ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ КОНТРОЛЯ КОНЕЧНОГО АВТОМАТА

А. А. Метешкин, Н. Д. Рябуха

Харьков

Данная работа по своему содержанию и направлению примыкает к работе [1], где предложен метод контроля конечного автомата с помощью контрольного автомата. При этом предполагается наличие основного автомата K с входным алфавитом $x_\rho \in X$ ($\rho = 1, \ldots, m$), алфавитом состояний $a_i \in A$ ($i = 1, \ldots, n$) и функцией переходов $a(t+1) = \delta[a(t), x(t)]$, контрольного автомата L с выходным алфавитом $x_\rho \in X$ ($\rho = 1, \ldots, m$), алфавитом состояний $b_i \in B$ ($i = 1, \ldots, n_1$) и функцией переходов $b(t+1) = \delta_1[b(t), x(t)]$, а также контрольного устройства D.

Множества состояний A и B разбиты на l соответствующих друг другу подмножеств. При правильной работе автоматы находятся в соответствующих подмножествах. Если при отказе автоматы переходят в состояния, находящиеся в несоответствующих подмножествах, то контрольное устройство D обнаруживает несоответствие и выдает сигнал отказа. В дальнейшем под отказом элемента будем понимать любую неисправность элемента, т. е. и сбой и отказ, а под отказом автомата — неправильный переход автомата в любом одном такте.

Под эффективностью контрольного автомата L относительно автомата K понимается вероятность того, что при совместной работе этих автоматов отказ автомата K будет обнаружен контрольным устройством D в одном такте.

В работе [1] произведен расчет эффективности контроля для случая, когда вероятность перехода автомата K из любого состояния (вследствие отказа) в любое другое постоянна и равна $\frac{1}{n-1}$, а все состояния равновероятны. Однако во многих типах автоматов эти требования не выполняются. Например, в автоматах ЦВМ первое условие не выполняется потому, что переход при отказе в различные состояния соответствует отказам элементов памяти различной кратности, а они неравновероятны.

Второе условие — распределение состояний автомата — обусловлено статистикой входных сигналов и алгоритмов функционирования автомата и также неравновероятно.

Если распределение состояний автомата и переходы в различные состояния при отказах неравновероятны и могут быть вычислены, то их учет позволяет более точно рассчитать эффективность, а также произвести разбиение множеств состояний автоматов на соответствующие подмножества так, чтобы эффективность контроля при заданном числе подмножеств была максимальной. Это позволяет достигнуть заданной эффективности контроля при минимальном количестве состояний контрольного автомата.

С учетом всего сказанного выше в данной работе получено выражение для расчета эффективности при следующих предположениях:

отказы автомата в различных тактах взаимно независимы;

отказ автоматов K и L независимы;

переходы автоматов в различные состояния при отказах неравновероятны;

состояния автомата неравновероятны, а входные сигналы x_ρ представляют собой последовательность независимых испытаний с известным распределением вероятностей $\pi(x_\rho)$.

Введем следующие обозначения:

N_{G_ϑ} — количество элементов подмножества G_ϑ автомата K $(\vartheta = 1, \ldots, l)$;

N_{R_ϑ} — количество элементов подмножества R_ϑ автомата L $(\vartheta = 1, \ldots, l)$;

$P(a_i)\,[P(b_i)]$ — вероятность $a_i\,(b_i)$ состояния автомата $K\,(L)$;

$P\left(\frac{a_i}{a_i}\right)\left[P\left(\frac{b_i}{b_i}\right)\right]$ — условная вероятность того, что автомат $K\,(L)$ перейдет в состояние $a_i\,(b_i)$ при условии перехода его в это состояние при безотказной работе;

$P\left(\frac{a_j}{a_i}\right)\left[P\left(\frac{b_j}{b_i}\right)\right]$ — условная вероятность того, что при отказе автомат $K\,(L)$ перейдет в состояние $a_j\,(b_j)$ $(j \neq i)$ при условии, что при отсутствии отказа он должен был перейти в состояние $a_i\,(b_i)$;

$\alpha = \begin{cases} a \text{ — состояние, в которое перейдет автомат } K \text{ при отсутствии отказа;} \\ a^* \text{ — состояние, в которое перейдет автомат } K \text{ при отказе;} \end{cases}$

$\beta = \begin{cases} b \text{ — состояние, в которое перейдет автомат } L \text{ при отсутствии отказа;} \\ b^* \text{ — состояние, в которое перейдет автомат } L \text{ при отказе.} \end{cases}$

При данных предположениях вероятность обнаружения отказа автомата K равна

$$P_k = \sum_{\vartheta=1}^{l} \sum_{i=1}^{N_{G_\vartheta}} P(a_i) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_{G_\vartheta}} P\left(\frac{a_j}{a_i}\right) + \sum_{i=1}^{n_1} P(b_i)\, P\left(\frac{b_i}{b_i}\right) + \sum_{\vartheta=1}^{l} \sum_{i=1}^{N_{R_\vartheta}} P(b_i) \times$$

$$\times \left(1 - P\left(\frac{b_i}{b_i}\right)\right) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_{R_\vartheta}} P\left(\frac{b_j}{b_i}\right) - 2 \sum_{i=1}^{n} P(a_i) \left\{ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_{G_\vartheta}} P\left(\frac{a_j}{a_i}\right) \left[P\left(\frac{b_i}{b_i}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(1 - P\left(\frac{b_i}{b_i}\right)\right) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_{R_\vartheta}} P\left(\frac{b_i}{b_i}\right) \right] \right\}. \qquad (1)$$

Проследим подсчет вероятностей $P(a_i)$, $P\left(\frac{a_i}{a_i}\right)$, $P\left(\frac{a_j}{a_i}\right)$.

Предположим, что комбинационная часть автомата $K\,(L)$ работает безотказно, а отказы различных элементов памяти являются случайными и независимыми.

Распределение вероятностей $P(a_i)$ можно вычислить, если последовательность входных сигналов $\{x_\rho\}$ есть совокупность независимых испытаний с известной функцией распределения $\pi(x_\rho)$. В этом случае последовательность состояний автомата образует марковскую цепь. Если последняя является эргодической, то существуют и могут быть вычислены предельные вероятности $P(a_i)$ пребывания автомата в состояниях a_i $(i = 1, \ldots, n)$, не зависящие от начального состояния.

Для вычисления $P(a_i)$ построим матрицу переходов

$$\left\| \bigvee_{p=1}^{m} x_{pij} \right\| \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

где $\bigvee_{p=1}^{m} x_{pij}$ — дизъюнкция входных сигналов, переводящих автомат в случае безотказной работы из состояния a_i в состояние a_j.

Зная распределение вероятностей входных сигналов и матрицу переходов, построим матрицу вероятностей переходов $\| P_{ij} \|$, где

$$P_{ij} = \sum_{p=1}^{m} \pi(x_{pij}); \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Решив теперь систему $n+1$ уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} P(a_i) = 1; \quad P(a_j) = \sum_{i=1}^{n} P(a_i) \cdot P_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

находим вероятности пребывания автомата в различных состояниях $P(a_i)$.

Вероятности $P\left(\frac{a_i}{a_i}\right)$ и $P\left(\frac{a_j}{a_i}\right)$ определим следующим образом. Построим матрицу хэмминговых расстояний

$$\| d_{ij} \| \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

где d_{ij} — число отказавших элементов памяти в одном такте, приводящих к переходу в состояние a_j вместо a_i.

Затем построим матрицу вероятностей отказов

$$\| P^*_{ij} \| \quad i, j = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

где P^*_{ij} — вероятность перехода автомата в состояние a_j при условии, что в случае безотказной работы он должен перейти в состояние a_i.

В силу предположения о независимости отказов элементов памяти

$$P^*_{ij} = C^{d_{ij}}_{z} p^{d_{ij}} (1-p)^{z-d_{ij}}, \tag{4}$$

где p — вероятность отказа одного элемента памяти автомата;

z — число элементов памяти автомата.

Приняв в (4) $d_{ij} = 0$, получаем вероятности $P\left(\frac{a_i}{a_i}\right) = P(a^0) = \text{const}$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Вероятности $P\left(\frac{a_j}{a_i}\right)$ рассчитаем по формуле

$$P\left(\frac{a_j}{a_i}\right) = \frac{P^*_{ij}}{\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} P^*_{ij}}.$$

Аналогично рассчитываем вероятности $P(b_i)$, $P\left(\frac{b_i}{b_i}\right)$, $P\left(\frac{b_j}{b_i}\right)$.

Учитывая, что $P\left(\frac{a_l}{a_i}\right) = P(a^0)$, $P(b_i/b_l) = P(b^0)$ из (1) окончательно получим выражение эффективности

$$P_k = \sum_{\vartheta=1}^{l} \sum_{i=1}^{N_{G\vartheta}} P(a_i) \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N_{G\vartheta}} P\left(\frac{a_j}{a_i}\right) + P(b^0) + (1 - P(b^0)) \sum_{\vartheta=1}^{l} \sum_{i=1}^{N_{R\vartheta}} P(b_i) \times$$

$$\times \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N_{R\vartheta}} P\left(\frac{b_j}{b_i}\right) - 2 \sum_{i=1}^{n} P(a_i) \left\{ \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N_{G\vartheta}} P\left(\frac{a_j}{a_i}\right) \left[P(b^0) + (1 - P(b^0)) \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N_{R\vartheta}} P\left(\frac{b_j}{b_i}\right) \right] \right\}. \quad (5)$$

Частные случаи

1. На практике автомат L часто строят таким образом, что

$$N_{R\vartheta} = 1 \quad (\vartheta = 1, \ldots, l);$$

тогда выражение (5) упрощается и имеет вид

$$P_k = P(b^0) + [1 - 2P(b^0)] \left[\sum_{\vartheta=1}^{l} \sum_{i=1}^{N_{G\vartheta}} P(a_i) \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N_{G\vartheta}} P\left(\frac{a_j}{a_i}\right) \right]. \quad (6)$$

2. Предположим, что

а) $P(a_i) = \text{const} = \frac{1}{n}$ (все состояния автомата равновероятны);

б) $P\left(\frac{a_j}{a_i}\right) = \text{const} = \frac{1}{n-1}$ (при отказе переход в любое состояние равновероятен).

В этом случае из (6) имеем

$$P_k = P(b^0) + [1 - 2P(b^0)] \frac{1}{n(n-1)} \sum_{\vartheta=1}^{l} N_{G\vartheta}(N_{G\vartheta} - 1). \quad (7)$$

Если дополнительно принять $P(b^0) = 1$, то

$$P_k = 1 + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n(n-1)} \sum_{\vartheta=1}^{l} N_{G\vartheta}^2. \quad (8)$$

Здесь P_k определяется разбиением состояний автомата на подмножества $N_{G\vartheta}$ $(\vartheta = 1, \ldots, l)$.

Можно показать, что при принятых допущениях и заданных n и l эффективность максимальна в том случае, когда $N_{G\vartheta} = \text{const} = \frac{n}{l}$ и рассчитывается по формуле (9), полученной в [1]

$$P_k = \frac{n(l-1)}{l(n-1)}. \quad (9)$$

3. Для случая дублирования $(n = l)$ из (6) имеем

$$P_k = P(a^0) = P(b^0). \quad (10)$$

4. Вероятность обнаружения отказов кратности d $P_k^{(d)}$ определяется из выражения (11)

$$P_k^{(d)} = 1 - \frac{N_н^{(d)}}{N^{(d)}}, \tag{11}$$

где $N^{(d)}$ — максимально возможное число отказов кратности d в автомате с z элементами памяти;

$N_н^{(d)}$ — число отказов кратности d, необнаруживаемых при данном методе контроля.

$N^{(d)}$ рассчитывается по формуле, приведенной в работе [4]:

$$N^{(d)} = 1 + \frac{1}{(d-1)!} \sum_{r=d+1}^{z} \frac{(r-1)!}{(r-d)!}. \tag{12}$$

$N_н^{(d)}$ определяется из выражения (13)

$$N_н^{(d)} = \sum_{\vartheta=1}^{l} \sum_{i=1}^{N_{G_\vartheta}} P(a_i) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_{G_\vartheta}} \frac{d_{ij}}{d}, \tag{13}$$

где $\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_{G_\vartheta}} \frac{d_{ij}}{d}$ — число возможных переходов в подмножестве N_{G_ϑ} из состояния a_i, соответствующих необнаруживаемым отказам кратности d.

Полученные выражения (5)—(8) позволяют рассчитать эффективность контроля конечного автомата при различных допущениях, а с помощью выражения (11) рассчитывается вероятность обнаружения отказов различной кратности.

Приложение. Вывод формулы эффективности P_k. Отказ автомата K будет обнаружен в случае, когда автоматы перейдут в состояния, находящиеся в несоответствующих подмножествах, т. е.

1. $a^* \overline{\in} C_\vartheta$, $\beta \in R_\vartheta$;
2. $a^* \in G_\vartheta$, $\beta \overline{\in} R_\vartheta$.

Вероятность обнаружения отказа, происшедшего при переходе автомата K в одно из состояний подмножества G_ϑ равна

$$P_{G_\vartheta} = P\left(\frac{a^* \overline{\in} G_\vartheta}{\beta \in R_\vartheta}\right) + P\left(\frac{a^* \in C_\vartheta}{\beta \overline{\in} R_\vartheta}\right) = P(a^* \overline{\in} G_\vartheta) \cdot P(\beta \in R_\vartheta) +$$

$$+ P(a^* \in G_\vartheta) \cdot P(\beta \overline{\in} R_\vartheta).$$

Учитывая соотношения

$$P(a^* \overline{\in} G_\vartheta) + P(a^* \in G_\vartheta) = 1,$$

$$P(\beta \in R_\vartheta) + P(\beta \overline{\in} R_\vartheta) = 1,$$

имеем

$$P_{G_\vartheta} = P(a^* \in G_\vartheta) + P(\beta \in R_\vartheta) - 2P(\beta \in R_\vartheta) \cdot P(a^* \in G_\vartheta). \tag{14}$$

Примем во внимание, что

$$P(a^* \in G_\vartheta) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_{G_\vartheta}} P\left(\frac{a_j}{a_i}\right) \tag{15}$$

$$P(\beta \in R_\vartheta) = P(b \in R_\vartheta) + P(b^* \in R_\vartheta) =$$

$$= P\left(\frac{b_i}{b_i}\right) + \left(1 - P\left(\frac{b_i}{b_i}\right)\right) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{N_{R_\vartheta}} P\left(\frac{b_j}{b_i}\right). \qquad (16)$$

Подставив (15) и (16) в (14) и просуммировав с учетом $P(a_l)$ по всем $l = 1, \ldots, n$, получаем выражение (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Петросян, Б. С. Мнацаканян. Автоматический контроль функционирования ЭЦВМ. Изв. АН СССР. «Техническая кибернетика», 1964, № 1.
2. Е. Н. Турута. Некоторые методы повышения надежности конечных автоматов. Сб. «Проблемы синтеза цифровых автоматов». Изд-во «Наука», 1967.
3. В. И. Левин. Вероятностный анализ ненадежных автоматов. Изд-во «Зинатне», Рига, 1969.
4. Н. Д. Путинцев. Аппаратный контроль управляющих цифровых вычислительных машин. Изд-во «Советское радио», 1966.

НАДЕЖНОСТЬ СИСТЕМ СО СКОЛЬЗЯЩИМ РЕЗЕРВИРОВАНИЕМ ПРИ ОБСЛУЖИВАНИИ ПОТОКА СЛУЧАЙНЫХ ТРЕБОВАНИЙ

В. А. Трусов

Харьков

Для создания сложных и надежных систем на практике часто предусматривается скользящее резервирование. Оценка надежности системы, выполняющей случайные задания, произведена в работах [1, 2]. В данной работе рассматривается задача определения характеристик надежности системы, выполняющей случайные задания и состоящей из m основных элементов и n элементов в режиме скользящего резерва. На основе математического аппарата конечных марковских цепей решение доведено до уровня алгоритма вычислений, а для некоторых случаев получены расчетные формулы и асимптотические оценки.

Процесс функционирования системы в режиме обслуживания потока случайных требований без ограничения общности можно рассмотреть на примере комплекса вычислительных средств, состоящего из m основных и n резервных ЦВМ, обозначаемого в дальнейшем через $K(m, n)$. В зависимости от поступающих на обслуживание требований одновременно могут работать t машин ($t = 0, 1, 2, \ldots, m$). Каждая из резервных машин контролируется, например, тестами и может заменить любую отказавшую рабочую машину при обнаружении в последней неисправности. Вероятность обнаружения отказов системой контроля каждой машины равна единице. При этом вычислительная нагрузка (программа и числовой материал) без потерь времени передается любой из исправных резервных машин, которая продолжает вычисления с того места программы, в котором произошел отказ; вышедшая из строя машина немедленно поступает в ремонт.

В этих предположениях любую комбинацию событий из потоков требований на вычисления, отказов, обслуживания требований и восстановлений можно рассматривать как определяющую некоторое состояние i всего комплекса $K(m, n)$, ($i = 1, 2, \ldots, N$). Потоки отказов, восстановлений и обслуживания требований предполагаются простейшими с параметрами λ, μ и γ для каждой ЦВМ соответственно. Входной для $K(m, n)$ поток требований на вычисления также предполага-