*Проблемы бионики*
*1998. Вып. 48. С. 23—27*

ХТУРЭ

УДК 681.51.015

*Н.Г. АКСАК, О.Г. РУДЕНКО, А. ШТЕФАН*

# РЕКУРРЕНТНЫЙ ПРОЕКЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПРИ КОРРЕЛИРОВАННЫХ ПОМЕХАХ

Существует множество задач распознавания образов к построению разделяющей гиперплоскости, выбираемой из заданного класса аппроксимирующих функций. Довольно широкий круг задач можно охватить, приняв в качестве такой аппроксимирующей функции линейную. В этом случае алгоритм обучения представляет собой некоторое правило настройки коэффициентов, основанное обычно на методе наименьших квадратов (МНК). При этом, как правило, предполагается, что присутствующие в измерениях помехи некоррелированы.

Рассмотрим более общую задачу оценивания параметров линейной регрессионной модели (построение линейной разделяющей гиперплоскости):

$$y_n = c^{*T} x_n + \xi_n, \tag{1}$$

где $y_n$ — наблюдаемый выходной сигнал;

$x_n = (x_{1,n}, x_{2,n}, \ldots, x_{N,n})^T$ — вектор входных сигналов $N\times 1$;

$c^* = (c_1^*, c_2^*, \ldots, c_N^*)^T$ — вектор оцениваемых параметров $N\times 1$; $\xi_n$ — помеха; $n$=0,1,2,... — дискретное время при наличии коррелированных помех.

Как уже отмечалось, для оценки параметров $c^*$ по измерениям $y_n$ и $x_n$ успешно используются алгоритмы, основанные на методе наименьших квадратов [1;2]. Если же $c^* = \mathrm{var}$, хорошие результаты дает применение проекционных алгоритмов [3,4], имеющих следующий вид:

$$c_n = c_{n-1} + X_{n|s}(X_{n|s}^T X_{n|s})^{-1} E_{n|s}, \tag{2}$$

где $X_{n|s} = (x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-s+1})$ — матрица $N\times S$;

$E_{n|s} = (y_n - c_{n-1}^T x_n, y_{n-1} - c_{n-1}^T x_{n-1}, \ldots, y_{n-s+1} - c_{n-1}^T x_{n-s+1})^T$ — вектор $s\times 1$; $s$ — память (число учитываемых шагов) алгоритма ($s = const < N$).

Данный алгоритм был получен и изучен в работах [3,4] для случая некоррелированных помех. Наличие же коррелированных помех $\xi_n$ приводит к тому, что как алгоритмы МНК, так и проекционные не будут обеспечивать минимальную ошибку идентификации. Для уменьшения дисперсии ошибок идентификации необходимо в алгоритмы вводить дополнительную информацию о помехах. В частности , если известна ковариационная матрица помех, она используется в МНК в качестве весовой матрицы. В проекционных же алгоритмах она используется по аналогии с [5] следующим образом:

$$c_n = c_{n-1} + X_{n|s}(X_{n|s}^T X_{n|s} + D_{n|s})^{-1} E_{n|s} . \qquad (3)$$

Здесь $D_{n|s}$ — ковариационная матрица помех.

Так как реализация алгоритмов МНК и (2), (3) связана с необходимостью обращения матрицы наблюдений (размерности $n \times n$ в МНК и $s \times s$ в проекционных алгоритмах), более удобным в вычислительном отношении являются рекуррентные формы данных алгоритмов. Рекуррентные формы алгоритма МНК известны давно [1], проекционные алгоритмы (2) приведены в [4].

Цель данной работы — получение рекуррентной формы алгоритма (3). Предположим, что ковариационная матрица помех невырождена и известна

$$D_{n|s} = M\left\{\Xi_{n|s}\Xi_{n|s}^T\right\} = \begin{pmatrix} d_{n,n} & d_{n,n-1} & \cdots & d_{n,n-s+1} \\ d_{n-1,n} & d_{n-1,n-1} & \cdots & d_{n-1,n-s+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{n-s+1,n} & d_{n-s+1,n-1} & \cdots & d_{n-s+1,n-s+1} \end{pmatrix}.$$

Здесь $\Xi_{n|s} = (\xi_n, \xi_{n-1}, \ldots \xi_{n-s+1})^T$ — вектор $s \times 1$; $M\{\cdot\}$ — символ математического ожидания; $d_{ij} = M\{\xi_i \xi_j\}$.

Пусть на $(n-1)$-м шаге получена оценка

$$c_{n-1} = c_{n-2} + X_{n-1|s}(X_{n-1|s}^T X_{n-1|s} + D_{n-1|s})^{-1} E_{n-1|s} .$$

Так как в рассматриваемых алгоритмах память $s$ фиксирована, их особенностью является то, что на каждом шаге матрица наблюдений $X_{n|s}$ формируется следующим образом: отбрасывается устаревшее $(n-s)$-е наблюдение (последний столбец матрицы наблюдений) и в матрицу включается вновь поступившее $n$-е наблюдение, т.е. можно записать

$$X_{n-1|s} = (x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-s}) = (X_{n-1|s-1} \vdots x_{n-s}), \tag{4}$$

$$X_{n|s} = (x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-s+1}) = (x_n \vdots X_{n-1|s-1}). \tag{5}$$

Таким образом, наличие у $X_{n-1|s}$ и $X_{n|s}$ общей матрицы $X_{n-1|s-1}$ позволяет производить вычисление $X_{n|s}$ по $X_{n-1|s}$, а значит и вычисление обратной матрицы на каждом шаге по обратной матрице, полученной на $(n-1)$-м шаге.

Блочная структура матриц $D_{n-1|s}$ и $D_{n|s}$ (размерности $s \times s$)

$$D_{n-1|s} = \left(\begin{array}{c|c} D_{n-1|s-1} & d \\ \hline d^T & d_{n-s,n-s} \end{array}\right);$$

$$D_{n|s} = \left(\begin{array}{c|c} d_{n,n} & \hat{d}^T \\ \hline \hat{d} & D_{n-1|s-1} \end{array}\right)$$

показывает, что они также имеют общую матрицу $D_{n-1|s-1}$ размерности $(s-1) \times (s-1)$. Здесь

$$d = (d_{n-1,n-2}, \dots, d_{n-1,n-s})^T; \tag{6}$$

$$\hat{d} = (d_{n,n-1}, \dots, d_{n,n-s+1})^T. \tag{7}$$

Введем следующие обозначения:

$$A_{n-1|s} = (X^T_{n-1|s} X_{n-1|s} + D_{n-1|s});$$

$$B_{n-1|s} = A^{-1}_{n-1|s};$$

$$A_{n|s} = (X^T_{n|s} X_{n|s} + D_{n|s});$$

$$B_{n|s} = A^{-1}_{n|s}.$$

С учетом (4) и (5) матрицы $A_{n-1|s}$ и $A_{n|s}$ примут вид:

$$A_{n-1|s} = \left( \begin{array}{c|c} (B_{n-1|s-1})^{-1} & X^T_{n-1|s-1}x_{n-s} + d \\ \hline x^T_{n-s}X_{n-1|s-1} + d^T & \|x_{n-s}\|^2 + d_{n-s} \end{array} \right),$$

$$A_{n|s} = \left( \begin{array}{c|c} \|x_n\|^2 + d_n & x^T_n X_{n-1|s-1} + \hat{d}^T \\ \hline X^T_{n-1|s-1}x_n + \hat{d} & (B_{n-1|s-1})^{-1} \end{array} \right).$$

Матрицы $B_{n|s}$ и $B_{n-1|s}$ будем искать в виде

$$B_{n-1|s} = \left( \begin{array}{c|c} F_{n-1|s-1} & a_{n-1} \\ \hline a^T_{n-1} & b_{n-1} \end{array} \right), \tag{8}$$

$$B_{n|s} = \left( \begin{array}{c|c} \hat{b}_n & \hat{a}^T_n \\ \hline \hat{a}_n & F_{n-1|s-1} \end{array} \right). \tag{9}$$

Для определения элементов матрицы $B_{n-1|s-1}$ воспользуемся тем, что $A_{n-1|s}B_{n-1|s} = I_s$ ($I$ — единичная матрица $s \times s$). Это позволяет записать следующую систему уравнений:

$$(B_{n-1|s-1})^{-1}F_{n-1|s-1} + (X^T_{n-1|s-1}x_{n-s} + d)a^T_{n-1} = I_{s-1};$$

$$(B_{n-1|s-1})^{-1}a_{n-1} + (X^T_{n-1|s-1}x_{n-s} + d)b_{n-1} = 0;$$

$$(x^T_{n-s}X_{n-1|s-1} + d^T)F_{n-1|s-1} + (\|x_{n-s}\|^2 + d_{n-s})a^T_{n-1} = 0;$$

$$(x^T_{n-s}X_{n-1|s-1} + d^T)a_{n-1} + (\|x_{n-s}\|^2 + d_{n-s})b_{n-1} = 1.$$

Решая данную систему, получаем следующие соотношения для элементов матрицы $B_{n-1|s}$ (8):

$$b_{n-1} = (\|\widetilde{x}_{n-s}\|^2 - z_{n-s}^T B_{n-1|s-1} z_{n-s})^{-1};$$

$$a_{n-1} = -b_{n-1} B_{n-1|s-1} z_{n-s};$$

$$F_{n-1|s-1} = B_{n-1|s-1} + b_{n-1} B_{n-1|s-1} z_{n-s} z_{n-s}^T B_{n-1|s-1}.$$

Здесь $\|\widetilde{x}_{n-s}\|^2 = \|x_{n-s}\|^2 + d_{n-s,n-s}$;

$z_{n-s} = X_{n-1|s-1}^T x_{n-s} + d$; $d$ — вектор, определяемый в соответствии с (6).

Аналогично, учитывая, что $A_{n|s} B_{n|s} = I_s$, получим систему уравнений для определения элементов матрицы $B_{n|s}$. Опуская несложные вычисления, запишем в окончательном виде рекуррентную процедуру идентификации так:

$$c_n = c_{n-1} + X_{n|s} B_{n|s} E_{n|s}, \tag{10}$$

где матрица $B_{n|s}$ имеет вид (9) с элементами, вычисляемыми следующим образом:

$$\hat{F}_{n-1|s-1} = B_{n-1|s-1} + \hat{b}_n B_{n-1|s-1} z_n z_n^T B_{n-1|s-1};$$

$$B_{n-1|s-1} = F_{n-1|s-1} + \hat{B}_n F_{n-1|s-1} z_{n-s} z_{n-s}^T F_{n-1|s-1};$$

$$\hat{B}_n = (\|\widetilde{x}_n\|^2 - z_n^T B_{n-1|s-1} z_n)^{-1};$$

$$\hat{a}_n = -\hat{b}_n B_{n-1|s-1} z_n,$$

где $\|\widetilde{x}_n\|^2 = \|x_n\|^2 + d_{n,n}$;

$z_n = X_{n-1|s-1}^T x_n + \hat{d}$; $\hat{d}$ — вектор, имеющий вид (7).

**Список литературы:** 1. *Алберт А.* Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание. М.: Наука, 1977.224 с. 2. *Эйкхофф П.* Основы идентификации систем управления. М.: Мир, 1975. 683 с. 3. *Ищенко Л.А., Либероль Б.Д., Руденко О.Г.* Проекционные алгоритмы идентификации линейных объектов// Докл. АН УССР. Сер. А. 1985. № 7. С.62-64. 4. *Ищенко Л.А., Либероль Б.Д., Руденко О.Г.* О свойствах одного класса многошаговых адаптивных алгоритмов идентификации // Кибернетика. 1986 №1. С. 92-96. 5. *Браммер К., Зиффлинг Г.* Фильтр Калмана-Бьюси. М.:Наука, 1982. 200 с.

*Поступила в редколлегию 17.08.97*