta}) \times$$
$$\times f(|\vec{r}_{\lambda\mu\nu} - \vec{r} + \vec{\eta}|)\,d\vec{\eta};$$
$$\vec{H}_{\text{расс}}(\vec{r}, \vec{r}_{\lambda\mu\nu}) = \frac{1}{4\pi}(\text{grad div} + k^2\varepsilon_1\mu_1)\int\limits_V\left(\frac{\mu}{\mu_1} - 1\right)\vec{H}(\vec{r}_{\lambda\mu\nu} + \vec{\eta}) \times$$
$$\times f(|\vec{r}_{\lambda\mu\nu} - \vec{r} + \vec{\eta}|)\,d\vec{\eta} + \frac{ik\varepsilon_1}{4\pi}\cdot\text{rot}\int\limits_V\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1\right)\vec{E}(\vec{r}_{\lambda\mu\nu} + \vec{\eta}) \times$$
$$\times f(|\vec{r}_{\lambda\mu\nu} - \vec{r} + \vec{\eta}|)\,d\vec{\eta}, \tag{2}$$

где ε_1 и μ_1 — диэлектрическая и магнитная проницаемость окружающего пространства, V — объем рассеивающего тела, функция $f(x)$ есть решение уравнения

$$\Delta f(x) + k^2\varepsilon_1\mu_1 f(x) = -4\pi\delta(x),$$

удовлетворяющее естественным граничным условиям. В рассматриваемой задаче неограниченного пространства единственным условием является условие излучения; поэтому $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \frac{e^{-ik\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\,x}}{x}. \tag{3}$$

Для нахождения полей внутри каждого рассеивающего элемента можно составить систему интегральных уравнений [2; 3] следующего вида

$$\vec{E}(\vec{r}_{lmn} + \vec{\xi}) = \{\vec{E}(\vec{r}_{lmn} + \vec{\xi})\} + \frac{1}{4\pi}(\text{grad div} + k^2\varepsilon_1\mu_1) \times$$
$$\times\int\limits_V\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1\right)\vec{E}(\vec{r}_{lmn} + \vec{\eta})\,f(|\vec{\xi} - \vec{\eta}|)\,d\vec{\eta} - \frac{ik\mu_1}{4\pi}\,\text{rot}\int\limits_V\left(\frac{\mu}{\mu_1} - 1\right)\vec{H}(\vec{r}_{lmn} + \vec{\eta}) \times$$
$$\times f(|\vec{\xi} - \vec{\eta}|)\,d\vec{\eta};$$
$$\vec{H}(\vec{r}_{lmn} + \vec{\xi}) = \{\vec{H}(\vec{r}_{lmn} + \vec{\xi})\} + \frac{1}{4\pi}(\text{grad div} + k^2\varepsilon_1\mu_1) \times$$
$$\times\int\limits_V\left(\frac{\mu}{\mu_1} - 1\right)\vec{H}(\vec{r}_{lmn} + \vec{\eta})\,f(|\vec{\xi} - \vec{\eta}|)\,d\vec{\eta} + \frac{ik\varepsilon_1}{4\pi}\,\text{rot}\int\limits_V\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1} - 1\right)\vec{E}(\vec{r}_{lmn} + \vec{\eta}) \times$$
$$\times f(|\vec{\xi} - \vec{\eta}|)\,d\vec{\eta};$$
$$\{\vec{E}(\vec{r}_{lmn} + \vec{\xi})\} = \vec{E}_0 + \sum_{\lambda\mu\nu}{}'\,\vec{E}_{\text{расс}}(\vec{r}_{lmn} + \vec{\xi}, \vec{r}_{\lambda\mu\nu});$$
$$\{\vec{H}(\vec{r}_{lmn} + \vec{\xi})\} = \vec{H}_0 + \sum_{\lambda\mu\nu}{}'\,\vec{H}_{\text{расс}}(\vec{r}_{lmn} + \vec{\xi}, \vec{r}_{\lambda\mu\nu});$$

штрих у сумм означает, что суммирование распространяется по всем рассеивающим элементам решетки, кроме рассматриваемого. Учитывая структуру рассеянных полей (2), для определения полей в lmn-м рассеивающем элементе находим следующую систему интегро-дифференциальных уравнений [4]: $(\vec{r}_{lmn}+\vec{\xi}\in V)$;

$$\vec{E}(\vec{r}_{lmn}+\vec{\xi})=\vec{E}_0(\vec{r}_{lmn}+\vec{\xi})+\frac{1}{4\pi}(\operatorname{grad}\operatorname{div}+k^2\varepsilon_1\mu_1)\times$$

$$\times\int\limits_V\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}-1\right)\left\{\sum_{\lambda\mu\nu}\vec{E}(\vec{r}_{\lambda\mu\nu}+\vec{\eta})f(|\vec{r}_{lmn}-\vec{r}_{\lambda\mu\nu}+\vec{\xi}-\vec{\eta}|)\right\}d\vec{\eta}-$$

$$-\frac{ik\mu_1}{4\pi}\operatorname{rot}\int\limits_V\left(\frac{\mu}{\mu_1}-1\right)\left\{\sum_{\lambda\mu\nu}\vec{H}(\vec{r}_{\lambda\mu\nu}+\vec{\eta})f(|\vec{r}_{lmn}-\vec{r}_{\lambda\mu\nu}+\vec{\xi}-\vec{\eta}|)\right\}d\vec{\eta};\tag{4}$$

$$\vec{H}(\vec{r}_{lmn}+\vec{\xi})=\vec{H}_0(\vec{r}_{lmn}+\vec{\xi})+\frac{1}{4\pi}(\operatorname{grad}\operatorname{div}+k^2\varepsilon_1\mu_1)\times$$

$$\times\int\limits_V\left(\frac{\mu}{\mu_1}-1\right)\left\{\sum_{\lambda\mu\nu}\vec{H}(\vec{r}_{\lambda\mu\nu}+\vec{\eta})f(|\vec{r}_{lmn}-\vec{r}_{\lambda\mu\nu}+\vec{\xi}-\vec{\eta}|)\right\}d\vec{\eta}+$$

$$+\frac{ik\varepsilon_1}{4\pi}\operatorname{rot}\int\limits_V\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}-1\right)\left\{\sum_{\lambda\mu\nu}\vec{E}(\vec{r}_{\lambda\mu\nu}+\vec{\eta})f(|\vec{r}_{lmn}-\vec{r}_{\lambda\mu\nu}+\vec{\xi}-\vec{\eta}|)\right\}d\vec{\eta}.\tag{5}$$

Уравнения (4) и (5) и являются исходными для дальнейшего анализа. Заметим лишь, что эти уравнения представляют собой совершенно строгую систему, причем число уравнений соответствует числу рассеивающих элементов решетки.

2. Рассеяние плоских волн на плоских диэлектрических решетках

Для иллюстрации возможных путей исследования системы уравнений (4) и (5) рассмотрим простейшие случаи рассеяния плоской электромагнитной волны на плоской решетке рассеивающих элементов.

В этом случае все центры рассеивающих элементов расположены в плоскости $z=0$. Поля $\vec{E}_0$ и $\vec{H}_0$ действуют на все центры лишь с некоторым сдвигом фаз, поэтому поля в отдельных элементах отличаются лишь фазовым множителем

$$\vec{E}(\vec{r}_{mn})=\vec{E}(\vec{r}_{00})e^{i\psi_{mn}},$$

и система уравнений (4) и (5) сводится к двум интегро-дифференциальным уравнениям с новым, модифицированным ядром $(\vec{r}\in V)$:

$$\vec{E}(\vec{r})=\vec{E}_0(\vec{r})+\frac{1}{4\pi}(\operatorname{grad}\operatorname{div}+k^2\varepsilon_1\mu_1)\int\limits_V\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}-1\right)\vec{E}(\vec{r}')\times$$

$$\times f_1(|\vec{r}-\vec{r}'|)\,d\vec{r}'-\frac{ik\mu_1}{4\pi}\operatorname{rot}\int\limits_V\left(\frac{\mu}{\mu_1}-1\right)\vec{H}(\vec{r}')f_1(|\vec{r}-\vec{r}'|)\,d\vec{r}',\tag{6}$$

$$\vec{H}(\vec{r})=\vec{H}_0(\vec{r})+\frac{1}{4\pi}(\operatorname{grad}\operatorname{div}+k^2\varepsilon_1\mu_1)\int\limits_V\left(\frac{\mu}{\mu_1}-1\right)\vec{H}(\vec{r}')\times$$

$$\times f_1(|\vec{r}-\vec{r}'|)\,d\vec{r}'+\frac{ik\varepsilon_1}{4\pi}\operatorname{rot}\int\limits_V\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}-1\right)\vec{E}(\vec{r}')f_1(|\vec{r}-\vec{r}'|)\,d\vec{r}';\tag{7}$$

$$f_1(|\vec{r}-\vec{r}'|)=\sum_{lm}e^{i\psi_{lm}}\frac{\exp\left|-ik\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\,|\vec{r}_{lm}+\vec{r}'-\vec{r}|\right|}{|\vec{r}_{lm}+\vec{r}'-\vec{r}|}.$$

В случае $k \to 0$ суммы, стоящие под интегралами, приводятся к известным в теории кристаллических решеток суммам Эвальда. В некоторых частных случаях указанные суммы можно свернуть и при $k \neq 0$ получить интегральные уравнения, допускающие аналитические решения.

Однако прежде чем переходить к исследованию конкретных задач, сделаем ряд замечаний. Уравнения (6) и (7) по своей структуре и смыслу являются интегральными уравнениями Фредгольма. В соответствии с этим мы можем говорить о распространении в системе собственных или вынужденных электромагнитных колебаний.

Решения этих уравнений при $E_0 = H_0 = 0$ возможны лишь при некоторых значениях фазовых множителей. Обозначим этот множитель через $\lambda = e^{i\psi}$. Тогда можно положить $\psi_{lm} = \psi_0 + \theta_{lm}$, где θ_{lm} — фаза, изменяющаяся на целое кратное 2π при переходе от одного узла решетки к другому. Смысл величины ψ_0 очевиден, она определяет фазовую скорость поверхностных волн в решетке. При решении вынужденной задачи, когда $\vec{E}_0 \neq 0$, $\vec{H}_0 \neq 0$, фазовый сдвиг полей в узлах решетки определяется полями $\vec{E}_0$ и $\vec{H}_0$. Поэтому можно переформулировать основные теоремы теории Фредгольма о решениях уравнений первого и второго рода для случая рассеяния электромагнитных волн на упорядоченных решетках и высказать аналогичные теоремы о связи собственных и вынужденных колебаний в системе, а также сформулировать условия возбуждения поверхностных волн в решетках. Если рассеивающими элементами являются полосы или стержни, ось которых параллельна оси x-ов, уравнения допускают дальнейшее упрощение. Пусть волна падает на решетку таким образом, что не содержит переменной x. Тогда результирующее поле также не содержит переменной x, и в уравнениях (6) и (7) возможно одно интегрирование:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ik\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\,|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,dx = 2\int_{1}^{\infty} \frac{e^{-iks\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\sqrt{(y-y')^2+(z-z')^2}}}{\sqrt{s^2-1}}\,ds.$$

Дальнейшее упрощение можно получить в случае, когда расссеивающие элементы имеют в направлении z размеры малые по сравнению с L-периодом структуры по y и длиной волны в окружающем пространстве λ. Тогда

$$\sqrt{(nL+y-y')^2+(z-z')^2} = nL + y - y'$$

для значений суммы с $n \neq 0$. Учитывая эти обстоятельства, уравнение (6) — (7) приведем к окончательному виду:

$$\vec{E}(\vec{\eta}) = \vec{E}_0 + \frac{1}{4\pi}(\operatorname{grad}\operatorname{div} + k^2\varepsilon_1\mu_1)\int_s \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}-1\right)\vec{E}(\vec{\xi})\,\Phi(|\vec{\eta}-\vec{\xi}|)\,d\vec{\xi} - \frac{ik\mu_1}{4\pi}\operatorname{rot}\int_s\left(\frac{\mu}{\mu_1}-1\right)\vec{H}(\vec{\xi})\,\Phi(|\vec{\eta}-\vec{\xi}|)\,d\vec{\xi}; \tag{8}$$

$$\vec{H}(\vec{\eta}) = \vec{H}_0 + \frac{1}{4\pi}(\operatorname{grad}\operatorname{div} + k^2\varepsilon_1\mu_1)\int_s \left(\frac{\mu}{\mu_1}-1\right)\vec{H}(\vec{\xi})\,\Phi(|\vec{\eta}-\vec{\xi}|)\,d\vec{\xi} + \frac{ik\varepsilon_1}{4\pi}\operatorname{rot}\int_s\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}-1\right)\vec{E}(\vec{\xi})\,\Phi(|\vec{\eta}-\vec{\xi}|)\,d\vec{\xi}, \tag{9}$$

где интегрирование в плоскости yOz производится по поперечному сечению стержня. Функция $\Phi(|\vec{\eta}-\vec{\xi}|)$ с учетом предыдущих замечаний имеет вид

$$\Phi(|\vec{\eta}-\vec{\xi}|)=\pi i H_0^{(2)}(k\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\,|\vec{\xi}-\vec{\eta}|)-$$

$$-4\int_1^{\infty}\frac{ds}{\sqrt{s^2-1}}\;\frac{\exp\{-ik\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\,s[L+(\xi-\eta)_4]+\psi_0\}}{1-\exp\{-ik\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\,s[L+(\xi-\eta)_4+\psi_0\}},$$

где $H_0^{(2)}$ — функция Ханкеля второго рода нулевого порядка. Здесь первое слагаемое характеризует функцию Грина уравнений Максвелла для двухмерных задач рассеяния [5], а второе слагаемое учитывает влияние решетки. Фазовый множитель ψ_0 определяется просто через угол падения плоской волны на решетку:

$$\psi_0=ik\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\,L\cos\vartheta,$$

где ϑ — угол падения плоской волны в плоскости yOz. При этом тензоры диэлектрических и магнитных проницаемостей стержней должны быть таковы, чтобы при рассеянии не нарушался двухмерный характер задачи. В интегральных уравнениях (8) — (9) производные по x тождественно равны нулю, и трехмерная запись оставлена лишь для симметрии.

Таким образом, из ядра интегральных уравнений выделено слагаемое, характеризующее рассеяние волн на отдельном элементе, и интерференционные слагаемые, обусловленные влиянием других элементов решетки.

ЛИТЕРАТУРА

1. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов, ЖТФ, 32 4, 1962.
2. Н. А. Хижняк, ЖТФ, 28, 7, 1958.
3. К. С. Шифрин. Рассеяние света в мутной среде, Гостехтеориздат, М.— Л, 1951
4. Н. А. Хижняк. ЖТФ, 27, 9, 1957.
5. Н. А. Хижняк. ЖТФ, 29, 5, 1959.