ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕМЕНТОВ САУ

Н. В. Книгавко, И. В. Кузьмин, Ю. Н. Степанов

Харьков

При исследовании нелинейных систем автоматического регулирования часто приходится сталкиваться с характеристиками элементов типа зоны нечувствительности (рис. 1), насыщения (рис. 2), зоны нечувствительности с насыщением (рис. 3). Эти характеристики бывают как симметричные (рис. 1), так и несимметричные (рис. 3).

Аналитическое описание подобных характеристик производится по участкам, соответствующим линейным частям характеристики,

что не всегда удобно при исследовании систем автоматического управления [1, 2].

В данной статье предлагается новая форма аналитического описания подобных характеристик одной формулой. Для этого используется аппарат R-функций [3].

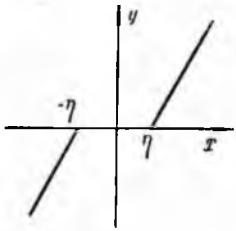


Рис. 1.

При использовании R-функций для описания различных геометрических образов введены следующие R-функции, соответствующие булевым функциям двух переменных [3]:

а) R — отрицание $\bar{y} = -y$;

б) R — конъюнкция

$$y_1 \wedge_\alpha y_2 = \frac{1}{2}\left(y_1 + y_2 - \sqrt{y_1^2 + y_2^2 - 2\alpha y_1 y_2}\right); \qquad (1)$$

в) R — дизъюнкция

$$y_1 \vee_\alpha y_2 = \frac{1}{2}\left(y_1 + y_2 + \sqrt{y_1^2 + y_2^2 - 2\alpha y_1 y_2}\right),$$

где y_1; y_2 — произвольные непрерывные функции от x;

$$-1 < \alpha \leqslant 1;$$

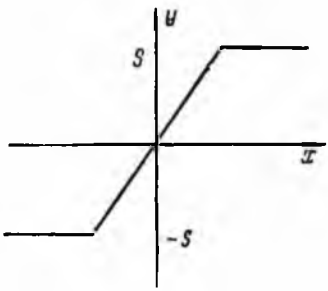


Рис. 2.

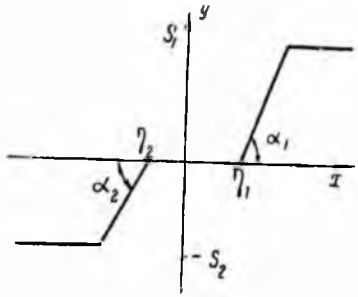


Рис. 3.

Приведем некоторые свойства R-функций при $\alpha = 1$:

1) $y_1 \wedge_1 y_2 = y_2 \wedge_1 y_1 = \min(y;\ y_2)$;

2) $y_1 \wedge_1 (y_2 \wedge_1 y_3) = (y_1 \wedge_1 y_2) \wedge_1 y_3 = \min(y_1;\ y_2;\ y_3)$;

3) $y_1 \wedge_1 y_1 = y_1$;

4) $l \wedge_1 y_1 = y_1 = \min(l;\ y_1)$;

5) $y_1 \vee_1 y_2 = y_2 \vee_1 y_1 = \max(y_1;\ y_2)$;

6) $y_1 \vee_1 (y_2 \vee_1 y_3) = (y_1 \vee_1 y_2) \vee_1 y_3 = \max(y_1;\ y_2;\ y_3)$;

7) $y_1 \vee_1 y_1 = y_1$;

8) $l \vee_1 y_1 = l = \max(l;\ y_1)$, где $l = \text{const}$;

9) $y_1 \wedge_1 (y_2 \vee_1 y_3) = (y_1 \wedge_1 y_2) \vee_1 (y_1 \wedge_1 y_3) = \min[y_1;\ \max \times$
$\times (y_2;\ y_3)] = \max[\min(y_1;\ y_2);\ \min(y_1;\ y_3)]$;

10) $y_1 \vee_1 (y_2 \wedge_1 y_3) = (y_1 \vee_1 y_2) \wedge_1 (y_1 \vee_1 y_3) = \max [y_1;\ \min \times$
$\times (y_2;\ y_3)] = \min [\max (y_1;\ y_2);\ \max (y_1;\ y_3)]$;

11) $(y_1 \wedge_1 y_2) \wedge_1 y_3) \wedge_1 y_4) \wedge_1 \ldots = y_1 \wedge_1 y_2 \wedge_1 y_3 \wedge_1 y_4 \wedge_1 \ldots$,

12) $(y_1 \vee_1 y_2) \vee_1 y_3) \vee_1 y_4) \vee_1 \ldots = y_1 \vee_1 y_2 \vee_1 y_3 \vee_1 y_4 \vee_1 \ldots$

Воспользовавшись этими свойствами, можно построить уравнение произвольной линии на плоскости, являющейся пересечением нескольких линий. На рис. 4 показана линия $ABCDEFL$, образованная линиями $y_1 = f_1(x)$; $y_2 = f_2(x)$; $y_3 = f_3(x)$; $y_4 = f_4(x)$. R-логика построения уравнения этой линии

$$y = (y_4 \wedge_1 y_1) \vee_1 y_3) \wedge_1 y_2. \qquad (2)$$

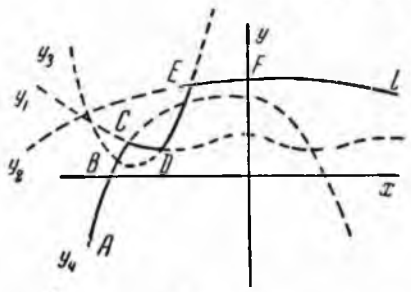


Рис. 4.

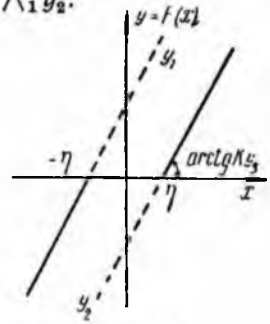


Рис. 5.

Раскрыв знаки R-дизъюнкции ($\vee_1$) и R-конъюнкции ($\wedge_1$) по формулам (1), получим уравнение линии $ABCDEFL$.

На практике, при построении уравнений произвольных линий, непосредственно пользоваться свойствами 1)—12) несколько затруднительно, поэтому мы предлагаем правило, позволяющее сравнительно просто получить R-логику построения уравнения линии в виде (2).

Правило. Если линия, образованная двумя линиями, $y_i = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$, в точке пересечения этих линий имеет выпуклость вверх, то необходимо над этими функциями выполнить операцию R-конъюнкции, если выпуклость вниз — то операцию R-дизъюнкции.

Это правило основывается на свойствах 1), 2), 4), 6), 8).

Рассмотрим конкретный пример описания характеристики (рис. 5), из которого видно, что характеристика образована пересечением трех линий

$$y_1 = k(x + \eta);$$
$$y_2 = k(x - \eta);$$
$$y_3 = 0.$$

Тогда, следуя правилу, можно записать R-логику построения уравнения характеристики

$$y = (y_1 \wedge_1 y_3) \vee_1 y_2 \qquad (3)$$

или, воспользовавшись свойством 11), можно записать R-логику построения уравнения характеристики в другой последовательности

$$y = (y_2 \vee_1 y_3) \wedge_1 y_1. \qquad (4)$$

Эту же характеристику можно описать следующей формулой:

$$y = (y_1 \wedge_1 y_3) + (y_2 \vee_1 y_3). \qquad (5)$$

Выражения, которые будут получены для данной характеристики по разным выражениям для R-логики ее построения — (3), 4), 5) — будут тождественны, несмотря на то, что по внешнему виду они отличаются:

$$y = \frac{1}{4}[k(3x - \eta) - |k(x + \eta)| + |k(3\eta - x) - |k(x + \eta)|||]; \qquad (3')$$

$$y = \frac{1}{4}[k(3x + \eta) + |k(x - \eta)| - |k(x + 3\eta) + |k(x - \eta)|||]; \qquad (4')$$

$$y = kx + \frac{-|k(x + \eta)| + |k(x - \eta)|}{2}. \qquad (5')$$

В тождественности этих выражений убеждаемся, сделав численные подстановки. Таким образом можно подобрать простое выражение для функции $y = F(x)$.

Если необходимо, чтобы $y = F(x)$ была k раз дифференцируема, необходимо принять несколько другое выражение для R-дизъюнкции и R-конъюнкции [3]:

$$y_1 \wedge_\alpha^{(p)} y_2 = \frac{1}{2}\left(y_1 + y_2 - \sqrt{y_1^2 + y_2^2 - 2\alpha y_1 y_2}\right) p(y_1, y_2); \qquad (6)$$

$$y_1 \vee_\alpha^{(q)} y_2 = \frac{1}{2}\left(y_1 + y_2 + \sqrt{y_1^2 + y_2^2 - 2\alpha y_1 y_2}\right) q(y_1, y_2),$$

где

$$p(y_1, y_2) = \left(\sqrt{y_1^2 + y_2^2}\right)^\gamma p_0(y_1, y_2);$$

$$q(y_1, y_2) = \left(\sqrt{y_1^2 + y_2^2}\right)^\gamma q_0(y_1, y_2);$$

$$\gamma > k - 1;$$

$$p_0(y_1, y_2) \geqslant 0;$$

$$q_0(y_1, y_2) \geqslant 0.$$

Вопрос выбора α, p_0 и q_0 решается в каждом конкретном случае в зависимости от тех или иных дополнительных условий, накладываемых на результирующую функцию $y = F(x)$. Если выбор этих функций безразличен, их следует выбирать из соображений простоты выражения (6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Основы автоматического регулирования (теория) (ред. В. В. Солодовников). «Машгиз», 1954.

2. А. А. Красовский, Г. С. Поспелов. Основы автоматики и технической кибернетики. Госэнергоиздат, 1962.

3. В. Л. Рвачев. Геометрические приложения алгебры логики. Изд-во «Техника», 1964.