ОЦЕНИВАНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ: РЕВИЗИЯ GUM И ПУТИ ЕЕ РЕАЛИЗАЦИИ

ЗАХАРОВ И.П.
Харьковский национальный университет радиоэлектроники, г. Харьков, Украина,
newzip@ukr.net

Анализируются недостатки Руководства по выражению неопределенности измерений, приведшие к необходимости его пересмотра. Обосновываются причины ограничения использования метода Монте-Карло для расчета неопределенности измерений в аккредитованных испытательных и калибровочных лабораториях. Перечисляются претензии к первому изданию обновленного Руководства по выражению неопределенности измерений, подготовленному JCGM. Рассматривается предлагаемый автором алгоритм обработки результатов и оценивания неопределенности измерений на основе байесовского подхода.

Введение

30-летнее триумфальное международное шествие «Руководства по выражению неопределенности измерений» (GUM-93) [1] увенчалось в 2013 году коллективным предложением его разработчиков о необходимости его пересмотра [2]. В основе этого решения лежало несколько нижеследующих причин.

1. Будучи правопреемницей теории погрешностей, концепция неопределенности в GUM-93, несмотря на существенное изменение терминологии, строилась на аналогичных базовых принципах реализации модельного подхода:

- при вычислении суммарной стандартной неопределенности был применен закон распространения неопределенности (ЗРН) (правило суммирования дисперсий), справедливый для линейных, или хорошо линеаризуемых моделей;

- при нахождении стандартных неопределенностей входных величин различных типов используются различные интерпретации вероятности: стандартные неопределенности типа А определяют по функции плотности вероятности (PDF), полученной из наблюдаемого распределения частот, в то время как стандартные неопределенности типа В определяют из предполагаемых PDF, приписываемых входным величинам на основе априорной информации.

2. Стремление к упрощению вычислений расширенной неопределенности привела разработчиков GUM к тупиковому утверждению, опирающемуся на центральную предельную теорему, о достаточности описания плотности PDF измеряемой величины t-распределением с эффективным числом степеней свободы, определяемым формулой Уэлча-Саттертуэйта.

3. Разработка Дополнения 1 к GUM (GUM-S1) [3] на основе метода Монте-Карло (ММК) позволила устранить перечисленные недостатки GUM-93. Однако в связи с тем, что ММК является реализацией байесовского подхода, оценки стандартной неопределенности измеряемой величины, полученные с помощью процедур GUM-93 и GUM-S1 численно отличаются. То есть Дополнение к GUM вошло в противоречие с самим GUM.

Кроме того, непосредственному использованию ММК в испытательных и калибровочных лабораториях мешают следующие факторы:

- необходимость в наличии в аккредитованной лаборатории сертифицированного специализированного программного средства для реализации ММК;

- невозможность получения полного бюджета неопределенности измерений существующими сейчас программными средствами, реализующих ММК;

- невозможность документации процедуры оценивания неопределенности на основе ММК для дальнейших проверок контролирующими органами.

Рабочей группой WG-1 Объединенного комитета по руководствам в метрологии (JCGM) была разработана первая версия нового Руководства: JCGM 100 CD [4]. В основу нового Руководства был положен байесовский подход. JCGM 100 CD был распространен до конца 2014 года среди организаций-членов JCGM, национальных метрологических институтов и других получателей, от которых поступило более 1000 комментариев и отзывов, в основном отрицательных. Основные претензии к JCGM 100 CD заключались в следующем [4]:

1) в основу JCGM 100 CD, также как и GUM, положен ЗРН, при этом не определен диапазон применения выражений, построенных на разложении уравнения измерения в ряд Тейлора первого порядка; использование же членов второго порядка при записи ЗРН выполнено корректно только для гауссовских распределений;

2) предложенный в JCGM 100 CD способ оценки расширенной неопределенности не зависит от законов распределения измеряемой величины: консервативные коэффициенты охвата, полученные из неравенств Чебышева и Гаусса, дают завышенные до 50 % оценки расширенной неопределенности даже в том случае, когда условия центральной предельной теоремы выполняются.

В связи с изложенным, становится актуальной разработка процедуры оценивания неопределенности измерений, основанной на байесовском подходе и устраняющей приведенные недостатки.

Предлагаемый алгоритм реализации GUM на основе байесовского подхода

1. Моделирование измерений

Целью измерения является получение наилучшей оценки y измеряемой величины Y и связанной з ней стандартной неопределенности $u(y)$. В большинстве случаев измеряемая величина определяется по другим (входным) величинам $X_1, X_2, ..., X_N$ через модель измерения:

$$Y = f(X_1, X_2, ..., X_N)\,. \tag{1}$$

Руководства GUM-93 и JCGM 100 CD предназначены для линейных моделей или моделей, которые могут быть линеаризованы без ухудшения точности получения оценки измеряемой величины и связанной с ней стандартной неопределенности. Оценка неопределенности для нелинейных моделей освещается в GUM-S1 [3].

Модель (1) является одномерной, так как имеет единственную измеряемую величину. Другие модели, включая многомерные и неявные модели, рассматриваются в GUM-S2 [5]. Общие вопросы моделирования измерения будут подробно рассмотрены в руководстве JCGM-103 [6], которое сейчас разрабатывается.

2. Оценка входных величин, их стандартных неопределенностей и ковариаций

Входные величины можно классифицировать как:

- величины, значения и неопределенности которых определяются непосредственно в данном измерении и могут быть получены из единственного показания средства измерений (СИ) или повторяющихся показаний;

- поправки к показаниям СИ и поправки, влияющие на входные величины, такие как температура окружающей среды, барометрическое давление и влажность;

- величины, значения и неопределенности которых введены в измерения из внешних источников, таких как откалиброванные эталоны, сертифицированные стандартные образцы и выходные данные, указанные в справочниках.

Если непосредственно в данном измерении получено единственное показание x_i СИ величины X_i, то это показание и есть значением этой величины.

Стандартная неопределенность этой величины (инструментальная стандартная неопределенность) определяется из информации, взятой из сертификата калибровки СИ: расширенной инструментальной неопределенности U_{pi} и коэффициента охвата k_{pi}:

$$u_{ti} = \frac{U_{pi}}{k_{pi}}, \tag{3}$$

где p – уровень доверия, который обычно составляет «примерно 0,95», то есть точно 0,9545.

Если непосредственно в данном измерении получены повторяющиеся показания СИ $x_{i1}, x_{i2}, ..., x_n$, то за значение x_i данной величины X_i принимается их среднее арифметическое:

$$x_i = \overline{x}_i = \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} x_{ir} . \quad (2)$$

В этом случае в модель измерения добавляется поправка ε_i на случайную погрешность, значения которой $\widehat{\varepsilon}_i = 0$, а стандартная неопределенность определяется по формуле:

$$u(\varepsilon_i) = \sqrt{\frac{1}{n(n-3)}\sum_{r=1}^{n}(x_{i,r} - \overline{x}_i)^2} . \quad (3)$$

Этой поправке приписывается несмещенное масштабированное распределение Стьюдента с числом степеней свободы $\nu_i = n-1$. Такие оценки стандартных неопределенностей входных величин имеют смысл при $n_j \geq 4$ и справедливы лишь для нормально распределенных результатов многократных измерений [7].

Если между двумя поправками ε_i, ε_j наблюдается корреляция, то значения их ковариации находится по формуле [4]:

$$\operatorname{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \frac{1}{n(n-4)}\sum_{r=1}^{n}(x_{i,r} - \overline{x}_i)(x_{j,r} - \overline{x}_j) . \quad (4)$$

3. Вычисление числового значения результата измерения

Оценку y измеряемой величины Y в JCGM 110 CD вычисляют путем подстановки в модельное уравнение (1) оценок $x_1, x_2, ..., x_N$ входных величин $X_1, X_2, ..., X_N$:

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_N) \quad (5)$$

При нелинейной модели такой способ оценивания дает точный результат только при отсутствии неопределенности этих оценок. При наличии значительных неопределенностей входных величин $u_1, u_2, ..., u_N$ приведений способ приводит к смещению оценки измеряемой величины [8].

$$\Delta_y = -\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} c_{ii}^2 u_i^2 + \sum_{i=2}^{N}\sum_{j=1}^{i} c_{ij} \operatorname{cov}(x_i, x_j)\right], \quad (6)$$

де $c_{ii} = \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_i^2}$, $c_{ij} = \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j}$ та $\operatorname{cov}(x_i, x_j)$ – соответственно частная производная второго порядка от Y по X_i, смешанная частная производная второго порядка от Y по X_i, X_j и ковариация X_i, X_j, которые оценены при $X_1 = x_1, ..., X_N = x_N$; u_i – стандартная неопределенность X_i.

Полученное значение смещения сравнивают со значением $u_0(y)$, которое получают в следующем разделе. Если выполняется неравенство:

$$\left|\Delta_y\right| \geq \frac{1}{3} u_0(y), \quad (7)$$

необходимо учесть смещение (7) в качестве поправки к (5), получая несмещенную оценку измеряемой величины по формуле:

$$y_0 = y - \Delta_y . \quad (8)$$

4. Вычисление стандартной неопределенности измеряемой величины

Если модельное уравнение выражается формулой (1), то оценка стандартной неопределенности измеряемой величины $u(y)$ в первом приближении определяется из выражения:

$$u^2(y) = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{N} c_i c_j \operatorname{cov}(x_i, x_j) \quad u^2(y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u_i^2 + 2\sum_{i=2}^{N} \sum_{j=1}^{i} c_i c_j \operatorname{cov}(x_i, x_j)\,, \tag{9}$$

где $c_i = \dfrac{\partial y}{\partial x_i}$, $c_j = \dfrac{\partial y}{\partial x_j}$ – коэффициенты чувствительности, которые представляют собою соответствующие частные производные от Y, которые оценены при $X_1 = x_1, ..., X_N = x_N$.

Для определения смещения этой оценки вычисляется величина [9]:

$$\Delta_{u^2} = -\left[\frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N} c_{ii}^2 (\eta_i + 2) u_i^4 + \sum_{i=2}^{N} \sum_{j=1}^{i-1} c_i c_j u_i u_j \right], \tag{10}$$

где η_i – эксцесс распределения *i*-й входной величины, который берется из приведенной ниже таблицы. В таблице $\alpha = u_2 / u_1$ – параметр трапециевидного закона распределения, где u_1, u_2 – стандартные неопределенности двух равномерных законов, из которых состоит трапециевидный. Для нахождения параметра α и эффективного числа степеней свободы ν_{eff} для закона распределения Стьюдента по значению $k_{0,9545}$, указанному в сертификате калибровки используются рассчитанные автором номограммы [10].

Значения эксцессов для разных законов распределения входных величин

PDF	Арксинусный	Равномерный	Трапециевидный	Треугольный	Нормальный	Стьюдента
η	–1,5	–1,2	$-1,2\dfrac{(1+\alpha^4)}{(1+\alpha^2)^2}$	–0,6	0	$\dfrac{6}{\nu - 4}$
$k_{0,9545}$	1,411	1,653	1,653…1,927	1,927	2	>2

Полученное значение смещения сравнивают со значением $u(y)$ (9). Если выполняется неравенство:

$$\left|\Delta_{u^2}\right| \geq 0{,}1 u^2(y)\,, \tag{11}$$

необходимо учитывать смещение (10) в качестве поправки к (9), получая несмещенную оценку измеряемой величины по формуле:

$$u_0^2(y) = u^2(y) - \Delta_{u^2}\,. \tag{12}$$

5. Вычисление расширенной неопределенности измеряемой величины

Вычисление расширенной неопределенности измеряемой величины $U(y)$ предлагается осуществлять по формуле:

$$U(y) = k(\eta) u(y)\,, \tag{13}$$

где $k(\eta)$ – коэффициент охвата, зависящий от эксцесса распределения измеряемой величины η, который находят по формуле [11]:

$$\eta = \left(\sum_{j=1}^{m} \eta_j c_j^4 u_j^4 \right) \Big/ u^4(y)\,. \tag{14}$$

После нахождения η коэффициент охвата для $p = 0{,}95$ рассчитывают по формуле:

$$k(\eta) = \begin{cases} 0{,}1085\eta^3 + 0{,}1\eta + 1{,}96, \text{ при } \eta < 0; \\ 1{,}96, \text{ при } \eta \geq 0. \end{cases} \tag{15}$$

Показано, что отклонения оценок расширенной неопределенности, которые получено методом эксцессов от оценок, которые получены с помощью ММК, не превышает ± 2,5% для числа повторных измерений входных величин больше 5.

Следует заметить, что выполнение неравенства про наличие смещения измеряемой величины (7) свидетельствует про асимметрию ее закона распределения. В этом случае для нахождения расширенной неопределенности необходимо использовать ММК.

Выводы

1. Недостатки GUM-93 привели к необходимости его пересмотра. Несовершенство первого издания обновленного Руководства JCGM 100 CD не позволяет использовать его в метрологической практике.

2. Для получения несмещенной оценки измеряемой величины необходимо применять выражение (6), которое пригодно при наличии неопределенностей входных величин, оцененных как статистическими, так и нестатистические методами.

3. Получение несмещенной оценки стандартной неопределенности измерительные ной величины при нелинейных модельных уравнениях на основе СВН, построенного на разложении уравнения измерения в ряд Тейлора второго порядка, для любых законов распределения входных величин может быть реализовано на основе выражения, учитывающий эксцессы входных величин.

4. Использование метода эксцессов позволяет получить оценки расширенной неопределенности с учетом законов распределения входных величин для симметричных распределений и возможности линейной аппроксимации модели измерения. Показано, что отклонение оценок расширенной неопределенности, полученных методом эксцессов от оценок, полученных с помощью ММК, не превышает ± 2,5% для числа повторных измерений входных величин более 5.

5. Предложенные авторами подходы позволяют создать Руководство по выражению неопределенности измерений на основе байесовского метода, которое устраняет недостатки JCGM 100 CD.

Список использованных источников

1. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. Geneva: ISO, 1993. – 101 p.

2. Bich et al. Revision of the «Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement»// Metrologia. − 2012, − Vol. 49, pp. 702–705.

3. JCGM 101:2008. Evaluation of measurement data − Supplement 1 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" − Propagation of distributions using a Monte Carlo method. − BIPM, First edition 2008. − 88 p.

4. W. Bich, M. Cox, and C. Michotte, "Towards a new GUM – an update," Metrologia, No. 53, S149–S159 (2016).

5. JCGM 102:2011. Evaluation of measurement data − Supplement 1 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" − Extension to any number of output quantities. − BIPM, First edition 2008. − 80 p.

6. JCGM 103 CD 2018-10-04. Guide to the expression of uncertainty in measurement − Developing and using measurement models.

7. Боцюра О.А., Захаров И.П. Влияние закона распределения показаний средств измерений на точность оценок неопределенности измерений // Метрология (Россия), 2016, №3, с. 12-18.

8. Zakharov I., Neyezhmakov P., Botsiura O. Reduction of the measurand estimate bias for nonlinear model equation // Journal of Physics: Conf. Series 1065 (2018) 212002.

9. Zakharov I.P., Botsiura O.A. Measurement Uncertainty Evaluation in Nonlinear Model Equations // Metrology and Metrology Assurance 2018: Proceedings of 28-th International Scientific Symposium, September 10-13, 2018, Sozopol, Bulgaria, p. 35-38.

10. Боцюра О.А., Захаров І.П., Неєжмаков П.І. Основні положення Настанови з подання невизначеності вимірювань на основі байєсівського підходу // Український метрологычний журнал, 2019 №2, с. 3-9.

11. Захаров И.П., Боцюра О.А. Вычисление расширенной неопределенности измерений методом эксцессов при реализации байесовского подхода // Измерительная техника, 2019, №4, с. 26-29..