

ПОСТРОЕНИЕ СТРУКТУР РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОЙ ДИФФУЗИИ

ВЫХОДЦЕВ Е.И.

Рассматриваются основные типы краевых задач для уравнения турбулентной диффузии, возникающие в задачах экологического прогнозирования. Приводятся общие структуры решения этих задач.

В полуэмпирической теории уравнение турбулентной диффузии для приземного слоя воздуха записывается в виде:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u_x \frac{\partial q}{\partial x} + u_y \frac{\partial q}{\partial y} - w \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial q}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial q}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial q}{\partial z} \right) - \alpha q, \quad (1)$$

где q — концентрация примеси в атмосфере; t — время; x, y, z — координаты; u_x, u_y — составляющие средней скорости перемещения примеси вдоль осей OX, OY соответственно; w — скорость оседания частиц примеси; k_x, k_y, k_z — коэффициенты турбулентной диффузии по направлениям x, y, z ; α — коэффициент, определяющий изменение концентрации за счет превращения примеси ($\alpha \geq 0$). Это уравнение выражает в дифференциальной форме закон сохранения субстанции q .

Рассмотрим распространение примеси в атмосфере от наземного источника, мощность которого задается функцией $Q(x, y, z, t)$. Уравнение (1) примет вид

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u_x \frac{\partial q}{\partial x} + u_y \frac{\partial q}{\partial y} - w \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial q}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial q}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial q}{\partial z} \right) - \alpha q + Q. \quad (2)$$

Обычно [1] краевая задача для уравнения (2) формулируется для полупространства $z \geq z_0$, где z_0 — так называемая “высота шероховатости” поверхности Земли. В ряде работ [1–3] концентрацию q предлагается подчинить начальному условию:

$$q|_{t=0} = 0; \quad (3)$$

краевому условию при $z = z_0$:

$$k_z \frac{\partial q}{\partial z} + wq - \beta q|_{z=z_0} = 0 \quad (4)$$

и краевому условию на бесконечности:

$$q|_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (5)$$

В (4) β — постоянная, характеризующая взаимодействие между диффундирующей примесью и подстилающей поверхностью. При $\beta = 0$ условие (4) означает, что поток примеси через поверхность Земли равен нулю, так что вся примесь остается в воздухе, т.е. диффундирующие частицы отражаются от поверхности. При $\beta = \infty$ условие (4) принимает вид $q|_{z=z_0} = 0$; это означает, что частицы примеси, достигающие поверхности Земли, поглощаются ею. При $0 < \beta < \infty$ (4) означает, что частицы примеси, достигающие поверхности Земли, могут как отражаться, так и поглощаться ею.

Сложность краевой задачи (2) — (5) заключается в том, что она рассматривается в бесконечной области. Во многих работах [2, 4] предлагается переходить от бесконечной области к конечной, вводя так называемую область экологического прогнозирования. Под этой областью мы будем понимать некоторый цилиндр $\Omega = C \times [z_0, H_1]$ с образующей

параллельной оси Oz , где $C \subset R^2$, $C = \{(x, y) | \varphi(x, y) \geq 0\}$. Разобьем границу $\partial\Omega$ области Ω на три участка:

$\partial\Omega_1 = \{(x, y, z) | \varphi(x, y) = 0, z_0 \leq z \leq H_1\}$ — боковая поверхность цилиндра Ω ;

$\partial\Omega_2 = \{(x, y, z) | \varphi(x, y) \geq 0, z = H_1\}$ — верхняя “крышка” цилиндра Ω ;

$\partial\Omega_3 = \{(x, y, z) | \varphi(x, y) \geq 0, z = z_0\}$ — нижняя “крышка” цилиндра Ω .

Очевидно, $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^3 \partial\Omega_i$, $\text{int } \partial\Omega_i \cap \text{int } \partial\Omega_j = \emptyset$, $i \neq j$.

На каждом из участков $\partial\Omega_i$ задаются краевые условия вида

$$L_i q|_{\partial\Omega_i} = \Phi_i^0, \quad (6)$$

где L_i — некоторые дифференциальные операторы нулевого или первого порядка; Φ_i^0 — заданные на $\partial\Omega_i$ функции.

В настоящее время наиболее распространенными для решения краевых задач являются приближенные аналитические и сеточные методы. Преимущество аналитических методов состоит в том, что решение краевой задачи получается не в виде массива чисел, как в сеточных методах, а в аналитическом виде (в виде конечной суммы), что облегчает исследование свойств решения и его дальнейшее использование для получения других характеристик исследуемого процесса. Трудность реализации, например, проекционного метода Бубнова-Галеркина состоит в том, что необходимо строить координатные последовательности, удовлетворяющие краевым условиям (6) [5]. Достаточ-

но универсальный метод построения координатных функций, удовлетворяющих любым краевым условиям, был предложен В.Л. Рвачевым. В методе R -функций предлагается строить общие структуры решений, т.е. такие пучки функций, которые точно удовлетворяют всем краевым условиям. Рассмотрим структуры решения основных краевых задач [6]:

а) структура решения, учитывающая условие Дирихле $u|_{\partial\Omega} = \varphi_0$, имеет вид

$$u = \varphi + \omega\Phi; \quad (7)$$

б) структура решения, учитывающая условие Неймана $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = \varphi_0$, имеет вид

$$u = \omega\varphi + \Phi_1 - \omega D_1 \Phi_1 + \omega^2 \Phi_2; \quad (8)$$

в) структура решения, учитывающая краевое условие третьего рода $a_0 \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + b_0 u|_{\partial\Omega} = \varphi_0$, $a_0 > 0$, имеет вид

$$u = \frac{\omega\varphi}{a} + \Phi_1 - \omega D_1 \Phi_1 - \frac{b}{a} \omega \Phi_1 + \omega^2 \Phi_2; \quad (9)$$

г) структура решения, учитывающая смешанные краевые условия $u|_{\partial\Omega_1} = \varphi_0$, $a_0 \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + b_0 u|_{\partial\Omega_2} = \psi_0$, $a_0 > 0$, имеет вид

$$u = \omega_1 \Phi_1 + \varphi + \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \left[\frac{\psi}{a} + \omega_2 \Phi_2 - D_1^{(2)}(\omega_1 \Phi_1) - D_1^{(2)}\varphi - \frac{b\omega_1}{a} \Phi_1 - \frac{b\varphi}{a} \right]. \quad (10)$$

Здесь $\omega_i = 0$ – один раз нормализованное уравнение границы $\partial\Omega_i$, $\omega_i \in C^2(\Omega)$; $\varphi = EC\varphi_0$, $\psi = EC\psi_0$, $a = ECa_0$, $b = ECB_0$, $D_1 = \frac{\partial\omega}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial\omega}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z}$,

Φ , Φ_1 , Φ_2 – неопределенные компоненты структуры.

На практике наиболее часто встречаются так называемые смешанные краевые задачи, когда на различных участках границы заданы различные краевые условия. Задачи именно такого типа ставятся для уравнения (2). Пусть область Ω такова, что на боковой поверхности цилиндра можно считать, что $q \approx 0$. Тогда в наиболее общем виде краевые условия (6) можно записать так:

$$q|_{\partial\Omega_1} = 0, \quad (11)$$

$$k_z \frac{\partial q}{\partial z}|_{\partial\Omega_2} = 0, \quad (12)$$

$$k_z \frac{\partial q}{\partial z} + wq - \beta q|_{\partial\Omega_3} = 0. \quad (13)$$

Пусть $\omega_i = 0$ – нормированное на $\partial\Omega_i$ уравнение участка $\partial\Omega_i$, $i = 1, 2, 3$, границы $\partial\Omega$, т.е.

$$\omega_i|_{\partial\Omega_i} = 0, \quad \frac{\partial\omega_i}{\partial \mathbf{n}_i}|_{\partial\Omega_i} = 1, \quad i = 1, 2, 3.$$

Кроме того, предположим, что $\omega_1 \geq 0$ на $\Omega \cup \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_3$, $\omega_3 \geq 0$ на $\Omega \cup \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$, причем знак равенства возможен лишь в концевых точках $\partial\Omega_i$.

Одним из способов построения структур решения, удовлетворяющих условию (11)-(13), является использование обобщенной формулы Эрмита.

В соответствии с (7)-(9) общие структуры, учитывающие на $\partial\Omega_i$ краевые условия (11)-(13), имеют соответственно вид:

$$q_1 = \omega_1 \Phi_1 = B_1(\omega_1, \Phi_1), \quad (14)$$

$$q_2 = \Phi_2 - \omega_2 D_1^{(2)} \Phi_2 + \omega_2^2 \Phi_3 = B_2(\omega_2, \Phi_2, \Phi_3), \quad (15)$$

$$q_3 = \Phi_4 - \omega_3 D_1^{(3)} \Phi_4 - \frac{w-\beta}{k_z} \omega_3 \Phi_4 + \omega_3^2 \Phi_5 = B_3(\omega_3, \Phi_4, \Phi_5), \quad (16)$$

$$\text{где } D_k^{(i)} v = \left(\frac{\partial\omega_i}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial\omega_i}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial\omega_i}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} \right)^k v.$$

Тогда общая структура решения, удовлетворяющая условиям (11)-(13), может быть записана в виде

$$q = \frac{\frac{B_1}{\omega_1} + \frac{B_2}{\omega_2^2} + \frac{B_3}{\omega_3^2}}{\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_3^2}} = \frac{\omega_2^2 \omega_3^2 B_1 + \omega_1 \omega_3^2 B_2 + \omega_1 \omega_2^2 B_3}{\omega_2^2 \omega_3^2 + \omega_1 \omega_3^2 + \omega_1 \omega_2^2}. \quad (17)$$

Недостатком структуры (17) является наличие пяти неопределенных компонент. Попробуем упростить эту структуру. Рассмотрим числитель выражения (17):

$$\begin{aligned} & \omega_2^2 \omega_3^2 B_1 + \omega_1 \omega_3^2 B_2 + \omega_1 \omega_2^2 B_3 = \omega_1 \omega_2^2 \omega_3^2 \Phi_1 + \\ & + \omega_1 \omega_3^2 [\Phi_2 - \omega_2 D_1^{(2)} \Phi_2 + \omega_2^2 \Phi_3] + \\ & + \omega_1 \omega_2^2 \left[\Phi_4 - \omega_3 D_1^{(3)} \Phi_4 - \frac{w-\beta}{k_z} \omega_3 \Phi_4 + \omega_3^2 \Phi_5 \right]. \end{aligned}$$

Объединив слагаемые, содержащие $\omega_1 \omega_2^2 \omega_3^2$, получим

$$\begin{aligned} q = & \frac{1}{\omega_2^2 \omega_3^2 + \omega_1 \omega_3^2 + \omega_1 \omega_2^2} \left\{ \omega_1 \omega_2^2 \omega_3^2 \Phi' + \right. \\ & + \omega_1 \omega_3^2 [\Phi_2 - \omega_2 D_1^{(2)} \Phi_2] + \\ & + \omega_1 \omega_2^2 \left[\Phi_4 - \omega_3 D_1^{(3)} \Phi_4 - \frac{w-\beta}{k_z} \omega_3 \Phi_4 \right] \left. \right\}, \end{aligned} \quad (18)$$

где $\Phi' = \Phi_1 + \Phi_3 + \Phi_5$. Как видно, структура (18) содержит уже три неопределенные компоненты.

Построим структуры решения для некоторых частных случаев краевых условий (11)-(13).

1. Рассмотрим случай, когда гравитационная скорость оседания частиц не учитывается, т.е. $w = 0$.

1.1. Предположим, что все частицы диффундирующего вещества, достигающие поверхности Земли, отражаются ($\beta = 0$). Краевые условия имеют вид:

$$q|_{\partial\Omega_1} = 0, \quad (19)$$

$$k_z \frac{\partial q}{\partial z} \Big|_{\partial\Omega_2} = k_z \frac{\partial q}{\partial z} \Big|_{\partial\Omega_3} = 0. \quad (20)$$

Структура, учитывающая условия (19), (20), может быть получена из (18) при $w = \beta = 0$. Приведем другой способ построения такой структуры, используя формулу (10). Краевые условия (20) можно

записать в виде $k_z \frac{\partial q}{\partial z} \Big|_{\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3} = 0$, а в качестве

нормализованного уравнения участка $\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3$ взять $\omega_2 \sim_n \omega_3$, где $\sim_n - R$ -равнозначность. Тогда структуру, учитывающую условия (19), (20), можно получить из (10) при $\varphi = \psi = b = 0$ и $a = k_z$, заменив ω_2 на $\omega_2 \sim_n \omega_3$:

$$q = \omega_1 \Phi_1 +$$

$$+ \frac{\omega_1(\omega_2 \sim_n \omega_3)}{\omega_1 + \omega_2 \sim_n \omega_3} \left[(\omega_2 \sim_n \omega_3) \Phi_2 - D_1^{(2)}(\omega_1 \Phi_1) \right]. \quad (21)$$

Структура (21) содержит две неопределенные компоненты Φ_1, Φ_2 . Оператор $D_1^{(2)}$ в (21) строится по функции $\omega_2 \sim_n \omega_3$.

1.2. Пусть все частицы диффундирующего вещества, достигающие поверхности Земли, поглощаются, т.е. $\beta = \infty$. Краевые условия имеют вид:

$$q|_{\partial\Omega_1} = q|_{\partial\Omega_3} = 0, \quad (22)$$

$$k_z \frac{\partial q}{\partial z} \Big|_{\partial\Omega_2} = 0. \quad (23)$$

Структуру, учитывающую условия (22), (23), можно получить из (17), выбрав $q_3 = \omega_3 \Phi_4 = B_3(\omega_3, \Phi_4)$. В этом случае мы приходим к структуре

$$q = \frac{1}{\omega_2^2 \omega_3^2 + \omega_1 \omega_3^2 + \omega_1 \omega_2^2} \left\{ \omega_1 \omega_2^2 \omega_3^2 \Phi' + \right. \\ \left. + \omega_1 \omega_3^2 [\Phi_2 - \omega_2 D_1^{(2)} \Phi_2] + \omega_1 \omega_2^2 \omega_3 \Phi_4 \right\}, \quad (24)$$

где $\Phi' = \Phi_1 + \Phi_3$.

Как и в п. 1.1, эту структуру можно построить, используя формулу (10), если краевые условия (22) записать в виде $q|_{\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_3} = 0$, а в качестве нормализованного уравнения участка $\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_3$ взять $\omega_1 \sim_n \omega_3$. Тогда структуру, учитывающую условия

(22), (23), можно получить из (10) при $\varphi = \psi = b = 0$ и $a = k_z$, заменив ω_1 на $\omega_1 \sim_n \omega_3$:

$$q = (\omega_1 \sim_n \omega_3) \Phi_1 +$$

$$+ \frac{(\omega_1 \sim_n \omega_3) \omega_2}{\omega_1 \sim_n \omega_3 + \omega_2} \left[\omega_2 \Phi_2 - D_1^{(2)}((\omega_1 \sim_n \omega_3) \Phi_1) \right]. \quad (24)$$

Структура (21) содержит две неопределенные компоненты Φ_1, Φ_2 , а оператор $D_1^{(2)}$ строится по функции ω_2 .

1.3. При $0 < \beta < \infty$ краевые условия имеют вид

$$q|_{\partial\Omega_1} = 0, \quad k_z \frac{\partial q}{\partial z} \Big|_{\partial\Omega_2} = 0, \quad k_z \frac{\partial q}{\partial z} - \beta q \Big|_{\partial\Omega_3} = 0.$$

Структура, учитывающая эти условия, может быть получена из (18) при $w = 0$.

2. Рассмотрим теперь случай, когда гравитационная скорость оседания частиц учитывается, т.е. $w \neq 0$.

2.1. Если все частицы диффундирующего вещества, достигающие поверхности Земли, поглощаются, т.е. $\beta = \infty$, то краевые условия аналогичны п.1.2, а структура имеет вид (24).

2.2. Если же все частицы диффундирующего вещества, достигающие поверхности Земли, отражаются, то $\beta = 0$, а краевые условия имеют вид

$$q|_{\partial\Omega_1} = 0, \quad k_z \frac{\partial q}{\partial z} \Big|_{\partial\Omega_2} = 0, \quad k_z \frac{\partial q}{\partial z} + wq \Big|_{\partial\Omega_3} = 0.$$

Структура, учитывающая эти условия, может быть получена из (18) при $\beta = 0$.

2.3. При $0 < \beta < \infty$ краевые условия имеют самый общий вид, а структура — вид (18).

Таким образом, мы получили пучки функций, которые удовлетворяют заданным краевым условиям. Далее для аппроксимации неопределенных компонент структуры можно воспользоваться методом Бубнова-Галеркина для нестационарных задач, считая, что $\Phi_i = \Phi_i(x, y, z, t)$ [5].

Литература: 1. *Атмосферная диффузия и загрязнение воздуха* // Под ред. А.С. Мони́на. М.: ИЛ, 1962. 512 с. 2. *Берлянд М.Е.* Прогноз и регулирование загрязнения атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1985. 277 с. 3. *Атмосферная турбулентность и моделирование распространения примесей* // Под ред. Ф.Т.М. Ньюста́дта и Х. Ван До́па. Л.: Гидрометеиздат, 1985. 351с. 4. *Марти́нсон Л.К., Малов Ю.И.* Дифференциальные уравнения математической физики. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 368 с. 5. *Михли́н С.Г.* Численная реализация вариационных методов. М.: Наука, 1966. 432 с. 6. *Рвачев В.Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. К.: Наук. думка, 1982. 552 с.

Поступила в редколлегию 24.07.2002

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Дикарев В.А.

Выходцев Евгений Иванович, аспирант кафедры ПМ ХНУРЕ. Научные интересы: математическая физика, теория R-функций, компьютерное моделирование. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. (0572) 40-94-36.