

Г. И. ЧУРЮМОВ, д-р физ.-мат. наук, А. В. БУЦ

## ОСНОВНЫЕ ОСОБЕННОСТИ РЕГУЛЯРНОЙ И ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ ОСЦИЛЛЯТОРА ДЮФФИНГА

В настоящей работе освещаются основные характеристики и особенности осциллятора Дюффинга. К этим характеристикам мы относим вид потенциала осциллятора Дюффинга, его фазовый портрет, динамику осциллятора при воздействии на него внешней периодической силы, а также его динамику при периодическом изменении параметров осциллятора. При аналитическом изучении динамики основное внимание уделяется формулировке условий перехода от регулярной динамики осциллятора к хаотической. Хаотические режимы осциллятора изучены численными методами. Для характеристики этого режима используются максимальные показатели Ляпунова. Медленная динамика осциллятора Дюффинга может быть описана вторым фундаментальным гамильтонианом (под первым мы понимаем гамильтониан математического маятника). К такому же гамильтониану сводится описание динамики слабо релятивистского электрона, который движется в постоянном внешнем магнитном поле и в поле однородной циркулярно поляризованной электромагнитной волны.

### 1. Потенциалы уравнения Дюффинга

Стандартное уравнение осциллятора Дюффинга, на который действуют внешние силы, имеет следующий вид:

$$\ddot{x} + \alpha \cdot x + \beta \cdot x^3 = f(t). \quad (1)$$

В общем случае параметры  $\alpha$  и  $\beta$  могут быть функциями времени. Потенциалом для такого осциллятора будет функция

$$U(x, t) = \alpha \frac{x^2}{2} + \beta \frac{x^4}{4} - x \cdot f(t).$$

Вид этого потенциала для двух случаев, представляющих практический интерес, когда  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 1$ ,  $f = 0$ ; и  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -1$ ,  $f = 0$ , представлен на рис. 1 и 2.

### 2. Фазовый портрет

Фазовый портрет осциллятора Дюффинга может быть построен, если параметры  $\alpha$  и  $\beta$  постоянны. Для построения фазового портрета найдем интеграл для осциллятора Дюффинга:

$$\frac{\dot{x}^2}{2} + \alpha \frac{x^2}{2} + \beta \frac{x^4}{4} = H = const. \quad (2)$$

Этот интеграл представляет собой гамильтониан осциллятора Дюффинга. Интеграл (2) полностью характеризует фазовый портрет осциллятора Дюффинга. Однако в фазовом портрете всегда удобно выделить особые точки и особые траектории. Единственной особой траекторией в рассматриваемой системе является сепаратриса. При выполнении условий  $\alpha > 0$  и  $\beta > 0$  или  $\alpha < 0$  и  $\beta < 0$  в системе имеется только одна особая точка ( $\dot{x} = 0$ ,  $x = 0$ ). Причем, если  $\alpha > 0$ , то эта точка типа «центр». Если же  $\alpha < 0$ , то это особая точка является седловой точкой. Если  $\alpha > 0$ , а  $\beta < 0$ , то система имеет три особые точки, причем, точка ( $\dot{x} = 0$ ,  $x = 0$ ) является точкой типа «центр», а точки ( $\dot{x} = 0, x = \sqrt{\alpha/|\beta|}$ ), ( $\dot{x} = 0, x = -\sqrt{\alpha/|\beta|}$ ) являются точками типа «седло». При  $\alpha < 0$  и  $\beta > 0$  система имеет также три стационарные точки. Причем, точка ( $\dot{x} = 0$ ,  $x = 0$ ) является точкой типа «седло», а точки ( $\dot{x} = 0, x = \sqrt{|\alpha|/\beta}$ ), ( $\dot{x} = 0, x = -\sqrt{|\alpha|/\beta}$ ) – «центрами».

Вид фазовых портретов и потенциалов дает качественную картину для анализа более сложных процессов. Вид потенциала осциллятора Дюффинга при  $\alpha = -1, \beta = 1$  представлен на рис. 1, и при  $\alpha = 1, \beta = -1$  на рис. 2.

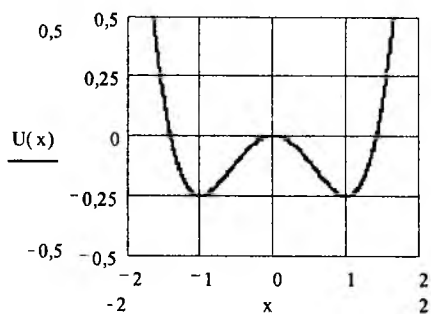


Рис. 1

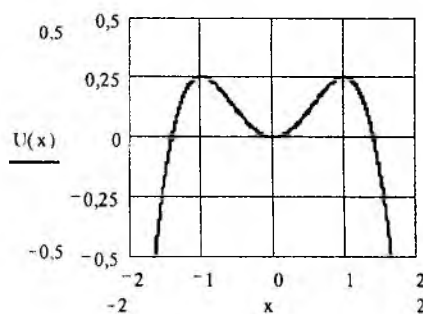


Рис. 2

### 3. Возникновение гомоклинической структуры

Если параметры  $\alpha$  и  $\beta$  осциллятора будут меняться быстро, то картина может качественно отличаться от приведенной выше. Основным новым элементом этой новой динамики является возможность появления хаотических режимов. Анализ перехода от регулярной динамики к хаотической и анализ особенностей хаотической динамики, в общем случае, удастся провести только численными методами. Однако важную информацию можно получить, используя метод Мельникова [1]. Используя этот метод, удастся найти аналитическое выражение, которое описывает возникновение гомоклинической структуры. Для использования метода Мельникова перепишем уравнение Дюффинга в матричном виде:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}_0 + \vec{f}_1, \quad (3)$$

где вектор  $\vec{x}$  имеет два компонента  $x_1 = x$  и  $x_2 = \dot{x} = v$ ; вектор  $\vec{f}_0$  также имеет два компонента:  $f_{01} = x_2$  и  $f_{02} = -\alpha_0 \cdot x_1 - \beta_0 \cdot x_1^3$ ; вектор  $\vec{f}_1$  представляет вектор возмущения с компонентами  $f_{11} = 0, f_{12} = -v \cdot x_2 + f(t) - \alpha_1(t) \cdot x_1 - \beta_1(t) \cdot x_1^3$ . При записи (3) мы предполагали, что параметры уравнения Дюффинга можно представить в виде двух слагаемых:  $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1(t), \beta = \beta_0 + \beta_1(t)$ . Причем, вторые слагаемые в этих выражениях малы и периодически зависят от времени. Кроме того, мы учли наличие малого затухания и действие внешней аддитивной силы ( $f(t)$ ), которая действует на осциллятор.

Перейдем к анализу системы (3) методом Мельникова. Для величины расстояния между расщепленными сепаратрисами Мельниковым [2], [1] получено следующее выражение

$$D = - \int_{-\infty}^{\infty} [f_{01} \cdot f_{12} - f_{02} \cdot f_{11}] \cdot dt. \quad (4)$$

Здесь  $f_{ik}$  - компоненты соответствующих векторов системы уравнений (3). Причем, значения компонент этих векторов следует брать на невозмущенной сепаратрисе. Учитывая, что  $f_{11} = 0$ , выражение для расстояния (4) можно представить в виде суммы следующих интегралов

$$D = \sum_{n=1}^4 I_n,$$

$$\text{где } I_1 = v \int_{-\infty}^{\infty} [x_2^2(t-t_0)] \cdot dt; \quad I_2 = - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot [x_2(t-t_0)] \cdot dt; \quad I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha_1(t) \cdot x_1(t-t_0) \cdot x_2(t-t_0)] \cdot dt;$$

$$I_4 = \int_{-\infty}^{\infty} [\beta_1(t) \cdot x_1^3(t-t_0) \cdot x_2(t-t_0)] \cdot dt.$$

Интеграл  $I_1$  вычисляется элементарно. Для вычисления интегралов  $I_2 \div I_4$  следует использовать метод вычетов, а также формулу суммирования экспоненциальных функций. В результате получим следующее выражение для расстояния между расщепленными сепаратрисами:

$$I = 2 \frac{4 \cdot v}{3} + \sqrt{2} \cdot \pi \cdot A \cdot \sin(\omega t_0) \cdot \left[ \frac{\omega \cdot \exp(-\pi\omega)}{\operatorname{ch}(\pi\omega/2)} \right] + \frac{2\pi \cdot \delta \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t_0)}{\operatorname{sh}(\pi\omega/2)} + \frac{2\pi \cdot B \cdot \omega^4 \cdot \cos(\omega t_0)}{\operatorname{sh}(\pi\omega/2)}. \quad (5)$$

При вычислении (5) мы предполагали, что внешние воздействия меняются по следующему закону:  $\alpha_1 = \delta \cdot \sin(\omega \cdot t)$ ;  $\beta_1 = B \cdot \sin(\omega \cdot t)$ ;  $f(t) = A \cos(\omega t)$ . Видно, что при частотах больших единицы возникновение гомоклинической структуры при параметрическом воздействии происходит при меньших амплитудах, чем при внешнем воздействии.

#### 4. Возникновение странного аттрактора

Проведенный выше анализ дает условия возникновения хаотической динамики в окрестности сепаратрисы. Из этого анализа нельзя найти условия возникновения странного аттрактора. Для этого необходимо использовать численные методы. В качестве характеристики возникновения странного аттрактора будем использовать его основное свойство — локальную неустойчивость его траекторий. Локальную неустойчивость будем исследовать путем вычисления максимальных показателей Ляпунова. На рис. 3 представлена поверхность показателей Ляпунова для случая воздействия на осциллятор внешней периодической силы, которая меняет собственную частоту осциллятора при  $\beta=0.3$ ,  $f=0$ ,  $\gamma=2$ ,  $\alpha=1$ ,  $\nu=0.001$ . Значения максимальных показателей Ляпунова на фазовой плоскости при действии на осциллятор Дюффинга внешней резонансной силы при  $\beta=0$ ,  $f=0.3$ ,  $\gamma=2$ ,  $\alpha=1$ ,  $\nu=0.001$ ,  $\omega=1$  показаны на рис. 4.

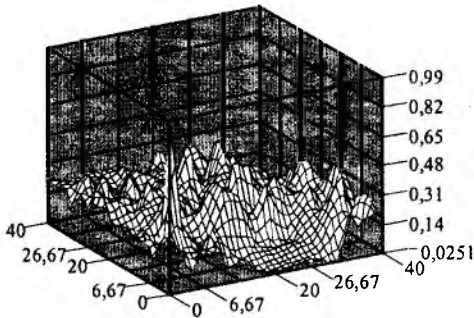


Рис. 3

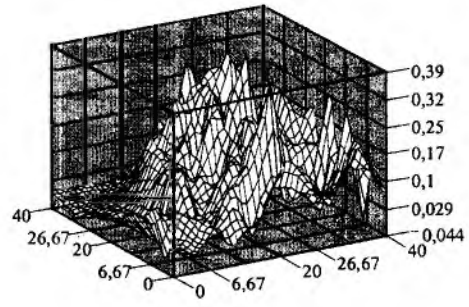


Рис. 4

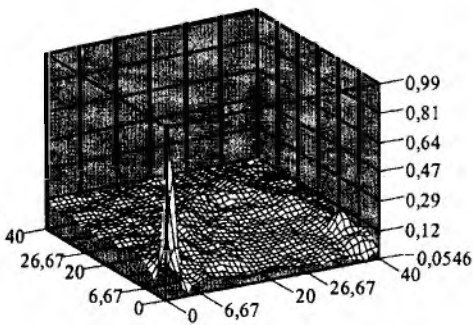


Рис. 5

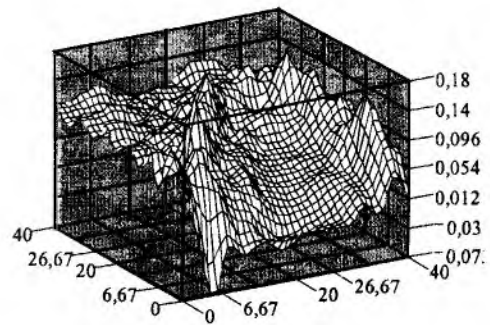


Рис. 6

Частота этого параметрического воздействия выбрана таким образом, чтобы устойчивые стационарные точки (устойчивые фокусы) потеряли устойчивость. При таком воздействии имеются все признаки странного аттрактора. Действительно, мы имеем некоторую притяги-

вающую область в фазовом пространстве. Отметим, что она появляется благодаря наличию затухания. Однако в этой притягивающей области нет ни одной устойчивой стационарной точки и нет ни одного устойчивого предельного цикла. Аналогичная ситуация наблюдается и при воздействии на осциллятор внешней периодической силы с резонансной частотой. Отметим, что в последнем случае потеря устойчивости устойчивых фокусов происходит при больших (чем при параметрическом воздействии) значениях амплитуды внешнего возмущения. Если внешнее воздействие нерезонансное (смотри рис. 5 при  $\beta=0.3, f=0, \gamma=20, \alpha=1, \nu=0.001$  и при  $\beta=0, f=0.3, \gamma=2, \alpha=1, \nu=0.001, \omega=10$  рис. 6), то в фазовом пространстве сохраняются островки устойчивости. В этих областях фазового пространства показатели Ляпунова отрицательны. С течением времени система (осциллятор) окажется в этой области. Динамика станет регулярной.

### 5. Второй фундаментальный гамильтониан

Важную роль в анализе динамических систем играет, так называемый, второй фундаментальный гамильтониан [3, 4]. В окрестности резонанса этот гамильтониан переходит в первый фундаментальный гамильтониан. Однако он позволяет проанализировать более широкий круг явлений. В частности, он позволяет изучить возникновение самого резонанса.

Покажем, что медленная динамика осциллятора Дюффинга (1) может быть описана вторым фундаментальным гамильтонианом. Легко видеть, что уравнению (1) при  $f(t) = V \cdot \cos \omega t$  соответствует следующий гамильтониан

$$H = \frac{1}{2} [\dot{x}^2 + \alpha \cdot x^2] + \frac{1}{4} \beta \cdot x^4 - x \cdot V \cdot \cos \omega t. \quad (6)$$

Этот гамильтониан описывает как быструю динамику осциллятора, так и его медленную динамику. Для выделения в явном виде медленной динамики осциллятора гамильтониан (6) необходимо преобразовать к новым каноническим переменным  $(x, \nu) \rightarrow (q, p)$ . Это преобразование мы проведем с помощью следующей производящей функции:

$$W(x, p) = \int \sqrt{2p\sqrt{\alpha} - \alpha x_1^2} dx_1.$$

Канонические уравнения Гамильтона для осциллятора Дюффинга в новых канонических переменных приобретают вид:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= \sqrt{\alpha} + \frac{2p \cdot \beta}{\alpha} \left[ \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2q + \frac{1}{8} \cos 4q \right], \\ \dot{p} &= \frac{\beta \cdot p^2}{\alpha} \left[ \sin 2q - \frac{1}{2} \sin 4q \right] - V \sqrt{\frac{p}{2\sqrt{\alpha}}} [\sin(q - \omega \cdot t) + \sin(q + \omega \cdot t)] \end{aligned} \quad (7)$$

Новый гамильтониан может быть записан в виде:

$$H = \sqrt{\alpha} \cdot p + \frac{\beta \cdot p^2}{\alpha} \left[ \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2q + \frac{1}{8} \cos 4q \right] - V \sqrt{\frac{p}{2\alpha}} [\cos(q - \omega \cdot t) + \cos(q + \omega \cdot t)]. \quad (8)$$

Из уравнений (7) видно, что если внешнее возмущение и нелинейность малы, то новая каноническая переменная меняется линейно со временем ( $q = \sqrt{\alpha} \cdot t + q_0, \alpha = const$ ), а ее производная представляет собой основную линейную частоту осциллятора  $\Omega = \sqrt{\alpha}$ . Эта частота определяет быструю динамику осциллятора. Ниже, для простоты, мы будем считать, что  $\alpha = \Omega^2 = const$  и  $\beta = -const$ . Все ниже приведенные рассуждения легко обобщаются на общий случай. Если частота внешнего периодического возмущения будет близка к собственной частоте  $\Omega$ , то во втором уравнении системы (7), а также в гамильтониане (8) появляется медленно меняющееся слагаемое. Это слагаемое является резонансным слагаемым и будет, в основном, определять медленную динамику осциллятора. При этом в уравнениях (7) и в гамильтониане (8) можно провести усреднение. В результате такого усреднения в этих

уравнениях и в гамильтониане останутся только медленно меняющиеся резонансные члены. После усреднения с помощью производящей функции  $F = p(\theta - \omega \cdot t)$  удобно ввести новую фазу  $\theta$ . После всех этих преобразований гамильтониан (8) приобретет вид второго фундаментального гамильтониана:

$$H = -A \cdot p + p^2 + B \cdot \sqrt{p} \cdot \cos \theta.$$

В этом гамильтониане мы ввели следующие параметры:

$$A = (\Omega - \omega) \frac{8 \cdot \alpha}{3 \cdot \beta}, \quad B = -\frac{V \cdot 8 \cdot \alpha}{3 \cdot \beta \cdot \sqrt{2\Omega}}.$$

Канонические уравнения, соответствующие этому гамильтониану, имеют вид:

$$\dot{q} = -A + 2p + \frac{1}{2} \frac{B}{\sqrt{p}} \cos \theta, \quad \dot{p} = B \cdot \sqrt{p} \cdot \sin \theta.$$

Особые точки этих уравнений определяются корнями следующих уравнений:

$$-A + 2p + (-1)^n \frac{B}{2\sqrt{p}} = 0, \quad q_n = \pi \cdot n. \quad (9)$$

При изменении параметров может меняться характер этих точек. При этом происходит качественное изменение фазового портрета. Качественно меняется и динамика осциллятора. В качестве примера рассмотрим изменение фазового портрета при изменении параметра  $A$ , считая при этом, что параметр  $B = const$ . При проведении такого анализа удобно ввести следующие функции

$$F(p) = -A + 2p + \frac{B}{2\sqrt{p}}, \quad G(p) = -A + 2p - \frac{B}{2\sqrt{p}}.$$

Равенство нулю этих функций ( $F = 0, G = 0$ ) определяет особые точки (стационарные точки) системы уравнений (9) при четных и нечетных значениях  $n$ . Наиболее важная особенность функции  $F(x)$  заключается в том, что при разных значениях параметров  $A$  и  $B$  она может либо пересекать ось  $F(x) = 0$  в двух точках, либо вовсе ее не пересекать. Соответственно на фазовой плоскости будет разное количество особых точек. Будет разной и динамика осциллятора. При  $A = A_c \equiv \frac{3}{2} B^{2/3}$  две особые точки сливаются. При  $A < A_c$  имеется только одна особая точка типа «центр», а при  $A > A_c$  появляются еще две стационарные точки. Та из этих точек, которая расположена в области малых значений  $p$ , является точкой типа «центр», вторая, расположенная в области больших значений  $p$ , точка типа «седло». Таким образом, при  $A > A_c$  на фазовой плоскости имеется три особые точки. Фазовый портрет второго фундаментального гамильтониана для этих случаев представлен на рис. 7 для случая  $A < A_c$  ( $A = 1, B = 10$ ) и рис. 8. для случая  $A > A_c$  ( $A = 10, B = 10$ )

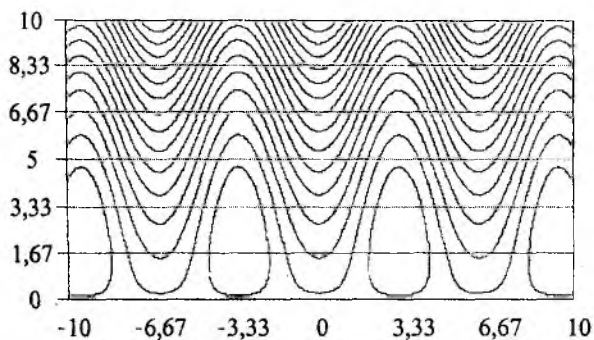


Рис. 7

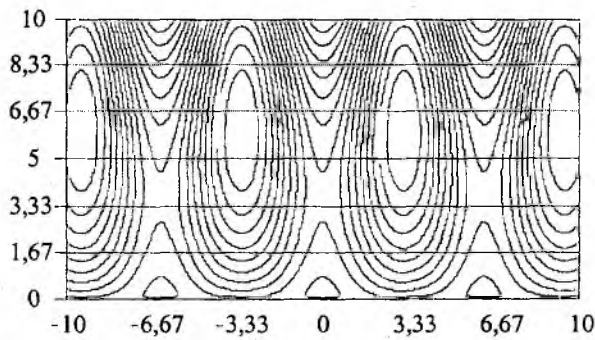


Рис. 8

**6. Пример.** К анализу динамики осциллятора Дюффинга и ко второму фундаментальному резонансу приводят исследования многих физических задач. В качестве примеров мы рассмотрим динамику движения заряженной частицы с зарядом  $e$  и массой  $m$  во внешнем постоянном однородном магнитном поле и во внешнем переменном электрическом поле. Векторные потенциалы внешних полей можно представить в виде:  $\vec{A} = \vec{A}_0 + \vec{A}_1$ , где  $\vec{A}_0 = (-y \cdot B_0, 0, 0)$  – векторный потенциал внешнего однородного постоянного магнитного поля с напряженностью  $B_0$ . Это поле направлено вдоль оси  $x$ .  $\vec{A}_1 = a \cdot (\cos \omega t, 0, 0)$  – векторный потенциал внешнего электрического поля. Гамильтониан частицы во внешних электромагнитных полях можно представить в виде:

$$H = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 (\vec{P} - \frac{e}{c} \vec{A})^2} + e \cdot \phi, \quad (10)$$

где  $\vec{P}$  – обобщенный импульс частицы.

Если энергия частицы достаточно мала так, что можно воспользоваться разложением функции Гамильтона по малому параметру  $\beta \equiv v/c$ , то гамильтониан (10) упрощается. Учитывая, кроме того, что в нашем случае скалярный потенциал внешнего поля можно положить равным нулю, гамильтониан (10) можно переписать в виде:

$$H = \frac{p^2}{2m} - \frac{e}{mc} \vec{p} \cdot \vec{A}_1 - \frac{p^4}{2m^3 c^2}. \quad (11)$$

Аналогично тому, как это было сделано в работах [1], [5], гамильтониан (11) может быть сведен к виду второго фундаментального гамильтониана:

$$H = -A \cdot I + I^2 + B \cdot \sqrt{I} \cdot \cos \theta.$$

В этом гамильтониане параметры  $A$  и  $B$  имеют следующий вид:

$$A = \frac{2mc^2}{\omega_H^2} (\omega_H - \omega), \quad B = \sqrt{\frac{2m^3}{\omega_H}} \cdot c^2 \frac{a}{B_0},$$

где  $\omega_H = eB_0 / mc$  – циклотронная частота.

Причем, компоненты импульса частицы  $p_x$  и  $p_y$  следующим образом связаны с новыми каноническими переменными  $(I, \theta)$ :

$$p_x = -\sqrt{2 \cdot m \cdot \omega_H I} \cdot \sin \theta, \quad p_y = \sqrt{2m\omega_H I} \cdot \cos \theta.$$

Результаты анализа второго фундаментального гамильтониана, приведенные в предыдущем разделе, могут быть полностью использованы для анализа динамики частицы.

**Список литературы:** 1. Лихтенберг А., Либерман М., Регулярная и стохастическая динамика. М.: «Мир», 1984. 528 с. 2. Мельников В.К., Труды Моск. матем. общ., 1963. Т. 12. 3. Henrard J., Lemaire A. // Celestial Mechanics. 1983. V. 30. P. 197. 4. Henrard J / Dynamics reported. 1993. V. 2. P. 117. 5. Cohen B.I., Cohen R.H., Nevins W.M., Rognlien T.D. // Rev. Mod. Phys., 1991. V. 63. P. 949.