УДК 517.988

С. Н. БОЛКОВОЙ, канд. физ.-мат. наук

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Анализ процессов, происходящих в сложных волноводных системах, связан с необходимостью решения многомерных уравнений Гельмгольца. Кроме того, в ряде случаев при распространении электромагнитных волн в волноводных трактах необходимо учитывать нелинейную возмущающую силу либо нелинейность среды [1; 2], что приводит к исследованию нелинейно возмущенной эллиптической системы дифференциальных уравнений, главные части которых — операторы Лапласа:

$$\Delta u_i(x) + b_i(x) u_i(x) = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x) u_i(x) u_j(x),$$
$$i = \overline{1, N}, \quad x \in R^n. \tag{1}$$

В статье на основе принципа сжатых отображений устанавливается существование и единственность решения задачи Дирихле для системы (1), которое находится методом последовательных приближений.

В связи с этим рассмотрим следующую краевую задачу: найти решение $u(x) = \{u_1(x), \ldots, u_N(x)\}$ системы (1) в ограниченной области gn-мерного евклидова пространства с границей Γ, которое на границе удовлетворяет условию

$$u_i(x)|_\Gamma = \varphi_i(x), \quad i = \overline{1, N}. \tag{2}$$

Как известно [3], если функция $G(x,y)$ является функцией Грина оператора Лапласа, то решение задачи (1), (2) можно представить в виде

$$u_i(x) = \int_g G(x, y) \left[\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(y) u_i(y) u_j(y) - b_i(y) u_i(y)\right] dy +$$
$$+ \omega_i(x), \quad i = \overline{1, N}, \tag{3}$$

где функции $\omega_i(x)$ — гармонические в g и принимающие на Γ заданные непрерывные краевые значения:

$$\omega_i(x)|_\Gamma = \varphi_i(x), \quad i = \overline{1, N}. \tag{4}$$

Пусть

$$B = \max_{x \in g} |\omega_i(x)|, \quad i = \overline{1, N}; \quad K = \max_{x \in g} \int_g G(x, y)\, dy;$$
$$\max_{x \in g} \sum_{j=1}^{N} |a_{ij}(x)| \leqslant 1; \quad a = \max_{x \in g} |b_i(x)|, \quad i = \overline{1, N}. \tag{5}$$

Определение. Назовем классом W множество непрерывных вектор-функций $u(x)=\{u_1(x), \ldots, u_N(x)\}$, для которых

$$|u_i(x)| \leqslant \frac{M-\sqrt{M^2-4BK}}{2K}, \quad i=\overline{1, N} \quad M=1-Ka$$
$$\text{и } 0<M^2-4BK<1. \tag{6}$$

Теорема. *Пусть выполнены условия* (5). *Тогда в классе* W *существует единое решение задачи* (1), (2), *которое находится методом последовательных приближений.*

Доказательство. Обозначим

$$Au_i(x)=\int_g G(x, y)\left[\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(y)\,u_i(y)\,u_j(y)-b_i(y)\,u_i(y)\right]dy+$$
$$+\omega_i(x), \quad i=\overline{1, N}. \tag{7}$$

Покажем, что оператор A отображает класс W в себя. В самом деле, пусть $u(x)\in W$. Из (3) получаем

$$|Au_i(x)| \leqslant \int_g G(x, y)\left[\sum_{j=1}^{N}|a_{ij}(y)|\,|u_i(y)|\,|u_j(y)|+|b_i(y)|\,|u_i(y)|\right]dy+$$
$$+|\omega_i(x)|, \quad i=\overline{1, N}.$$

$$|Au_i(x)| \leqslant \left(\frac{M-\sqrt{M^2-4BK}}{2K}\right)^2\int_g G(x, y)\max_y\sum_{j=1}^{N}|a_{ij}(y)|\,dy+$$
$$+\frac{M-\sqrt{M^2-4BK}}{2K}\int_g G(x, y)\max_y|b_i(y)|\,dy+B=$$
$$=\left(\frac{M-\sqrt{M^2-4BK}}{2K}\right)^2\max_y\sum_{j=1}^{N}|a_{ij}(y)|\int_g G(x, y)\,dy+\frac{M-\sqrt{M^2-4BK}}{2K}\times$$
$$\times\max_y|b_i(y)|\int_g G(x, y)\,dy+B\leqslant\left(\frac{M-\sqrt{M^2-4BK}}{2K}\right)^2K+$$
$$+\frac{M-\sqrt{M^2-4BK}}{2K}Ka+B=\frac{(M-\sqrt{M^2-4BK})^2}{4K}+$$
$$+\frac{M-\sqrt{M^2-4BK}}{2}a+B=\frac{M-\sqrt{M^2-4BK}}{2K}(M+Ka)=$$
$$=\frac{M-\sqrt{M^2-4BK}}{2K},$$

Таким образом,

$$|Au_i(x)| \leqslant \frac{M-\sqrt{M^2-4BK}}{2K}, \quad i=\overline{1, N}.$$

Следовательно, $Au(x)\in W$.

Введем метрику в классе W:

$$\rho(u, v)=\sum_{i=1}^{N}\max_x|u_i(x)-v_i(x)|.$$

Тогда W становится полным метрическим пространством и остается показать, что при выполнении условия (5) оператор A, действующий в классе W,— оператор сжатия. В самом деле, возьмем

$$\rho(Au, Av) = \sum_{i=1}^{N} \max_x \left| \int_g G(x, y) \left\{ \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(y) [u_i(y) u_j(y) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - v_i(y) v_j(y)] - b_i(y) [u_i(y) - v_i(y)] \right\} dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{N} \max_x \int_g G(x, y) \left\{ \sum_{j=1}^{N} | a_{ij}(y) | | u_i(y) u_j(y) - v_i(y) v_j(y) | + \right.$$

$$\left. + | b_i(y) | | u_i(y) - v_i(y) | \right\} dy \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{N} \max_x \int_g G(x, y) \left\{ \sum_{j=1}^{N} | a_{ij}(y) | [| u_i(y) | | u_j(y) - v_j(y) | + \right.$$

$$\left. + | v(y) | | u_i(y) - v_i(y) |] + | b_i(y) | | u_i(y) - v_i(y) | \right\} dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M - \sqrt{M^2 - 4BK}}{2K} \max_x \int_g G(x, y) \sum_i \sum_j | a_{ij}(y) | | u_j(y) - v_j(y) | +$$

$$\left. + \sum_i \sum_j | a_{ij}(y) | | u_i(y) - v_i(y) | \right\} dy + \max_x \int_g G(x, y) | b_i(y) | | u_i(y) -$$

$$- v_i(y) | \, dy \leqslant \frac{M - \sqrt{M^2 - 4BK}}{K} \max_x \int_g G(x, y) \sum_i \sum_j | a_{ij}(y) | | u_i(y) -$$

$$- v_i(y) | \, dy + Ka \max_x | u_i(x) - v_i(x) | \leqslant (M - \sqrt{M^2 - 4BK}) \times$$

$$\times \sum_i \max_x | u_i(x) - v_i(x) | + Ka \sum_i \max_x | u_i(x) - v_i(x) | =$$

$$= (M - \sqrt{M^2 - 4BK} + Ka) \sum_i \max_x | u_i(x) - v_i(x) | =$$

$$= (1 - \sqrt{M^2 - 4BK}) \sum_i \max_x | u_i(x) - v_i(x) | = \alpha \rho(u, v), \ \alpha < 1,$$

т. е. оператор A — оператор сжатия в классе W. Таким образом, согласно принципу сжатых отображений [5] существует единственная неподвижная точка $u(x)$ оператора A, т. е. система интегральных уравнений (3) имеет единственное решение. В силу полной эквивалентности системы (3) с краевой задачей (1), (2) теорема доказана. Решение задачи (1), (2) может быть найдено методом последовательных приближений:

$$u_{ik}(x) = \int_g G(x, y) \left[\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(y) u_{i(k-1)}(y) u_{j(k-1)}(y) - b_i(y) u_{i(k-1)}(y) \right] dy +$$

$$+ \omega_i(x), \ u_{i0}(x) = \omega_i(x), \ i = \overline{1, N}.$$

Легко показать, что

$$| u_{ik}(x) | \leqslant \frac{M - \sqrt{M^2 - 4BK}}{2K};$$

$$\max_x | u_{ik}(x) - u_{i(k-1)}(x) | \leqslant (1 - \sqrt{M^2 - 4BK}) \max_x \times$$
$$\times | u_{i(k-1)}(x) - u_{i(k-2)}(x) |$$

для любого $k = 1, 2, \ldots$. Отсюда следует равномерная сходимость последовательности функций $u_k(x)$ к функции $u(x)$, которая и является искомым решением системы (3), а следовательно, и задачи (1), (2).

Список литературы: 1. *Никольский В. В.* Электродинамика и распространение радиоволн. М., 1973. 608 с. 2. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. М., 1965. 702 с. 3. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М., 1976. 392 с. 4. *Похожаев С. И.* О задаче Дирихле для уравнения $\Delta u = u^2$// Докл. АН СССР. 1960. Т. 134, № 4. С. 769—772. 5. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М., 1965. 520 с.

Поступила в редколлегию 09.03.88

УДК 621.372

В. А. ПИСЬМЕНЕЦКИЙ, канд. техн. наук

АНАЛИЗ СТРУКТУР ФУРЬЕ-ПРОЦЕССОРОВ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРЕМЫ ОТСЧЕТОВ

В последнее время в отечественной и зарубежной литературе для анализа дисперсионных Фурье-процессоров часто используются операции умножения и свертки. Преобразование сигналов с помощью указанных операций достаточно компактно и качественно наглядно можно проанализировать при дискретной форме их представления на основе теоремы отсчетов. Такой подход дает возможность сравнить основные параметры Фурье-процессоров разных типов. Рассмотрим входной узкополосный сигнал вида

$$f(t) = A(t) \cos [\omega_0 t + \varphi(t)] \quad \text{при} \quad t \in [0, \ T_a] \qquad (1)$$

и $\Delta f \ll f_0$ (Δf — полоса частот входного сигнала). Как известно, при этих ограничениях $f(t) = A(t) \exp j [\omega_0 t + \varphi(t)]$ можно представить «длинными» выборками

$$f(t) = \sum_n \overline{\mathrm{A}}(nT) \operatorname{rect} \frac{t - nT}{T} \exp j [\omega_0 (t - nT)], \qquad (2)$$

где

$$\operatorname{rect} x = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1: \\ 0 & \end{cases}$$

$$\overline{\mathrm{A}}(nT) = A(nT) \exp j \varphi(nT).$$

Проанализируем сущность операции умножения. Согласно [1] она сводится к введению в исследуемый сигнал ЛЧМ заполнения. По-