УДК 519.852

МОДИФІКАЦІЯ МЕТОДУ ПАРАМЕТРИЗАЦІЇ ЦІЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ УМОВНОЇ МІНІМІЗАЦІЇ

Голубощенко Р.В.
Науковий керівник – канд. техн. наук, доц. Наумейко І.В.
Харківський національний університет радіоелектроніки, каф. ПМ,
м. Харків, Україна
тел. +38(097) 677-12-26, email: ruslan.holuboshchenko@nure.ua

This work is written in order to show a reader one quite easy but helpful mathematical improvement of objective function parametrization method. The biggest attention is paid to proof of modified method viability. Also, the geometrical representation is given.

Метод параметризації цільової функції використовується для максимізації функції з обмеженнями-нерівностями:

$$f(x) \to \max,\ g_i(x) \le 0,\ i = 1,2,...,m. \tag{1}$$

Точним розв'язком задачі (1) є $f^* = \inf f(x)$.

Сам метод полягає у тому, щоб замість задачі (1) розглядати задачу

$$M(x;\beta_k) = \left(f(x) - \beta_k\right)^2 + \varphi(x) \to \min, \quad x \in X, \tag{2}$$

де $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{m}\left[\max(0; g_i(x))\right]^2$ – квадратична функція штрафу при $C = 1$ [1, §5], а $\beta_k \le f^*$ є послідовністю параметрів, яка збігається до f^*.

Геометричну інтерпретацію задачі (2) наведено на рис. 1. Прийнявши $g(x) = \sqrt{\varphi(x)}$, можна побачити, що її зміст – відшукання кола найменшого радіуса, що має перетин із образом W множини X при відображенні $x \to (g(x); f(x))$. На цій ілюстрації точки $a^i(0;\beta_i)$ мають параметр β_i як ординату, тому задача (1) зводиться до знаходження послідовності $\{a^i\}$ центрів кіл, яка збігається до розв'язку $a^*(0; f^*)$.

Класичний метод параметризації цільової функції пропонує таку формулу для параметра β_{k+1}:

$$\beta_{k+1} = \beta_k + \sqrt{M(x^k;\beta_k)}, \tag{3}$$

де x^k – розв'язок задачі (2).

Ідея модифікованого методу полягає в тому, щоб замінити формулу (3) на таку:

$$\beta_{k+1} = \beta_k + \frac{M(x^k;\beta_k)}{f(x^k) - \beta_k}. \tag{4}$$

Рівняння (4) нескладно отримати за допомогою простих фактів аналітичної геометрії та з урахуванням того факту, що $c^k(g(x^k); f(x^k))$. Воно виводиться з міркувань того, що центр наступного кола лежить в точці перетину перпендикуляра до відрізка $[a^k; c^k]$ в точці c^k з віссю ординат.

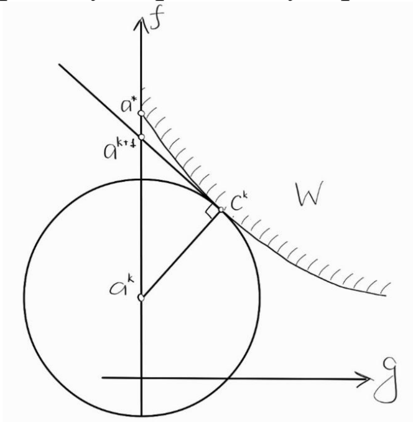

Рис. 1

Необхідно довести збіжність послідовності $\{\beta_k\}$. Якщо припустимо, що область W є випуклою, то з (4) стає достатньо очевидно, що вона не спадає.

Покажемо, що послідовність обмежена зверху величиною f^* і, як наслідок, має границю. Це можна зробити, довівши, що справджується наступна нерівність:

$$\frac{M(x^k;\beta_k)}{f(x^k)-\beta_k} \le f^* - \beta_k.$$

Знову звернемося до ілюстрації. Геометричний зміст нерівності такий: довжина відрізка, на який збільшується попередній параметр, не перевищує дистанцію між цим параметром та розв'язком.

З умови $f^k \le f^*$ видно, що виконується нерівність:

$$f^k - \beta_k \le f^k - \beta_{k,} \tag{5}$$

яка явно показує, що

$$M(x^k;\beta_k) = (f^k - \beta_k)^2 + \varphi(x^k) \le (f^k - \beta_k)(f^* - \beta_k).$$

Звідси отримуємо шукану нерівність:

$$\frac{M(x^k;\beta_k)}{f(x^k)-\beta_k} \le \frac{(f^k - \beta_k)(f^* - \beta_k)}{f(x^k)-\beta_k} = f^* - \beta_k.$$

Таким чином, послідовність $\{\beta_k\}$ збігається до деякого числа $\beta \le f^*$. Тоді з (2) робимо висновок, що $\lim\limits_{k\to\infty} M(x^k;\beta_k) = 0$, а з цього випливає рівність:

$$\lim_{k\to\infty} f(x^k) = \lim_{k\to\infty} \beta_k = \beta, \tag{6}$$

$$\lim_{k\to\infty} \varphi(x^k) = 0. \tag{7}$$

З рівностей (6), (7) можна зробити висновок, що x^* – гранична точка послідовності $\{x^k\}$, за умови, що допустима множина X задачі (1) є компактом, а тому (6) означає рівність $\beta = f^*$.

Таким чином ми довели збіжність розглянутої модифікації методу параметризації цільової функції. Також з його геометричної інтерпретації стає очевидно, що модифікований метод (4) збігатиметься до розв'язку f^* швидше за класичний метод (3). Доведення цього факту, однак, залишимо поза межами цієї доповіді.

Список використаних джерел:

1. Сухарёв А.Г., Тимохов А.В., & Фёдоров В.В. (2005)/ *Курс методов оптимизации*. ФИЗМАТЛИТ.