

ОЦЕНКА ИНФОРМАТИВНОСТИ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ТРАКТОВ ПРИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ СОЕДИНЕНИИ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ

ПАНЧЕНКО А.Ю.

Предлагается информационный подход к анализу измерительных трактов на основе энтропийного критерия. Ставятся задачи оценки и оптимизации измерительных трактов в целях получения максимального количества информации об исследуемых объектах. Показывается методика оптимизации измерительного тракта, построенного с использованием нелинейных преобразователей. Рассматриваются основные случаи решения практических задач.

Введение

Посвоему назначению искусственные динамические преобразователи можно разделить на две большие группы. К первой относятся энергетические преобразователи, у которых основным критерием качества работы является коэффициент полезного действия. Ко второй – преобразователи информации. Критерии их оценки основаны на количественных характеристиках информационного потока. Измерительные преобразователи (ИП) относятся ко второй группе. Качество ИП оценивается по критерию точности. Развиваются также и информационные критерии оценки ИП, но пока они не являются основными [1].

Необходимость создания универсальных критериев оценки ИП возникла давно. Особую актуальность она приобрела с необходимостью наблюдения за сложными объектами и с появлением информационно-измерительных систем, управляемых компьютерами или микроконтроллерами. Кроме того, развитие физики поставило задачу адекватного учета неопределенности самих физических величин [2]. Все это требует существенного совершенствования наших представлений как о процессе измерений и о его результатах, так и об используемых средствах и способах оценки их качества [3].

Информация об исследуемом объекте является целью процесса измерений, поэтому можно предположить, что в дальнейшем информационные критерии, наряду с традиционными точностными, выйдут на первый план [1].

Информационной оценке предшествовала энерго-энтропийная оценка [4]. В настоящее время в различных направлениях измерительной техники продолжается поиск методов информационной оценки качества датчиков и систем [5]. При этом на первый план выходит задача сохранения измерительной информации, а последующая программная обработка позволяет выделить необходимые сведения об исследуемом объекте.

Целью данной работы является оценка информационной эффективности наиболее простых схем построения датчиков, предполагающих последовательное соединение отдельных ИП.

1. Исходные соотношения

Количественно информация в одиночном сообщении определяется как логарифм от вероятности данного сообщения [6]:

$$I = -\ln P. \quad (1)$$

В частном случае, при равновероятном априорном законе распределения состояний объекта, информация зависит от их числа N :

$$I_N = \ln N. \quad (2)$$

Более общую характеристику объекту дает энтропия – среднее количество информации, получаемое в одном сообщении:

$$H = \tilde{I}_n = -\sum_N P_n \ln P_n. \quad (3)$$

Если между объектом и потребителем информации имеется канал связи или измерительный датчик, то в нем неизбежны потери информации. В этом случае событием является получение m -го сообщения при совершении n -го события [6]. Как известно, вероятность такого события может быть вычислена при известных условных вероятностях $P_{m|n}$ или $P_{n|m}$, как

$$P_{n,m} = P_{m|n} P_n = P_{n|m} P_m. \quad (4)$$

И далее после логарифмирования и группировки слагаемых имеем

$$-\ln P_n + \ln P_{n|m} = -\ln P_m + \ln P_{m|n}. \quad (5)$$

В левой части записано количество информации, содержащейся в n -м событии, минус некоторое количество информации, определяемое тем, что n -е событие совершилось при условии получения m -го сообщения. Тогда это означает, что $-\ln P_{n|m}$ – это дезинформация об n -м событии при получении m -го сообщения. Аналогично первое слагаемое в правой части – это вся получаемая информация с учетом полезной и погрешности. Второе слагаемое – информация, которая порождается внутренними источниками ИП при установке n -го входного значения. Этими источниками являются шумы прибора или канала связи, дрейф преобразователей и прочие причины, определяющие его погрешность. Таким образом, с правой стороны тоже остается только полученная полезная информация $I_{n,m}$.

Дальнейшие преобразования и переход к непрерывным входным (x) и выходным (y) величинам приводят к выражению для полезной информации на выходе ИП в виде [6]:

$$\tilde{I}_{\text{пол}} = \int_x p(x) \int_y p(y|x) \ln p(y|x) dy dx - \int_y p(y) \ln p(y) dy. \quad (6)$$

В таком представлении $p(y|x)$ определяется зависимостью погрешности от входной величины. Второе слагаемое в (6) – полученная информация, первое – ее потери в ИП. Внутренний интеграл в первом слагаемом представляет собой энтропию погрешности H_p – среднее количество потерь информации при x -м состоянии объекта.

Для наиболее простого случая линейного ИП $\tilde{I}_{\text{пол}}$ зависит только от законов распределения измеряемой величины и погрешности. Так как линейное преобразование без помех не изменяет количество информации, то можно опустить коэффициент преобразования ИП, считая далее для идеального ИП $y = x$. Если погрешность распределена по равномерному закону в интервале $[y - 0,5\delta, y + 0,5\delta]$ и постоянна по диапазону изменения полезного сигнала, который также равномерно распределен в интервале $[D]$, то несложно показать, что в этом случае $\tilde{I}_{\text{пол}} = \ln(D/\delta)$, т.е. $\tilde{I}_{\text{пол}}$ равно количеству информации в дискретных равновероятных сообщениях в диапазоне D , отстоящих друг от друга на расстояние $\Delta y = \delta$.

Несложно получить аналогичные выражения при других законах распределения погрешности. Например, при тех же условиях для нормального закона распределения погрешности имеем интервал разрешимости $\Delta y = 4,133\sigma$, где σ – среднеквадратическое отклонение нормально распределенной погрешности.

По сути, выражение (6) показывает, что от бесконечного количества информации, содержащегося в непрерывной величине x , остается конечное, соответствующее эквивалентной дискретизированной величине, у которой интервал дискретизации Δy определяется величиной погрешности ИП и законом ее распределения. При этом бесконечная информация непрерывного входного сигнала компенсируется бесконечной дезинформацией, вносимой погрешностью ИП (рис.1).

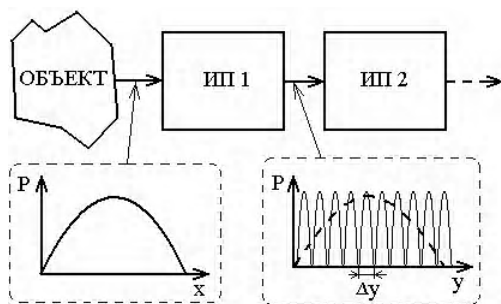


Рис. 1. Потеря информации в ИП

Вторичные преобразователи (ИП2, ИП3 и т.д.) не имеет смысла делать с большей пропускной способностью измерительной информации, чем ИП1.

2. Предельная информативность ИП

В случае последовательного соединения ИП изменение количества информации происходит вследствие их погрешности и нелинейности их передаточных характеристик. При традиционном подходе к проектированию датчиков стараются сохранить линейность всего измерительного тракта, начиная с первичного преобразователя (ИП1 на рис.1). Но, поскольку основной задачей ИП1 является преобразование измеряемой физической величины в сигнал, удобный для дальнейшей обработки, то сделать линейной его передаточную функцию не всегда удастся. Поэтому нелинейность ИП1 компенсируют нелинейностью вторичных преобразователей – ИП2, ИП3 т.д. При этом руководствуются удобством считывания информации. Кроме того, это соответствует критерию сохранения информации, полученной при однократном измерении. Но это не означает, что среднее количество информации, получаемое при многократных измерениях, будет максимальным.

Для решения задачи максимального сохранения измерительной информации необходимо определить закон распределения сообщений, имеющий максимальную энтропию. В соответствии с (3) при нем произведение будет иметь минимум:

$$h = \prod_N P_n^{P_n} \quad (7)$$

Для события с двумя исходами при вероятности первого исхода, равной p , второго, соответственно, $1 - p$, получим, что максимальная энтропия этого события $-H_2$ достигается при условии минимума функции $h(p) = p^p (1-p)^{(1-p)}$. Дифференцируя $h(p)$, получаем:

$$h' = p^p (1-p)^{(1-p)} [\ln p - \ln(1-p)]. \quad (8)$$

Сомножитель в квадратных скобках определяет минимум этой функции при значении $p = 0,5$. Аналогично для $h(c, p) = p^p (c-p)^{(c-p)}$ и $c = \text{const}$ минимум будет при $p = 0,5c$.

Если имеем объект с тремя состояниями, и вероятность третьего состояния задана как p_3 и, соответственно, $p_1 + p_2 = 1 - p_3$, то максимальное значение H при нахождении в первых двух состояниях будет при условии, что эти состояния равновероятны: $p_1 = p_2 = 0,5(1 - p_3)$. Группируя p_1 с p_3 и p_2 с p_3 и проводя аналогичные рассуждения для этих пар, получим, что максимум энтропии всего объекта будет при $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$. Продолжая данную процедуру для объектов, имеющих 4, 5 и более состояний, можно показать, что максимум энтропии имеют объекты с равновероятными состояниями. Таким образом, при оптимизации конструкций ИП необходимо стре-

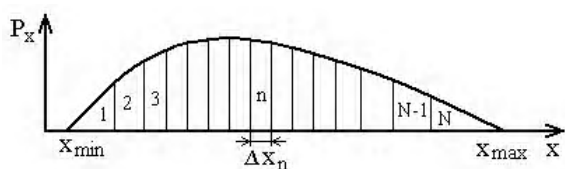
миться получать равновероятные состояния выходного сигнала в каждом интервале разрешимости Δy .

На основании этого можно сформулировать требования к оптимальным передаточным функциям $y = f(x)$ для ИП, которые позволяют передавать наибольшее количество информации. Наиболее общий случай соответствует ИП, преобразующих непрерывные сигналы. Также будем считать, что погрешность ИП существенно меньше диапазона изменений полезного сигнала.

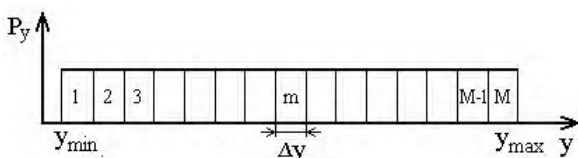
По способу вхождения в результат измерений в метрологии выделяют аддитивную и мультипликативную погрешности. Погрешности более высоких порядков, как правило, не рассматриваются.

3. Информативность ИП при аддитивных погрешностях

Первым выделим случай линейного ИП с постоянными значениями погрешности выходного сигнала δy и интервала разрешимости Δy , при условии, что на вход такого ИП подается сигнал с неравномерным законом распределения p_x (рис.2,а).



а



б

Рис. 2. Оптимальное преобразование при неравномерном p_x

Опуская масштабирование и смещение нулевого уровня, которые не изменяют количество информации, процесс оптимальной работы ИП можно представить с помощью рис.2, а, б.

Как показано выше, максимальная энтропия выходного сигнала будет при условии, что все его состояния равновероятны. Если погрешность ИП отнесена к выходному сигналу, то он записывается как: $y = f(x) + \delta y$. Интервал разрешимости Δy и диапазон выходного сигнала $D_y = y_{\max} - y_{\min}$ определяют значение M – максимально разрешимое число состояний на выходе. При непрерывном входном сигнале максимальное разрешимое число состояний на входе определяется как $N = M$, а для каждого интервала разрешимости $n = m$, поэтому далее индексы n и m указывают только на входные и выходные сигналы или их свойства.

Условие равновероятных сигналов на выходе может быть достигнуто при выполнении:

$$p_x \Delta x_n = p_y \Delta y. \quad (9)$$

При $\Delta y = \text{const}$ это выражение определит оптимальную передаточную функцию ИП как:

$$f' = \lim_{\Delta x_n \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x_n} = p_x. \quad (10)$$

В (10) и далее масштабирующие коэффициенты опускаются, а соответствие интервалов Δy_m и Δx_n определяется производной от передаточной функции ИП: $\Delta y_m = f' \Delta x_n$.

Аналогичным может быть представление случая неравноценности значений входной величины x на входе ИП в диапазоне ее изменения. Если их ценность определяется через функцию значимости $w(x)$, тогда потребуется привести ценность каждого интервала к одному и тому же значению (рис.3).

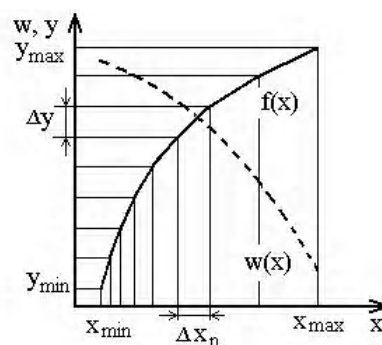


Рис. 3. Оптимизация функции преобразования при неравноценных значениях x и фиксированной погрешности выходной величины

Чем выше ценность каждого участка диапазона изменения x , тем большим числом интервалов разрешимости он должен быть представлен, что обуславливает связь $\Delta x_n = w^{-1}(x_n)$. Тогда при равновероятном законе распределения x и $\Delta y_m = \text{const}$ имеем:

$$f' = w(x). \quad (11)$$

По сути, это соответствует коррекции закона распределения входной величины в (10) на $w(x)$:

$$p_k(x) = w(x)p_x(x). \quad (12)$$

При этом закон распределения выходной величины p_y будет неравномерный.

В общем случае, при строгом использовании общепринятых терминов, при $\delta y \neq \text{const}$ и $\Delta y \neq \text{const}$ и соответственно пересчитанных $\delta x \neq \text{const}$ и $\Delta x \neq \text{const}$, нельзя говорить об аддитивной погрешности. Например, в частном случае погрешности, обусловленной флуктуациями коэффициента передачи δk : $\delta y = \delta k x$ – это мультипликативная погрешность. В реальных устройствах из-за нелинейности ИП всегда существует связь между погрешностью и величиной

сигнала. Но аддитивная форма записи погрешности измерений или ИП наиболее удобна в использовании. Поэтому методику оптимизации по информационному критерию представим, опираясь, в основном, на эту форму.

При $\delta x \neq \text{const}$ для получения максимальной энтропии на выходе ИП (или канала связи) нужно предварительно провести коррекцию входного информационного сигнала $x_{\text{вх}}$. Корректирующее преобразование должно предшествовать основному и погрешность корректирующего ИП должна быть существенно меньше, чем у основного. Функция преобразования корректирующего ИП $x = f_K(x_{\text{вх}})$ выбирается так, чтобы в каждом из разрешимых интервалов Δx_n основного ИП была бы равная вероятность существования информационного сигнала (рис.4).

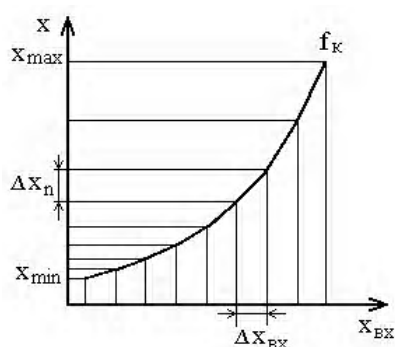


Рис. 4. Построение передаточной функции корректирующего ИП

Например, при равномерном $p(x_{\text{вх}})$ равные вероятности существования информационного сигнала в каждом интервале Δx_n (см. рис.4) будут при выполнении условия

$$\frac{df_K}{dx} = \Delta x_n. \quad (13)$$

Здесь соотношение (9) формально не присутствует. В соответствие ставятся только границы интервалов $\Delta x_{\text{вх}}$ и Δx_n . Но если распределение вероятности $x_{\text{вх}}$ произвольно, тогда для получения максимальной энтропии состояний основного ИП необходимо выполнить соотношение $p(x_n)\Delta x_n = \text{const}$. Это соответствует требованию:

$$p(x_n) = \frac{1}{\Delta x_n}. \quad (14)$$

Тогда переписывая для сигналов корректирующего ИП выражение (9) в виде отношения $\frac{\Delta x_n}{\Delta x_{\text{вх}}} = \frac{p(x_{\text{вх}})}{p_x}$ и переходя к пределу при $\Delta x_{\text{вх}} \rightarrow 0$, для функции преобразования корректирующего ИП получим:

$$f'_K = p(x_{\text{вх}})\Delta x_n. \quad (15)$$

При $\Delta x_n = \text{const}$ это выражение соответствует выражению (10). Однако при произвольном законе измерения погрешности $\delta x(x)$ второй множитель в (13) зависит от $x_{\text{вх}}$ через связь:

$$\delta x(x) = \delta x(f(x_{\text{вх}})) \quad (16)$$

Таким образом, оптимизация измерительного тракта в общем случае предполагает решение уравнения:

$$f'_K(x_{\text{вх}}) = p(x_{\text{вх}})\Delta x(f_K(x_{\text{вх}})) \quad (17)$$

При произвольных $p(x_{\text{вх}})$ и $\Delta x(x)$ для (17) необходимо численное решение.

Нужно отметить, что технически выполнить корректирующее преобразование не всегда возможно, но можно скорректировать $f(x)$ основного ИП или поведение его погрешности $\delta x(x)$ с учетом постоянства произведения $p_x \Delta x$.

4. Информативность ИП при мультипликативных погрешностях

Мультипликативная погрешность учитывает изменение коэффициента передачи ИП при аппроксимации функции преобразования или отдельных ее участков линейной зависимостью $y = kx$. Так же как и в случае аддитивной погрешности, это некоторая идеализация реальных функций преобразования, которая позволяет облегчить анализ. Этот вид записи учитывает функцию преобразования и погрешность, которая представлена в виде произведения погрешности коэффициента преобразования δk на входной сигнал:

$$y = kx + \delta k x \quad (18)$$

При каждом заданном значении входного воздействия x закон распределения выходного сигнала повторяет закон распределения погрешности k с коэффициентом пропорциональности x .

В основном анализ информативности ИП при мультипликативных погрешностях соответствует рассмотренному выше случаю неравновероятного закона распределения сигнала на входе основного ИП (см. рис.3). Но, учитывая важность этого случая, приведем для него основные соотношения. Обозначим Δk — интервал разрешимости по k . Тогда при $k = \text{const}$ и $\delta k = \text{const}$, что соответствует одинаковому Δk по всему диапазону сигналов, связь между минимальным y_{min} , максимальным y_{max} выходными сигналами и числом разрешимых уровней определяется как:

$$y_{\text{max}} = (1 + \Delta k/k)^N y_{\text{min}} \quad (19)$$

Разрешимые уровни входного сигнала равны:

$$x_n = \frac{y_n}{k} = x_{\text{min}} (1 + \Delta k/k)^{n-1} \quad (20)$$

Величина разрешимого интервала входного сигнала зависит от x :

$$\Delta x_n = x_n \frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta y_n}{k} \quad (21)$$

Вероятность нахождения сигнала на n -м входном и, соответственно, выходном уровнях равна

$$P_n = p_x(x_n)\Delta x_n = p_x(x_n)x_n \frac{\Delta k}{k} \quad (22)$$

Максимальная энтропия полезной информации на выходе ИП с преобладанием мультипликативной погрешности будет при условии, что вероятность входного сигнала распределяется по закону

$$p_x = [x \ln(x_{\max} / x_{\min})]^{-1}. \quad (23)$$

Если вероятность входного сигнала иная, то необходим дополнительный, корректирующий ИП. Его f_k определяется следующим образом. При мультипликативной погрешности и $\delta k = \text{const}$ из (17) и (21), и учитывая, что $x = f_k(x_{\text{вх}})$, имеем для f_k дифференциальное уравнение:

$$f'_k(x_{\text{вх}}) = p(x_{\text{вх}}) \Delta k f_k(x_{\text{вх}}). \quad (24)$$

Это уравнение имеет аналитическое решение, которое с точностью до постоянных коэффициентов может быть представлено в форме:

$$f_k = \exp[\Delta k \int p(x') dx']. \quad (25)$$

Здесь так же, как и выше, предполагается, что корректирующий ИП имеет существенно меньшую погрешность.

Погрешность реальных ИП вызвана различными факторами, поэтому необходима предварительная оценка ее величины, что позволит полнее использовать представленную методику.

Выводы

Классификация физических факторов, создание полной, но компактной аксиоматики новых направлений является весьма сложным и длительным процессом. Практическая значимость его результатов не всегда адекватна затраченным усилиям. Известные ранее подходы к созданию информационных критериев оценки ИП, несмотря на достаточное совершенство некоторых из них, например [7], не были обеспечены средствами реализации, и на тот момент не являлись первостепенными. Вероятно, по этой причине они до настоящего времени в основном существуют в виде теоретических положений, но, главное, они пока не

получили обоснованной практикой коррекции путей дальнейшего развития.

Представленная выше концепция использования энтропийного критерия оценки качества реальных ИП имеет ряд преимуществ. Количественная оценка информации соответствует назначению датчиков и ИП как информационных преобразователей. Процедура оценки использует хорошо зарекомендовавшие себя в других областях постулаты и методы теории информации. Расчет энтропии сообщений использует простые математические выражения, оптимизация ИП и измерительных трактов имеет ясную физическую интерпретацию.

Используя представленные методы и сравнительно простые вычислительные средства, можно быстро получить практически значимые результаты.

Литература: 1. Джексон Р. Новейшие датчики. М.: Техносфера, 2007. 384 с. 2. Руководство ЕВРАХИМ/СИТАК. Количественное описание неопределенности в аналитических измерениях. 2-е издание / Пер. с англ. под общей редакцией Л.А. Конопелько. С.-Пб.: ВНИИМ им.Д.И. Менделеева, 2002. 149с. 3. Фридман А.Э. Основы метрологии. Современный курс. С.Пб.: НПО «Профессионал», 2008. 284с. 4. Электрические измерения неэлектрических величин / Под ред. П.В. Новицкого. Л.: Энергия, 1975. 576 с. 5. Васильев В.А. Уменьшение влияния дестабилизирующих факторов на информативный сигнал датчиков // Датчики и системы. 2002. № 4. С.12-14. 6. Измерение электрических и неэлектрических величин: Учебн. пособ. для вузов/ Под общ. ред. Н.Н. Евтихьева. М.: Энергоатомиздат, 1990. 352 с. 7. Новицкий П.В. Основы информационной теории измерительных устройств. Л.: Энергия, 1968. 248 с.

Поступила в редколлегию 11.02.2010

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Дорошенко В.А.

Панченко Александр Юрьевич, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры микроэлектроники электронных приборов и устройств ХНУРЭ. Научные интересы: радиофизика, неразрушающий контроль. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел.: (057) 7021-362.