

УДК 004.932.2.001.36:519.7

С. Н. Герасин, В. В. Шляхов

## АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ВВЕДЕНИЕ МЕТРИКИ В СУБЪЕКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

### 1. Введение

Метод компараторной идентификации, основанный на изучении свойств бинарных отношений, позволяет выявить структуру неизвестного преобразования с точностью до взаимно однозначного отображения. Известно [1], что с точки зрения построения математической модели «черного ящика» этого вполне достаточно, поскольку речь идет об изоморфизме моделей, а невозстанавливаемая взаимно однозначная часть представляет собой некую шкалу, выбор которой во многих реальных задачах может быть произвольным.

Вместе с тем, на практике часто знание шкалы необходимо. К подобному выводу несложно прийти, проанализировав круг задач, возникающих в теории измерений, экономике, психофизике и во многих других областях [2].

Когда речь идет о преобразованиях линейного пространства в  $R_n$ , как правило, полезнейшая взаимно однозначная часть по сути дела искривляет  $n$ -мерное арифметическое пространство. Еще раз подчеркнем: на базе бинарных отношений это искривление найти невозможно, более того, его нельзя даже «уловить», т. е. установить сам факт его присутствия. Однако идеология компараторного метода может быть сохранена и распространена на случай  $n$ -арных отношений. При таком подходе поставленная выше задача может быть решена. Ее решение, практически важное в психофизике, экономике и некоторых других областях, является целью настоящего исследования.

На примере психофизической системы «орган зрения человека» сформулируем некоторые положения, предшествующие формальной постановке задачи.

Рассмотрим процесс распознавания цветов. Многочисленные исследования в области психофизики, в совокупности с методом компараторной идентификации, позволили в настоящее время прийти к выводу о так называемой трехкомпонентной модели распознавания цветов [3]. Цвет может быть охарактеризован тремя числами  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , а все множество цветов представляет собой некоторую область (цветовой треугольник) в  $R_3$ . Сама процедура распознавания может быть описана в виде следующей математической модели [3]:

$$\alpha_i(x(\lambda)) = \varphi_i \left( \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \beta_i(\lambda)x(\lambda)d\lambda \right), \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

где  $x(\lambda)$  — функция яркости в зависимости от длины волны (математическая модель подаваемого излучения),  $\beta_i(\lambda)$  — функции спектральной чувствительности,  $[\lambda_1, \lambda_2]$  — участок видимого спектра и  $\varphi_i$  — взаимно однозначные отображения из  $R$  в  $R$ .

Трехкомпонентную модель цветового зрения можно охарактеризовать как суперпозицию двух преобразований  $F: L_2[\lambda_1, \lambda_2] \rightarrow R_3$  — линейного оператора и  $\varphi: R_3 \rightarrow R_3$  — взаимно однозначного отображения. При этом нетрудно заметить, что отображение  $\varphi$  будет изменять метрические свойства пространства, т. е. его искривлять. На базе бинарных отношений эти изменения уловить не удастся. Однако есть возможность работать с параметрами цветов (четырёхместными предикатами), фиксируя в опыте субъективные равенства расстояний между ними. В психофизике подобные эксперименты описаны в работах [4, 5]. Более того, испытуемый достаточно точно находит среднюю точку отрезка, соединяющего два цвета, если их воспринимать как элементы  $R_3$ . Такое половинное деление, как будет показано ниже, позволяет уловить изменения пространства под действием отображения  $\varphi$ .

Суммируя эти факты, мы можем обобщить ситуацию на  $n$ -мерный случай и перейти к формальной постановке задачи.

### 2. Свойства метрических предикатов и операций в субъективном пространстве

Будем считать, что изменение метрических свойств происходит следующим образом. Новая метрика  $\rho^*(x, y)$  определяется равенством

$$\rho^*(x, y) = \rho(\varphi(x), \varphi(y)), \quad (2)$$

где  $x, y \in R_n$ ,  $\varphi: R_n \rightarrow R_n$  — взаимно однозначное соответствие,  $\rho$  — евклидова метрика.

*Определение 1.* Четырёхместный предикат  $\Phi(x, y, u, v)$ , заданный на  $R_n$ , будем называть *метрическим*, если он имеет вид

$$\Phi(x, y, u, v) = D(\rho(\varphi(x), \varphi(y)), \rho(\varphi(u), \varphi(v))), \quad (3)$$

где  $D$  — предикат равенства на  $R$ , а остальные элементы (3) определяются соотношением (2) при условии, что  $\varphi: R_n \rightarrow R_n$  — гомеоморфизм.

Знание характеристических свойств метрических предикатов позволяет решать поставленную в начале задачу. Изучение этих свойств будет рассмотрено ниже.

Рассмотрим четырёхместный предикат  $\Phi(x, y, u, v)$ , заданный на  $R_n$  и обладающий следующим набором свойств:

1. Парная эквивалентность:

- а)  $\Phi(x, y, x, y) = 1$  — парная рефлексивность;
- б)  $\Phi(x, y, u, v) = 1 \Rightarrow \Phi(u, v, x, y) = 1$  — парная симметричность;

в)  $\left. \begin{matrix} \Phi(x, y, u, v) = 1 \\ \Phi(x, y, f, g) = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \Phi(u, v, f, g) = 1$  — парная транзитивность.

2. Внутренняя симметрия:

$\Phi(x, y, u, v) = 1 \Rightarrow \Phi(y, x, v, u) = 1.$

3. Неподвижность:

$\Phi(x, x, y, z) = 1 \Rightarrow y = z.$

Введем в рассмотрение множество  $S(x, y)$  отношением

$$S(x, y) = \{z: \Phi(y, x, x, z) = 1\}. \quad (4)$$

Заметим, что из парной рефлексивности следует: для произвольных  $x, y$  множества  $S(x, y) \neq \emptyset$ , поскольку  $\Phi(y, x, x, y) = 1$ , т. е.  $y \in S(x, y)$ . Очевидно, что  $\{x, x\} = \{x\}$  состоит из одного вектора. Действительно, если  $x_1 \in S(x, x)$ , то  $\Phi(x, x, x, x_1) = 1$  и из неподвижности следует  $x_1 = x$ .

Предположим, что предикат  $\Phi(x, y, u, v)$  таков, что множества  $S(x, y)$ , индуцируемые этим предикатом, удовлетворяют ряду условий (мы будем называть их аксиомами).

*Аксиома внутреннего равноделения (АВНР).* Для произвольных  $x, y \in R_n$  найдется единственный вектор  $u$ , для которого множество  $S(x, u) \cap S(y, u)$  состоит из одного вектора.

*Аксиома внешнего равноделения (АВШР).* Для произвольных  $x, y \in R_n$  найдется единственный вектор  $v$ , для которого множество  $S(x, v) \cap S(y, v)$  состоит из одного вектора.

*Аксиома четырехугольника (АЧ).* Для произвольных  $x, y, u, v \in R_n$  имеет место: если вектора  $\omega, \omega', \omega'', \omega'''$  таковы, что множества  $S(x, \omega) \cap S(y, \omega), S(u, \omega') \cap S(v, \omega'), S(x, \omega'') \cap S(u, \omega''), S(y, \omega''') \cap S(v, \omega''')$  состоят из одного вектора, то множество  $S(\omega, \omega') \cap S(\omega'', \omega''')$  состоит тоже из одного вектора.

Формулировки аксиом внутреннего и внешнего равноделения позволяют ввести операции внутреннего и внешнего равноделения для произвольной пары векторов  $x, y \in R_n$ .

*Определение 2.* Операцией внутреннего равноделения для векторов  $x, y$ , которую будем обозначать  $x \cdot y$ , назовем вектор  $u$ , для которого множество  $S(x, u) \cap S(y, u)$  состоит из одного вектора.

*Определение 3.* Операцией внешнего равноделения для векторов  $x, y$ , которую будем обозначать  $x \angle y$  назовем вектор  $v$ , для которого множество  $S(x, v) \cap S(y, v)$  состоит из одного вектора.

Корректность этих определений обеспечивается выполнением аксиом АВНР и АВШР.

Ближайшая задача будет состоять в том, чтобы показать, что на базе операций  $x \cdot y$  и  $x \angle y$  можно в  $R_n$  задать структуру линейного пространства, в общем случае отличающуюся от структуры  $R_n$ . Для ее реализации остановимся сначала на некоторых свойствах введенных выше операций.

1.  $x \cdot x = x$  и  $x \angle x = x.$

*Доказательство.* Ранее было установлено, что  $S(x, x) = \{x\}$ . Тогда из определений вытекают требуемые равенства.

2.  $x \cdot y = y \cdot x.$

*Доказательство.* Вытекает из определения.

3.  $(x \cdot y) \cdot (u \cdot v) = (x \cdot u) \cdot (y \cdot v)$  — свойство четырехугольника (СЧ).

*Доказательство.* Это свойство следует из АЧ. Действительно, пусть  $x \cdot y = w, u \cdot v = \omega, w \cdot \omega = z, x \cdot u = \hat{w}$  и  $y \cdot v = \hat{\omega}$ . Тогда выполняются условия АЧ, следовательно,  $S(\hat{w}, z) \cap S(\hat{\omega}, z)$  состоит из одного вектора и  $z = \hat{w} \cdot \hat{\omega}$  а это означает выполнение свойства четырехугольника.

4.  $x \cdot (x \angle y) = y$  и  $x \angle (x \cdot y) = y.$

*Доказательство.* Пусть  $x \angle y = u, x \cdot u = v$ . Тогда из этих равенств следует, что множества  $S(x, y) \cap S(u, y)$  и  $S(x, v) \cap S(u, v)$  состоят из одного вектора. С другой стороны, из АВШР следует, что для  $x$  и  $y$  найдется единственный вектор  $z$ , для которого  $S(x, z) \cap S(u, z)$  — одноэлементно. Значит,  $y = v = z$ . Или  $x \cdot (x \angle y) = y$ . Второе равенство доказывается аналогично.

*Следствие.* Уравнения вида  $x \cdot z = y$  и  $x \angle z = y$  относительно  $z$  имеют единственное решение вида  $z = x \angle y$  и  $z = x \cdot y$  соответственно.

5.  $z \angle (x \cdot y) = (z \angle x) \cdot y$  и  $z \cdot (x \angle y) = (z \cdot x) \angle (z \cdot y).$

*Доказательство.* Рассмотрим  $x \cdot y$ . С одной стороны, из свойства 4 имеем

$$x \cdot y = z \cdot [z \angle (x \cdot y)].$$

С другой стороны, из этого свойства и свойства четырехугольника следует

$$x \cdot y = [z \cdot (z \angle x)] \cdot [z \cdot (z \angle y)] = (z \cdot z) \cdot [(z \angle x) \cdot (z \angle y)] = z \cdot [(z \angle x) \cdot (z \angle y)].$$

Тогда из следствия свойства 4 вытекает

$$z \angle (x \cdot y) = (z \angle x) \cdot (z \angle y).$$

Для доказательства второго равенства рассмотрим  $z \cdot y$ . Тогда, используя рассуждения, аналогичные предыдущим, можно выписать цепочки

$$z \cdot y = (z \cdot z) \cdot [z \cdot (x \angle y)] = (z \cdot x) \cdot [z \cdot (x \angle y)],$$

$$z \cdot y = (z \cdot x) \cdot [(z \cdot x) \angle (z \cdot y)].$$

Отсюда

$$z \cdot (x \angle y) = (z \cdot x) \angle (z \cdot y).$$

6.  $(x \angle y) \angle y = x.$

*Доказательство.* Пусть  $x \angle y = z$ , тогда  $y = x \cdot z$ , следовательно,  $(x \angle y) \angle y = z \angle (z \cdot x) = x.$

7.  $(x \angle y) \cdot (y \angle x) = (x \cdot y)$ .

*Доказательство.* Из свойства 5 вытекает следующая цепочка равенств

$$\begin{aligned} (x \angle y) \cdot (y \angle x) &= [(x \angle y) \cdot y] \angle [(x \angle y) \cdot x] = \\ &= [(x \cdot y) \angle y] \angle [(y \cdot y) \angle [x \cdot (x \angle y)]] = \\ &= [(x \cdot y) \angle y] \angle y = (x \cdot y). \end{aligned}$$

Прямым следствием доказанного свойства является свойство 8.

8.  $x \angle y = (y \angle x) \angle (x \cdot y)$ .

9.  $(x \angle y) \angle x = x \angle (y \angle x)$ .

*Доказательство.* Рассмотрим  $x \angle (y \angle x)$ . Из свойства 8 следует

$$\begin{aligned} x \angle (y \angle x) &= x \angle [(x \angle y) \angle (x \cdot y)] = \\ &= x \angle \{[(x \angle y) \angle x] \cdot [(x \angle y) \angle y]\} = \\ &= x \angle [x \cdot \{(x \angle y) \angle x\}] = (x \angle y) \angle x. \end{aligned}$$

Доказанные свойства операций внутреннего и внешнего равноделения дают возможность обосновать утверждение о том, что на  $R_n$  при помощи предиката  $\Phi$  может быть задана структура линейного пространства. Для этого введем операции сложения векторов и умножения вектора на действительное число.

*Определение 4.* Суммой двух векторов  $x$  и  $y$  назовем третий вектор  $z$ , который связан с  $x$  и  $y$  следующим равенством

$$z = x + y = e \angle (x \cdot y), \quad (5)$$

где  $e \in R_n$  — фиксированный вектор.

*Примечание.* Несложно догадаться, что вектор  $e$  выполняет роль «нулевого» вектора (это будет показано ниже), а произвольность в его выборе аналогична произвольности в выборе начала координат.

*Лемма.* Относительно введенной операции сложения множество векторов образуют абелеву группу.

*Доказательство.* Для доказательства леммы необходимо проверить выполнение свойств абелевой группы.

Сразу заметим, что  $x + y = y + x$ , т. е. операция коммутативна. Это следует из определения и из равенства  $x \cdot y = y \cdot x$ .

Докажем, что в качестве «нуля» выступает вектор  $e$ . Например, рассмотрим  $x + e$ . Тогда из определения и свойства 4 можно записать

$$x + e = e \angle (x \cdot e) = e \angle (e \cdot x) = x.$$

Таким образом, «нулевой» элемент существует.

Докажем существование обратного элемента. Рассмотрим уравнение относительно  $y$ :  $x + y = e$ , оно эквивалентно  $e \angle (x \cdot y) = e$  или  $x \cdot y = e$ .

С учетом следствия свойства 4 можем найти единственное решение последнего уравнения в виде

$y = x \angle e$ . Это равенство и определяет обратный элемент, который в дальнейшем будем обозначать  $-x$ , т. е.

$$-x = x \angle e. \quad (6)$$

Наконец покажем, что операция сложения ассоциативна. Из определения и равенства  $z + e = e$  можно записать:

$$(x + y) + z = (x + y) + (z + e) = e \angle [(x + y) \cdot (z + e)].$$

Воспользуемся свойством 5, тогда

$$\begin{aligned} e \angle [(x + y) \cdot (z + e)] &= e \angle \{[e \angle (x)] \cdot [e \angle (z + e)]\} = \\ &= e \angle \{e \angle [(x \cdot y) \cdot (z + e)]\}. \end{aligned}$$

Из свойства четырехугольника следует

$$(x \cdot y) \cdot (z + e) = (x \cdot e) \cdot (y \cdot z).$$

Но тогда справедлива следующая цепочка равенств

$$\begin{aligned} e \angle \{e \angle [(x \cdot y) \cdot (z + e)]\} &= e \angle \{e \angle [(x \cdot e) \cdot (y \cdot z)]\} = \\ &= e \angle \{[e \angle (x \cdot e)] \cdot [e \angle (y \cdot z)]\} = e \angle [x \cdot (y + z)] = x + (y + z). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$(x + y) + z = x + (y + z). \quad (7)$$

Ассоциативность доказана. На этом завершается доказательство леммы.

Теперь приступим к введению операции умножения вектора на действительное число.

Сначала определим  $2x$  и  $\frac{x}{2}$ . Поскольку эти операции индуцируются операцией сложения, введем некоторые определения.

*Определение 5.*  $2x = x + x$ ; вектор  $z = \frac{x}{2}$  тогда и только тогда, когда  $z + z = 2z = x$ .

Непосредственно из определений суммы вытекает  $2x = e \angle x$ ,  $\frac{x}{2} = e \cdot x$ .

Далее мы можем определять умножение вектора на число  $\lambda = 2^k$  — степень двойки как суперпозицию преобразования  $2x$ , если  $k > 0$  и  $-\frac{x}{2}$ , если  $k < 0$ .

*Определение 6.*

$$\underbrace{2^k x = 2(2(\dots(2x)\dots))}_{k \text{ двоек}}, \quad \underbrace{2^{-k} x = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\dots(\frac{1}{2}x)\dots))}_{k \text{ раз } \frac{1}{2}}. \quad (8)$$

*Определение 7.*

$$(2^k + 2^e)x = 2^k x + 2^e x. \quad (9)$$

Далее заметим, что  $-2x = 2(-x)$ . Действительно, из (6) и определения 5 следует

$$2(-x) = 2(x \angle e) = e \angle (x \angle e).$$

С учетом свойства 9 имеем

$$e \angle (x \angle e) = (e \angle x) \angle e = 2x \angle e = -2x.$$

Аналогично  $\frac{-x}{2} = -\frac{x}{2}$ , поскольку из определений и свойств вытекает следующая цепочка равенств

$$\begin{aligned} \frac{-x}{2} &= \frac{xLe}{2} = e \cdot (xLe) = (e \cdot x) \angle (e \cdot e) = \\ &= (e \cdot x) \angle e = -(e \angle x) = -\frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда, для любой степени 2 имеем

$$2^k(-x) = -2^k x. \quad (10)$$

Теперь докажем, что при любом целом  $k$  имеет место

$$2^k x + 2^k y = 2^k(x + y). \quad (11)$$

Заметим, что из определения 6 вытекает

$$2^k(2^e x) = 2^{k+e} x. \quad (12)$$

Пусть  $k = 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= (x + x) = (y + y) = \\ &= (x + y) + (x + y) = 2(x + y). \end{aligned}$$

Индукцией по  $k > 0$  получим

$$\begin{aligned} 2^{k+1}x + 2^{k+1}y &= 2^k(2x) + 2^k(2y) = \\ &= 2^k(2x + 2y) = 2^k(2(x + y)) = 2^{k+1}(x + y). \end{aligned}$$

Это свойство доказывается аналогичным образом, когда  $k < 0$ . Таким образом, имеет место равенство (11). Из (10) и (11) вытекает, что

$$2^k x - 2^k y = 2^k(x - y).$$

В итоге мы получили, что если число двоично-рациональное, то есть

$$\lambda = \sum_{k=-n}^m \alpha_k 2^k, \text{ где } \alpha_k \in \{-1, 0, 1\}.$$

операция  $\lambda x$  определяется равенством

$$\lambda x = \sum_{k=-n}^m \alpha_k 2^k x, \quad (13)$$

при этом если  $\alpha_k = -1$ , то  $-2^k x = 2^k(-x)$ .

Докажем еще два свойства, которые нам понадобятся в дальнейшем.

*Свойство I:*

$$(-x) + (-y) = -(x + y). \quad (14)$$

Из определений  $-x$  и  $-y$  имеем

$$\begin{aligned} (-x) + (-y) &= e \angle [(xLe) \cdot (yLe)] \\ &= -(x + y) = [e \angle (x \cdot y)] \angle e. \end{aligned}$$

Применяя свойство 9 к выражению  $[e \angle (x \cdot y)] \angle e$ , получим

$$-(x + y) = e \angle [(x \cdot y) \angle e],$$

откуда вытекает, что равенство (14) имеет место, если

$$(xLe) \cdot (yLe) = (x \cdot y) \angle e. \quad (15)$$

Докажем последнее равенство. Учитывая, что  $e \cdot e = e$  и  $x \cdot (xLe) = e$ , запишем:

$$[x \cdot (xLe)] \cdot [y \cdot (yLe)] = e.$$

Применим к левой части свойство четырехугольника:

$$(x \cdot y) \cdot [(xLe) \cdot (yLe)] = e,$$

отсюда

$$(x \cdot y) \angle [(x \cdot y) \cdot [(xLe) \cdot (yLe)]] = (x \cdot y) \angle e$$

или

$$(xLe) \cdot (yLe) = (x \cdot y) \angle e.$$

То есть выполняется (15), а значит, и (14).

*Свойство II:*

$$-(-x) = x. \quad (16)$$

Действительно,

$$-(-x) = (xLe) \angle e.$$

Значит, (16) выполняется, когда  $(xLe) \angle e = x$ , но тогда  $(xLe) \cdot [(xLe) \angle e] = (xLe) \cdot x$  или  $e = (xLe) \cdot x$  и  $e = e$ .

Выполнив построенную цепочку преобразований в обратном порядке, получим (16).

Суммируя сказанное, можно подвести следующий итог. Авторам введена операция умножения вектора  $x$  на двоично-рациональное число по формуле

$$\lambda x = \sum_{k=-n}^m \alpha_k (2^k x) \quad (17)$$

с выполненнем следующих свойств:

$$2^k(x + y) = 2^k x + 2^k y. \quad (18)$$

$$2^k(2^e x + y) = 2^{k+e} x + 2^k y, \quad (19)$$

$$-(2^k x) = 2^k(-x), \quad (20)$$

$$-(x + y) = (-x) + (-y). \quad (21)$$

$$-(-x) = x. \quad (22)$$

По существу, тем самым определена структура линейного пространства.

### 3. Условия существования метрического предиката

Допустим, в  $R_n$  задан метрический предикат  $\Phi(x, y, u, v)$  вида (3). Тогда для любых  $x, y \in R_n$  индуцируется множество  $S(x, y)$ , определенное в равенстве (4). Это множество представляет собой сферу в  $R_n$  радиуса  $r(x, y) = \rho(\Phi(x, y))$  с центром в точке  $\varphi(x)$ . Поскольку  $\Phi$  осуществляет взаимно однозначное соответствие, то определенные в предыдущей части аксиомы внутреннего и внешнего равенделения имеют место для метрического предиката. Причем непосредственно легко убедиться в том, что индуцируемые этими аксиомами операции  $x \cdot y$  и  $x \angle y$  имеют вид:

$$x \cdot y = \varphi^{-1} \left( \frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2} \right), \quad (23)$$

$$x \angle y = \varphi^{-1} (2\varphi(y) - \varphi(x))$$

Из равенств (23) вытекает аксиома четырехугольника. Рассмотрим для произвольных  $x, y, u, v \in R_n$

выражение  $x \cdot y \cdot (u \cdot v)$ . Тогда имеет место следующая цепочка равенств

$$\begin{aligned} x \cdot y \cdot (u \cdot v) &= \varphi^{-1} \left( \frac{\varphi(x \cdot y) + \varphi(u \cdot v)}{2} \right) = \\ &= \varphi^{-1} \left[ \frac{\varphi \left( \varphi^{-1} \left( \frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2} \right) \right) + \varphi \left( \varphi^{-1} \left( \frac{\varphi(u) + \varphi(v)}{2} \right) \right)}{2} \right] = \\ &= \varphi^{-1} \left( \frac{\varphi(x \cdot u) + \varphi(y \cdot v)}{2} \right) = (x \cdot u) \cdot (y \cdot v), \end{aligned}$$

а это и означает выполнение аксиомы четырехугольника.

Далее заметим, что непосредственная проверка дает возможность утверждать выполнение аксиом парной эквивалентности, внутренней симметрии и неподвижности для метрического предиката. Отсюда следует, что операции, определенные равенствами (23), обладают всеми свойствами, доказанными ранее, а для самого метрического предиката еще имеет место аксиома непрерывности, так как  $\varphi$  — гомеоморфизм. Таким образом, можем сделать вывод, что метрический предикат индуцирует новую линейную структуру на  $R_n$ .

**Теорема.** Метрический предикат вида (3) обладает следующим набором свойств: парной эквивалентностью, внутренней симметрией, неподвижностью, аксиомами внутреннего и внешнего равноделения, четырехугольника и непрерывности. Этот набор свойств позволяет определить относительно  $R_n$  линейную структуру, для которой гомеоморфизм  $\varphi$  яв-

ляется изоморфизмом с изначально заданной линейной структурой, если в качестве элемента  $e$  в определении 4 будет взят элемент  $e^*$ , для которого  $\varphi(e^*) = 0$ .

Близкие по существу вопросы обсуждались в работе [6].

#### 4. Выводы

В статье введено понятие метрического предиката, при помощи которого можно осуществлять шкалирование субъективных образов различных сенсорных систем. Определены метрические операции и характеристические свойства соответствующих метрических предикатов, индуцирующих структуру метрического пространства входных сигналов.

Найдены условия существования метрических предикатов, однозначно определяемые системой характеристических свойств.

**Список литературы:** 1. Шабанов-Кушнарченко Ю. П. Теория интеллекта: Проблемы и перспективы: Т. 3. — Харьков: Вища школа, 1987. — 158 с. 2. Бондаренко М. Ф., Шабанов-Кушнарченко С. Ю. Теория цветового зрения. — Харьков: Фактор-Друк, 2002. — 206 с. 3. Луизов А. В. Глаз и свет. — Л.: Энергоатомиздат, 1989. — 140 с. 4. Шабанов-Кушнарченко Ю. П., Ревичов В. Л., Мурашко А. Г. Математичні моделі зору. — К.: Техніка, 1966. — 95 с. 5. Ивкс Р. М. Введение в теорию цвета. — М.: Мир, 1964. — 442 с. 6. Шабанов-Кушнарченко Ю. П., Шляхов В. В. Об одном способе задания структуры линейного пространства на языке отношений // АСУ и приборы автоматиз. — 1990. — Вып. 96. — С. 111–117.

Поступила в редакцию 27.10.2006