УДК 519.21

## СТАБИЛИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ НА МНОЖЕСТВЕ ГРАФОВ С ОБЩИМ ЦЕНТРОМ

*ДИКАРЕВ В.А., ТАРГОНИ Т.О.*

Ставится и решается задача о стабилизации процессов случайных блужданий на множестве графов, имеющих непустое пересечение (центр). Устанавливается, что для любой заданной эволюции центра можно подобрать возмущения графов, не входящих в центр, таким образом, чтобы эволюция процесса случайных блужданий на множестве графов была реализована за любой промежуток времени, с любой точностью.

### 1. Введение

В последние десятилетия процессы случайных блужданий на графах изучались многими специалистами в области дискретного и случайного анализа. Математические модели этих процессов используются в экономике и при исследовании систем передачи данных, в частности сети INTERNET (см., например, работы [1-7] и содержащуюся в них библиографию). В этой статье рассмотрен процесс случайных блужданий на множестве графов $\{\Gamma_i\}$ с общим центром. Общим центром называется граф, имеющий непустые пересечения со всеми графами $\Gamma_i$ из $\{\Gamma_i\}$. Во многих случаях процесс случайных блужданий на общем центре является в каком-то смысле более предпочтительным (доминирующим) по сравнению со случайными блужданиями на множестве вершин, которые общему центру не принадлежат.

### 2. Постановка задачи

*Целью* исследования является решение задачи о стабилизации процесса случайных блужданий на множестве графов с общим центром. Эволюция процесса случайных блужданий на общем центре задана. Требуется установить, при выполнении каких условий стабилизация процесса случайных блужданий на всех графах может быть достигнута за заданный промежуток времени. Эта задача является продолжением исследований, описанных в работах [8, 9]. В них была решена задача о стабилизации распределений неоднородного марковского процесса при возмущениях отдельных его частей (фрагментов). Было установлено, что при многократных возмущениях фрагментов вероятности состояний процесса либо принимают предельные значения (фокусировка), либо локализуются вблизи них ($\sigma$-фокусировка). Стабилизацией называется любой из этих случаев. Основными условиями, которые приводят к стабилизации, являются быстро изменяющиеся во времени факторы, вызывающие сильные возмущения основных характеристик процесса. Было установлено, что эти возмущения можно выбрать так, чтобы стабилизация была, на любом фрагменте, реализована на любое заданное распределение за сколь угодно малый промежуток времени. В [8] была решена задача о стабилизации процесса с конечным или счетным числом состояний. В [9] задача о стабилизации была решена для процесса, фазовое пространство которого является континуальным. В [8,9] рассматривались, в основном, такие сильные возмущения, что на возмущенных фрагментах стабилизация достигалась уже при первом возмущении. Далее при стабилизации процессов случайных блужданий на графах будет использоваться подход, предложенный в [8,9].

Изучим процесс случайных блужданий на множестве $\{\Gamma_i\}$ $(i = 0,1,\ldots,n)$ графов с общим центром. Общим центром (центром множества $\{\Gamma_i\}$) будем называть такой граф $\Gamma_0$ $(\Gamma_0 \in \{\Gamma_i\})$, который имеет непустые пересечения со всеми графами из $\{\Gamma_i\}$: $\{\Gamma_0 \cap \Gamma_i\} \neq \varnothing$, $i = 0,1,\ldots,n$. Предполагается, что: число вершин в $\bigcup_{i=0}^{n}\Gamma_i$ конечно; множество $\{\Gamma_i\}$ имеет единственный центр. Далее распределением процесса случайных блужданий на графе $\Gamma$ для случая, когда процесс стационарен (не зависит от времени), будем называть стационарное распределение стохастической матрицы $P = \|p_{ij}\|$, здесь $i$, $j$ – номера вершин графа $\Gamma$; $p_{ij}$ – вероятности перехода из $i$ в $j$.

Рассматриваемые далее процессы случайных блужданий нестационарны (вероятности перехода $p_{ij} = p_{ij}(t)$ изменяются во времени). Предполагается, что стохастические матрицы $P = P(t)$, описывающие случайные блуждания на графе, при любом фиксированном $t$ имеют стационарное распределение. Известно, что если матрица $P$ не зависит от времени и имеет стационарное распределение, то любое начальное распределение, заданное на графе с такой матрицей, с ростом *t* стремится к ее стационарному распределению. Если же $P = P(t)$ зависит от времени, то даже когда при всех фиксированных $t$ $P(t)$ имеет стационарное распределение, ее вектор распределения $\vec{p}(t)$ при $t \to \infty$, вообще говоря, не стремится к какому-либо пределу. Однако если $P(t)$ изменяется во времени «достаточно медленно», то через некоторый промежуток времени распределение вероятностей $\vec{p}(t)$ процесса случайных блужданий с матрицей $P(t)$ также будет медленно эволюционировать во времени.

Изучим процесс случайных блужданий на множестве графов с общим центром в предположении, что вероятностные связи на каждом $\Gamma_i \in \{\Gamma_i\}$, включая центр, подвергаются сильным возмущениям. Подчеркнем, что в отличие от подхода, описанного в [9], теперь возмущениям подвергаются не все графы из множества $\{\Gamma_i\}$, а лишь отдельные его элементы. Эволюция процесса рассматривается при $t \in [s_0, t_0)$, $t_0 \le \infty$.

Перечислим условия, которым должны удовлетворять распределения, действующие на множестве графов $\{\Gamma_i\}$ с общим центром.

1. Предполагается, что взаимное положение всех графов из $\{\Gamma_i\}$ не изменяется с изменением времени. Каждый граф $\Gamma_i$ многократно подвергается фокусирующим возмущениям.

2. После каждого возмущения $\Gamma_i$ вектор распределения $\vec{p}_i(t)$ процесса на нем не изменяется до следующего возмущения $\Gamma_i$ или его части. Это условие имеет место и в том случае, когда между двумя последовательными возмущениями графа $\Gamma_i$ возмущениям подвергаются графы, имеющие с $\Gamma_i$ пустые пересечения.

Рассмотрим сначала случай, когда возникающие после каждого возмущения $\Gamma_i$ векторы распределения будут коллинеарны.

3. Условия согласования. Пусть $\Gamma_i$, $\Gamma_j$ – любые графы из $\{\Gamma_i\}$, для которых $\{\Gamma_0 \cap \Gamma_i\} = \Gamma_{ij} \ne \varnothing$, $\vec{p}_{ij}$ – вектор распределения процесса случайных блужданий на $\Gamma_{ij}$. Обозначим через $\vec{p}_{ij}, \vec{p}_{ji}$ подвекторы векторов распределений $\vec{p}_i, \vec{p}_j$ на $\Gamma_{ij}$. Считаем что векторы $\vec{p}_{ij}, \vec{p}_{ji}$ коллинеарны. Это свойство должно выполняться и для векторов распределений на пересечениях любого числа графов из $\{\Gamma_i\}$.

### 3. Решение задачи о стабилизации процесса случайных блужданий на множестве графов с общим центром

Приведем решение поставленной задачи. Покажем, что если условия 1-3 выполняются, то при $t \to \infty$ стабилизация на $\{\Gamma_i\}$ будет иметь место.

Пусть $\Gamma_i$, $\Gamma_j$ – любые графы из $\{\Gamma\}$ такие, что $\Gamma_j \ne \varnothing$, $t_k, t_{k+1}$ – моменты окончания возмущений $\Gamma_i$, $\Gamma_j$. Считаем, что:

а) мера Лебега для всех $\Omega_{ij}$ $(i \ne j)$ удовлетворяет условию $\mu(\Omega_{ij}) \ge t\sigma > 0$. Здесь $\sigma$ не зависит от $(t_k, t_{k+1})$ и индексов $i$ и $j$;

б) на $(t_k, t_{k+1})$ никаких других возмущений, кроме возмущений графов $\Gamma_i$, $\Gamma_j$, нет.

Рассмотрим сумму

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i,j} \left| \vec{\pi}_{ij}(t_{k+1}) - \vec{\pi}_{ij}(t_k) \right|. \tag{1}$$

Здесь суммирование проводится по всем парам несовпадающих индексов $i$, $j$, для которых $\Omega_{ij} \ne \varnothing$ $(i \ne j)$; моменты $t_k$, $t_{k+1}$ такие, как в пункте б); $\vec{\pi}_j(t_{k+1}), \vec{\pi}_{ij}(t_k)$ – векторы распределений на $\Gamma_{ij}$ в моменты $t_k$, $t_{k+1}$. После каждого возмущения на любом из $\Gamma_i$, $\Gamma_j$ соответствующая разность из (1) уменьшается. Значит, при $t \to \infty$ сумма (1) монотонно убывает. Можно доказать, что в случае, когда возмущение на каждом $\Gamma_i$ приводит к фокусировке на нем, сумма (1) стремится к нулю при $t \to \infty$. В этом случае в пределе $p_{ij}$, $p_{ji}$ на всех $\Gamma_{ij}$ будут совпадать. Это означает, что при $t \to \infty$ имеет место фокусировка. Если же возмущение всех графов из $\{\Gamma_i\}$ или их части приводит к $\sigma$-фокусировке, то при $t \to \infty$ $\sigma$-фокусировка будет иметь место на множестве $\{\Gamma\}$.

Часто возмущения, которым подвергаются графы из $\{\Gamma_i\}$, изменяются с изменением времени. Это приводит к тому, что распределение $\vec{p}_i$ на $\Gamma_i$ также изменяются. В этом случае стабилизации на $\{\Gamma_i\}$, вообще говоря, не будет. Рассмотрим случай, когда возмущения с изменяющимися во времени фокусирующими свойствами порождают на всех графах из $\{\Gamma_i\}$ такие распределения, которые эволюционируют, «подчиняясь» эволюции центра.

Рассмотрим сначала модельный пример такой эволюции. В нем условия, которым удовлетворяют $\Gamma_i$, и действующие на них возмущения выбраны так, чтобы необходимые для уяснения сути дела расчеты были максимально просты. Считаем, что:

– длины векторов распределений $\vec{p}_i$ на всех $\Gamma_i$ $(i \ne 0)$ на несколько порядков меньше длины вектора распределения центра $\vec{p}_0$ (случай массивного центра);

– любое возмущение $\Gamma_0$ происходит после возмущений всех $\Gamma_i \ne \Gamma_0$;

– векторы распределений $\vec{p}_i(t)$ для всех $\Gamma_i$ после возмущения каждого из них удовлетворяют условию

$$\left| \vec{p}_{0i}(t_k) \right| = 2^{-1} \vec{p}_i(t_k). \tag{2}$$

Здесь $\vec{p}_{0i}(t)$ – вектор распределения на $\Gamma_{0i}$ при $t = t_k$, $t_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ – момент фокусировки. Из условия 2 следует, что если возмущения, действующие на $\Gamma_0$, фокусируют $\vec{p}_0(t)$ на одно и то же распределение, то достаточно того, чтобы (2) выполнялось при $t_k = 0$. Тогда он будет выполняться для всех $t_k$.

Из перечисленных выше условий следует, что существует такой промежуток $\Delta_1 = (0, t_1)$, что: распределения $\vec{p}_{0i}$ на всех $\Gamma_{0i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ при $t$, близких к $t_1$, будут лишь незначительно отличаться от распределений на $\Gamma_{0i}$ вектора $\vec{p}_{0i}$; распределение $\vec{p}_0(t_1 - 0)$ к моменту $t_1$ будет мало отличаться от $\vec{p}_0(0)$. Предполагается, что все возмущения центра $\Gamma_0$, действующие на $\Delta_1$, фокусировали $\vec{p}_0(t)$ на одно и то же распределение.

Пусть в момент времени $t_1$ центр $\Gamma_0$ подвергается возмущению, которое изменяет $\vec{p}_0(t_1-0)$ на $\delta_1$, мало.

Рассмотрим промежуток $(t_1, t_2)$, на котором возмущения всех графов из $\{\Gamma_i\}$ $(i=1,...,n)$ удовлетворяют тем же условиям, что и на $(0, t_1)$.

Считаем, что в момент $t_2$ центр подвергается возмущению, которое (как и возмущение в момент $t_1$) мало изменяет распределение $p_0(t_2-0)$. Рассмотрим промежутки $(t_n, t_{n+1})$ $(n=2,3,\ldots)$. Пусть на каждом из них возмущения, действующие на всех $\Gamma_i \in \{\Gamma_i\}$, удовлетворяют тем же условиям, что и на промежутках $(0, t_1)$, $(t_1, t_2)$. Из изложенного следует, что эволюция распределений $p(t)$ на $\Gamma = \bigcup\limits_{i=0}^{n} \Gamma_i$ в основном определяется эволюцией центра. Распределение $p_0(t)$ претерпевает незначительные изменения (скачки) лишь в моменты $t_k$ $(k=1,2,\ldots)$. Кроме того, $p_{0i}(t)$ изменяются и при фокусировках на $\Gamma_i$. Эти изменения будут малы для всех $t$, близких к $t_k$. Это следует из (2).

Условие (2) можно ослабить, потребовав, чтобы

$$\left|\vec{p}_{0i}(t_k)\right| = \delta \cdot \vec{p}_i(t_k), 0 < \delta \le \frac{1}{2}. \qquad (3)$$

Модифицируем описанный выше вариант эволюции распределений на $\{\Gamma_i\}$. Считаем, что скачки распределения $p_0(t)$ стали меньше, чем в описанной выше схеме возмущений; возмущения всех $\Gamma_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ происходят в $k$ раз чаще, чем при построении интервалов $(t_n, t_{n+1})$. Это приведет к $k$-кратному их уменьшению. Обозначим через $(t`_n, t`_{n+1})$ промежутки, отвечающие новому (учащенному) режиму возмущений. Пусть на всех $(t`_n, t`_{n+1})$ процесс случайных блужданий удовлетворяет тем же условиям, что и на $(t_n, t_{n+1})$ (до учащения возмущений). Согласуем новые и старые возмущения на $\Gamma_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ так, чтобы последовательность $\{t_n\}$ являлась частью последовательности $\{t`_n\}$. Тогда любой промежуток $(t_n, t_{n+1})$ $(n=0,1,...)$ будет содержать k промежутков из последовательности $\{(t`_n, t`_{n+1})\}$.

Раньше распределение центра $p_0(t)$ возмущалось лишь в моменты $t=t_n$. Теперь будем возмущать $p_0(t)$ в моменты $t`_n$. Промежуток $(0, t_1)$ содержит $k$ членов $t`_{n_1},..., t`_{n_k}$ последовательности $\{t`_n\}$. Возмутим $p_0(t)$ в моменты $t`_{n_1},..., t`_{n_k}$ так, чтобы возникшие при этом скачки $|p_0(t)|$ были равны $\frac{1}{k}\delta_1$. Отметим, что теперь сумма всех скачков $|p_0(t)|$ на $(0, t_1)$ будет по-прежнему равна $\delta_1$. Точно так же перераспределим возмущения $\vec{p}_0(t)$ (локализованные раньше в моменты $t_n$ $(n=0,1,...)$ на всех $(t_n, t_{n+1})$. В результате получим эволюцию случайных блужданий на $\{\Gamma_i\}$, для которой скачки распределения $p_0(t)$ будут в $k$ раз меньше, чем раньше (когда $p_0(t)$ подвергалось возмущениям лишь в моменты $t_n$). При неограниченном росте $k$ все скачки распределения $p_0(t)$ будут стремиться к нулю. Таким образом, при больших $k$ эволюцию на $\{\Gamma_i\}$ можно приближенно считать непрерывной.

Рассмотрим задачу об эволюции центра в общем виде. Пусть задана векторная функция $\vec{\varphi}(t)$, определяющая эволюцию центра на $(0 \le t \le T)\, T < \infty$. Требуется выбрать возмущения, действующие на $[0, T]$ так, чтобы эволюция $\vec{p}_0(t)$ на $[0, T]$ с заданной точностью совпадала с $\vec{\varphi}(t)$. Поставим задачу более точно.

Пусть на $[0, T]$ задана векторная кривая L, уравнение которой имеет вид

$$\vec{\varphi}(t) = \{\varphi_1(t),...,\varphi_m(t)\}. \qquad (4)$$

Здесь m – число вершин графа $\Gamma_0$,

$$0 \le \varphi_k(t) \le 1,\ (k=1,...,m),\ \sum_{k=1}^{m} \varphi_k(t) = 1.$$

Проверим, что при соответствующем выборе возмущений, действующих на $\Gamma_i$ $(i=0,1,\ldots,n)$, эволюцию вектора $\vec{p}_0(t)$ на $\Gamma_0$ можно направить так, чтобы при всех $t \in [0, T]$ выполнялось условие

$$\left|\vec{p}_i(t) - \vec{\varphi}(t)\right| < \delta,\ t \in [0, T]. \qquad (5)$$

Сначала рассмотрим случай, когда $\vec{\varphi}(t)$ непрерывна на $[0, T]$. Считаем, что $\vec{\varphi}(0) = \vec{p}_0(0)$. Этого можно добиться соответствующим воздействием вектора $\vec{p}_0(0)$. Разобьем $[0, T]$ на частичные отрезки $[t_i, t_{i+1})$, $i = 0,1,...,n$. Пусть действующие на $[0, t_1)$ возмущения таковы, что:

$$\left|\vec{\varphi}(t) - \vec{p}_0(t)\right| < \varepsilon,\ 0 \le t < t_1, \qquad (6)$$

$\varepsilon$ мало. Существование возмущений, обеспечивающих выполнение (6), было установлено ранее. В момент $t_1$ возмутим $\vec{p}_0(t_1-0)$ так, чтобы $\vec{p}_0(t_1) = \vec{\varphi}(t_1)$. Выполнение условия (6) на $[t_1, t_2)$, $[t_2, t_3)$ можно получить тем же способом, что и для $[0, t_1)$.

Пусть в точках $\tau_1, \tau_2,...$ $\vec{\varphi}(t)$ имеет разрывы. Тогда, возмущая соответствующим образом $\vec{p}_0(t-\tau_1)$, $\vec{p}_0(t-\tau_2)$, получим в $\tau_1, \tau_2,...$ разрывы $\vec{p}_0(t)$, совпадающие с разрывами $\vec{\varphi}(t)$. Теперь задача о стабилизации может быть решена так же, как и для случая непрерывной функции $\vec{\varphi}(t)$.

Рассмотрим случай, когда возмущения, которым подвергаются графы из $\{\Gamma_i\}$, не приводят к фокусировке распределений на каждом из них. Возмущение любого $\Gamma_i$ лишь незначительно изменяет распределение $\vec{p}_i$ на нем.

Допустим, что последовательность распределений $\vec{p}_{i,\alpha}(t)$, возникающая на $\Gamma_i$ при воздействии на него возмущений $(\delta\Gamma_i)_\alpha$ $(\alpha = 1,2,...)$, является сходящейся. Если это условие выполняется для всех $\Gamma_i$, то фокусировка на $\{\Gamma_i\}$ будет иметь место.

Полученные в работе результаты являются новыми. Сделанные исследования позволяют производить стабилизацию основных характеристик процесса случайных блужданий на множестве графов с общим центром. Эти результаты могут найти применение при анализе работы отдельных частей сети Internet и при решении задач о минимизации затрат, необходимых для стабилизации работы банков, имеющих непосредственные связи с центральным банком.

**Литература: 1.** *Bollobas B.* Random graphs, Academic press, New York (1985). **2.** *Moukarzel C.* Spreading and shortest path in systems with spare long-range connections, Phys. rev. E60. 6263-6266 (1999). **3.** *Kauffman S.A.* Metabolic stability and epigenesist in randomly constructed genetic nets, J Theo. Biol. 22.P. 437-467. **4.** *Neibur E., Schuster H.G. and Kammen D.M.* Collective frequencies and metastability in networks of limit-cycle oscillators with time delay, Phys. Rev. lett. 67, 2753-2756 (1991). **5.** *Aiello W., Chung F., Lu L.* A random graph model for massive graphs, Proc. ACM Symp. On Theory of Computing 2000. **6.** *Dorogovtsev S.N. and Mendes J.F.F.* Evolution of networks: From biological nets to the Internet and WWW, (Oxford University Press, Oxford 2003). **7.** *Watts D.* Small worlds: The dynamics of networks between order and randomness (Princeton University Press, Princeton 1999). **8.** *Дикарев В.А.* Стабилизация распределений марковского процесса при возмущении его континуальных компонент/Доклады Национальной академии наук Украины. 2003 . №6. С. 47-53. **9.** *Дикарев В.А., Герасин С.Н., Слипченко Н.И.* Стабилизация вероятностей состояний марковского процесса при локальных возмущениях его фрагментов / Доклады Национальной академии наук Украины. 2003. №8. С. 90-93.

Поступила в редколлегию 25.06.2004

**Рецензент:** д-р техн. наук, проф. Кривуля Г.Ф.

**Дикарев Вадим Анатольевич,** д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: теория вероятностей, случайные процессы и их приложения. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 70-21-436.

**Таргони Тарас Олегович**, аспирант кафедры прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: теория вероятностей, случайные процессы. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 70-21-436.

---

УДК 519.6:514.1

# ИНТЕРВАЛЬНАЯ ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbf{I_s^3R}$

*ГРЕБЕННИК И.В., ЕВСЕЕВА Л.Г., РОМАНОВА Т.Е.*

Вводится понятие интервальной ломаной и интервальной прямой в трехмерном интервальном пространстве $\mathbf{I_s^3R}$. Анализируются различные способы задания интервальной прямой и интервальной ломаной, исследуются их свойства.

## Введение

Важным классом задач геометрического проектирования [1] являются задачи размещения геометрических объектов. Модели и методы решения задач размещения в различных постановках в достаточной степени исследованы [1-4]. При этом, однако, чаще всего решались либо идеализированные (без учёта погрешностей) задачи размещения, либо задачи размещения плоских объектов с учётом погрешностей в двумерном интервальном пространстве. Развитие теории и методов геометрического проектирования порождает необходимость построения моделей задач размещения трехмерных геометрических объектов с учетом погрешностей исходных данных. Для этого следует определить основные понятия в трехмерном интервальном пространстве, на основе которых могут быть построены указанные модели.

*Целью* настоящей работы является определение интервальной прямой в трехмерном интервальном пространстве и исследование её свойств.

## Постановка задачи

Рассмотрим пространство $\mathbf{I_s^3R} = \mathbf{I_sR} \times \mathbf{I_sR} \times \mathbf{I_sR}$, где $\mathbf{I_sR}$ – расширенное пространство центрированных интервалов [5].

На основе понятия интервальной прямой в пространстве $\mathbf{I_s^2R}$ [6] определим понятие интервальной прямой в $\mathbf{I_s^3R}$.

Полагаем, что интервальная поверхность в пространстве $\mathbf{I_s^3R}$, аналогично определению интервальной кривой в пространстве $\mathbf{I_s^2R}$, есть множество точек $\breve{\mathbf{\Pi}} \subset \mathbf{I_s^3R}$, удовлетворяющих уравнению $\mathbf{f}(\mathbf{Z}) = \langle C' \rangle$, где $\mathbf{f}: \mathbf{I_s^3R} \to \mathbf{I_sR}$ является интервальным отображением [5],

$$\mathbf{Z} = (\langle X_1 \rangle, \langle X_2 \rangle, \langle X_3 \rangle) \in \mathbf{I_s^3R}, \langle C' \rangle = \langle c', \nu_{c'} \rangle \in \mathbf{I_sR}$$

– интервальная константа.

Рассмотрим квазилинейное интервальное отображение [3] вида: