

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОНКУРЕНТНИХ ПРОЦЕСІВ У НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМАХ ІЗ ВЗАЄМОДІЄЮ

Луханін В.С.

Науковий керівник – канд. техн. наук, доц. Наумейко І.В.  
Харківський національний університет радіоелектроніки, каф. ПМ,  
м. Харків, Україна  
e-mail: volodymyr.lukhanin@nure.ua

Competition is a vital aspect of the economy and is extensively studied through mathematical models, despite the complexity of competitive systems. There aren't many mathematical models describing competitive processes, but since most models are universal, there is a sufficient set of them, each with its own advantages and disadvantages. They include Peter Lancaster's model, the Malthusian model, and also crucial models of mutualism between species. These mathematical models find applications across diverse fields like engineering, biology, demography, and economics.

Конкуренція є наріжним каменем не тільки економіки та піддається ретельному аналізу та різнобічним науковим дослідженням. Складність багатозв'язних конкурентних систем раніше іноді розглядалася як обґрунтування неможливості їхнього моделювання, вивчення засобами математики. Їхня динаміка має всі ознаки дуже складної системи, яка поєднує величезну кількість елементів, відрізняється різноманіттям внутрішніх зв'язків і зв'язків з іншими системами.

Математичних моделей, що описують конкурентні процеси, не так вже й багато, але оскільки більшість моделей універсальні, то є достатній їх набір, зі своїми перевагами та своїми недоліками.

Одна із найпростіших конкурентних моделей – модель Пітера Ланкастера [1]:

$$\begin{cases} x' = -by, \\ y' = -ax. \end{cases}$$

Тут  $a$  – потужність зброї армії  $x$ ,  $b$  – потужність зброї армії  $y$ .

Найпростіша модель зростання (популяції виду, економічного прибутку) і часто називається на моделлю Мальтуса або мальтузіанської моделлю [2]:

$$x' = ax,$$

де  $a > 0$  – коефіцієнт приросту,  $x$  – чисельність виду або величина доходу.

Замість жорсткої моделі Мальтуса можна розглядати м'яку [3] модель:

$$x' = k(x)x.$$

Стандартний аналіз конкуренції між двома видами, що проводився спочатку в роботах Гаузе, Лотки та Вольтерра [4] починається із записування двомірної динамічної моделі конкурентних взаємодій у наступному вигляді:

$$\frac{dx}{dt} = x(a - bx - cy),$$

$$\frac{dy}{dt} = y(e - fx - gy).$$

На противагу моделям міжвидової конкуренції у популяційній динаміці велику роль відіграють моделі мутуалізму (симбіозу) між двома видами, що описується тим самим виразом, що й міжвидова конкуренція  $a_{ij}x_i x_j$ , але при  $a_{ij} > 0$ ,  $i = j$  [5].

Розглянемо узагальнену динамічну систему:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i F_i(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

де функція  $F_i$  має неперервні похідні за  $x_j$  і,

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

Застосовуючи розклад Тейлора для кожної з функцій та ввівши позначення:

$$a_{ij} = \frac{\partial F_i(x^*)}{\partial x_j},$$

отримаємо:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i \sum_{j=1}^n a_{ij} (x_j - x_j^*), \quad i = 1, \dots, n.$$

Математичні моделі, що описують конкурентні процеси, є найчастіше універсальними, придатними для застосування у різних галузях техніки, біології, демографії та економіки.

Список використаних джерел:

1. Ляшенко І. М., Коробова М. В., Столяр А. М. Основи математичного моделювання економічних, екологічних та соціальних процесів. Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2006. 304 с.
2. Haken H. Information and Self-Organization. Heidelberg: Springer Berlin, 2006. 258 p.
3. Арнольд В. И. Теория катастроф. М.: Знание, 1983. 128 с.
4. Сугаков В. Й. Основи синергетики. К.: Обереги, 2001. 287 с.
5. Наумейко И. В. Модель конкуренции в системах типа «производитель – перекупщик». ScienceRise. – 2014. – № 3/2(3). – С. 15–19.