



ВОЗБУЖДЕНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ НЕРЕГУЛЯРНОЙ И НЕЗАМКНУТОЙ СТРУКТУРЫ

ДОРОШЕНКО В.А.

Рассматривается задача рассеяния электромагнитных волн на конической поверхности, состоящей из двух полубесконечных круговых идеально проводящих тонких конусов с периодически прорезанными вдоль образующих щелями. Источником электромагнитного поля является радиальный диполь, поле которого меняется во времени по заданному закону. В результате использования интегрального преобразования Мелера-Фока и метода полубращения исходную электромагнитную задачу удалось свести к решению системы линейных алгебраических уравнений второго рода. Приводится аналитическое решение задачи для сплошного биконуса и полупрозрачной конической структуры.

1. Введение

Одним из традиционных подходов к решению задач распространения и рассеяния электромагнитных импульсов является подход, основанный на решении этих задач для монохроматической электромагнитной волны с последующим применением обратного преобразования Фурье. Применение такого подхода эффективно в случае длинных электромагнитных импульсов. Использование его для исследования задач рассеяния пикосекундных электромагнитных импульсов приводит к ряду трудностей, связанных, в частности, с резким увеличением объема вычислений и повышением требований к точности решения в спектральной области из-за накопления ошибок при переходе во временную область [1]. В последнее время значительно возрос интерес к численным методам, которые дают возможность решать уравнения Максвелла сразу во временной области [2-4]. Эти методы обладают рядом достоинств, но не лишены и недостатков. Так, их применение возможно только при наличии мощных ЭВМ, полученные численные результаты требуют тестирования, например, путем сравнения их с уже известными решениями задач в строгой постановке и проверки выполнения граничных и начальных условий и т.д. Численные решения дают возможность, в основном, изучить электродинамические характеристики количественно, не прибегая к качественному анализу, например, структуры рассеянного поля и спектра граничной задачи. Зачастую качественный анализ можно провести только имея аналитическое решение соответствующей задачи в строгой постановке, для получения которого необходимы строгие аналитические методы. Аналитические методы позволяют получить

решение задачи для ряда предельных асимптотических условий и проникнуть в физическую сущность того или иного явления в этих случаях. Эффективным средством для решения граничных электродинамических задач является аппарат интегральных преобразований. С привлечением последних удается понизить размерность уравнений и значительно упростить алгоритм решения исходной задачи.

Целью данной работы является создание нового численно-аналитического подхода для решения в строгой постановке задачи рассеяния электромагнитных импульсов на сложной полубесконечной идеально проводящей тонкой незамкнутой конической структуре. С помощью этого подхода предполагается получить аналитическое решение задачи без использования обращения решения задачи в частотной области. Идея подхода заключается в отделении двух переменных задачи (временной и пространственной) в ядро интегрального преобразования [5] и сведении четырехмерной задачи к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу рассеяния поля точечного источника на неограниченной тонкой идеально проводящей незамкнутой конической структуре Σ , состоящей из круговых конусов Σ_1, Σ_2 с общей осью и вершиной в точке O , каждый из которых имеет N щелей, периодически прорезанных вдоль образующих $\Sigma = \bigcup_{j=1}^2 \Sigma_j$ (рис.1). Обозначим через $2\gamma_j, j=1,2$, угол раскрытия конуса Σ_j ; $1 = 2\pi/N$ – период конической структуры; d_1, d_2 – ширину щелей конусов Σ_1, Σ_2 соответственно (оси щелей могут не совпадать). Ширина щелей и период – величины двугранных углов, которые образованы плоскостями, проведенными через ось структуры и ребра соседних конических лент (секторов). Введем сферическую систему координат r, θ, φ с началом в вершине конической структуры, в которой каждый из конусов Σ_j определяется уравнением $\theta = \gamma_j$. Точечный источник (электрический, $\chi = 1$, или магнитный, $\chi = 2$, радиальный диполь) с моментом

$$\vec{P}_r^{(\chi)}(\vec{r}, t) = \vec{M}^{(\chi)} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) f(t - t_0) \quad (1)$$

и плотностью тока

$$\vec{J}^{(\chi)}(\vec{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \vec{P}^{(\chi)}(\vec{r}, t) \quad (2)$$

расположен в точке $B(\vec{r}_0)$, где $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$ – дельта-функция, а функция $f(t - t_0)$ определяет зависимость поля источника от времени, $f(t - t_0) \equiv 0$, $t < t_0$ (источник включается в момент времени $t = t_0$). Среда, в которую помещены коническая поверхность и источник, является однородной, изотропной и стационарной с диэлектрической проницаемостью ϵ и магнитной проницаемостью μ . Требуется найти электромагнитное поле $\vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{H}(\vec{r}, t)$, удовлетворяющее в каждый момент времени

1) уравнениям Максвелла;

1) принципу причинности: $\vec{E} \equiv 0 \equiv \vec{H}$ при $t \leq t_0$;

2) граничному условию на конической поверхности Σ

$$(\vec{n} \times \vec{E})|_{\Sigma} = 0 ; \quad (3)$$

3) условию конечности энергии (наличие вершины и ребер).

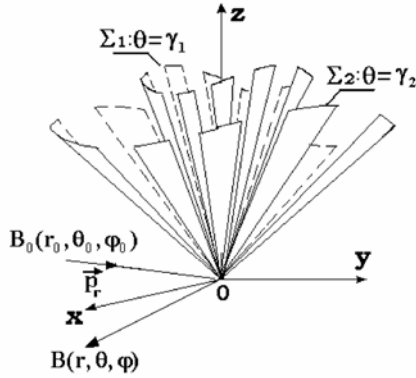


Рис. 1. Геометрия задачи

Поле $\vec{E}(\vec{r}, t)$, $\vec{H}(\vec{r}, t)$ представим в виде

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= E_0(\vec{r}, t) + \vec{E}_1(\vec{r}, t), \\ \vec{H}(\vec{r}, t) &= \vec{H}_0(\vec{r}, t) + \vec{H}_1(\vec{r}, t), \end{aligned} \quad (4)$$

где \vec{E}_0 , \vec{H}_0 – поле источника, а \vec{E}_1 , \vec{H}_1 – поле, обусловленное присутствием конической структуры.

Поскольку конус является координатной поверхностью сферической системы координат, а поле электрического (магнитного) радиального диполя представляет собой поле E-типа (H-типа) относительно радиальной координаты для решения граничной задачи с конической геометрией, удобно ввести электрический $v^{(1)}(\vec{r}, t)$ и магнитный $v^{(2)}(\vec{r}, t)$ потенциалы Дебая. Составляющие электромагнитного поля выражаются через потенциалы Дебая по формулам:

а) для поля E-типа (в случае электрического радиального диполя, $\chi = 1$)

$$\begin{aligned} E_r &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (rv^{(1)}) H_r = 0, \\ E_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} (rv^{(1)}), \quad H_\theta = \frac{\varepsilon}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial t} v^{(1)}, \quad (5) \\ E_\varphi &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} (rv^{(1)}), \quad H_\varphi = -\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial t} v^{(1)}; \end{aligned}$$

б) для поля H-типа (в случае магнитного радиального диполя, $\chi = 2$)

$$\begin{aligned} E_r &= 0, \quad H_r = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \cdot (rv^{(2)}), \\ E_\theta &= -\frac{\mu}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial t} v^{(2)}, \quad H_\theta = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \cdot (rv^{(2)}), \quad (6) \end{aligned}$$

$$E_\varphi = \mu \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial t} v^{(2)}, \quad H_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} \cdot (rv^{(2)}).$$

Потенциалы Дебая $v^{(\chi)}(\vec{r}, t)$, $\chi = 1, 2$, для полного поля \vec{E} , \vec{H} (5), (6) в каждый момент времени удовлетворяют:

1) четырехмерному волновому уравнению

$$\begin{aligned} \left(\Delta - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) v^{(\chi)}(\vec{r}, t) &= -\hat{F}^{(\chi)}(\vec{r}, t), \quad \vec{r} \notin \Sigma, \\ \hat{F}^{(\chi)}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{\varepsilon^{2-\chi} \mu^{\chi-1} r} M_r^{(\chi)} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) f(t - t_0), \quad (7) \\ \varepsilon\mu &= \frac{1}{a^2}; \end{aligned}$$

2) начальному условию

$$v^{(\chi)} \equiv 0 \equiv \frac{\partial v^{(\chi)}}{\partial t}, \quad t \leq t_0; \quad (8)$$

3) краевому условию

$$\frac{\partial^{\chi-1}}{\partial n^{\chi-1}} \left(\frac{\partial v^{(\chi)}}{\partial t} \right) \Big|_{\Sigma} = 0, \quad (9)$$

4) условию ограниченности энергии

$$\iiint_V \left(\left| \frac{\partial v}{\partial t} \right|^2 + |\nabla v|^2 \right) < +\infty. \quad (10)$$

Краевая задача математической физики в такой постановке имеет единственное решение.

В соответствии со структурой поля (4) используем представление

$$v^{(\chi)}(\vec{r}, t) = v_0^{(\chi)}(\vec{r}, t) + v_1^{(\chi)}(\vec{r}, t), \quad (11)$$

$$v_0^{(\chi)} = -\frac{M^{(\chi)}}{4\pi r_0 \varepsilon^{2-\chi} \mu^{\chi-1} R} \frac{1}{R} f\left(t - t_0 - \frac{1}{a} R\right) \eta\left(t - t_0 - \frac{1}{a} R\right)$$

потенциал Дебая источника, $\eta(\xi)$ – функция Хевисайда, $R = |\vec{r} - \vec{r}_0|$, $a = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$.

3. Метод решения

Для решения задачи (7)-(10) можно воспользоваться подходом, основанным на сведениях краевой задачи для неоднородного волнового уравнения (7) к соответствующей краевой задаче для уравнения Гельмгольца (стационарной задаче) с последующим обращением решения последней [6]. Однако неудобство этого подхода заключается в том, что для разных источников возбуждения его приходится использовать каждый раз, учитывая при этом разные представления для $\hat{F}^{(\chi)}(\vec{r}, t)$ (7) и $v_0^{(\chi)}$. В связи с этим оказывается целесообразным использовать метод функций Грина [7,8], согласно которому требуется найти решение краевой задачи для волнового уравнения с вполне определенной правой частью для любого типа источника, а потенциал $v^{(\chi)}(\vec{r}, t)$ определить по формуле

$$v^{(z)}(\vec{r}, t) = \frac{M_r^{(z)}}{r_0 \varepsilon^{2-\chi} \mu^{\chi-1}} \int_0^{t-t_0} G^{(z)}(\vec{r} - \vec{r}_0, z) f(t - t_0 - z) dz, \quad (12)$$

где $G^{(z)}(\vec{r}, t)$ – функция Грина для краевой задачи (7)–(10), удовлетворяющая

1) четырехмерному уравнению

$$\left(\Delta - \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial t^2} \right) G^{(z)}(\vec{r}, t) = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \delta(t - t_0), \quad \vec{r} \notin \Sigma; \quad (13)$$

2) начальному условию

$$G^{(z)} \equiv 0 \equiv \frac{\partial G^{(z)}}{\partial t}, \quad t \leq t_0; \quad (14)$$

3) краевому условию

$$\frac{\partial^{\chi-1}}{\partial n^{\chi-1}} \left(\frac{\partial G^{(z)}}{\partial t} \right) \Big|_{\Sigma} = 0; \quad (15)$$

4) условию ограниченности энергии

$$\iiint_V \left(\left| \frac{\partial G^{(z)}}{\partial t} \right|^2 + |\nabla G^{(z)}|^2 \right) dV < \infty. \quad (16)$$

В соответствии с (11) запишем $G^{(z)}(\vec{r}, t)$ в виде

$$G^{(z)}(\vec{r}, t) = G_0(\vec{r}, t) + G_1^{(z)}(\vec{r}, t), \quad (17)$$

где $G^{(z)}(\vec{r}, t)$ – функция Грина для свободного пространства,

$$G_0(\vec{r}, t) = \frac{\delta[t - t_0 - R/a]}{4\pi R}, \quad (18)$$

а потенциал Дебая $v_1^{(z)}(\vec{r}, t)$ для рассеянного поля записывается в виде (12)

$$v_1^{(z)}(\vec{r}, t) = \frac{M_r^{(z)}}{r_0 \varepsilon^{2-\chi} \mu^{\chi-1}} \int_0^{t-t_0} G_1^{(z)}(\vec{r} - \vec{r}_0, z) f(t - t_0 - z) dz, \quad (19)$$

Таким образом, решение исходной электродинамической задачи сводится к нахождению функции Грина $G_1^{(z)}(\vec{r}, t)$ для сложной конической структуры Σ . Представим $G_0(\vec{r}, t)$ из (18) в виде интеграла

$$G_0(\vec{r}, t) = \int_0^{+\infty} \tilde{G}_0 P_{-1/2+i\tau}(\text{chb}) d\tau, \quad (20)$$

где

$$\tilde{G}_0 = \frac{1}{r} \eta \left(t - t_0 - \frac{r+r_0}{a} \right) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{a}_{m\tau} U_{m\tau}^{(0)} e^{im\varphi},$$

$$U_{m\tau}^{(0)}(\theta, \theta_0) = \begin{cases} P_{-1/2+i\tau}^m(\cos \theta) P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos \theta_0), & \theta < \theta_0, \\ P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos \theta) P_{-1/2+i\tau}^m(\cos \theta_0), & \theta_0 < \theta, \end{cases}$$

$$\hat{a}_{m\tau} = \frac{1}{4\pi r_0} (-1)^m e^{-im\varphi_0} \tau \text{th} \pi \tau \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - m + i\tau\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + m + i\tau\right)},$$

$$\text{chb} = \frac{a^2(t-t_0)^2 - r^2 - r_0^2}{2rr_0}, \quad b \in [0, +\infty).$$

Для построения функции Грина, являющейся решением задачи (13)–(16), используем интегральное преобразование Мелера-Фока [5]:

$$\hat{f}(\tau) = \int_0^{+\infty} \text{shb} f(b) P_{-1/2+i\tau}(\text{chb}) db, \quad (21)$$

$$f(b) = \int_0^{+\infty} \tau \text{th} \pi \tau F(\tau) P_{-1/2+i\tau}(\text{chb}) d\tau \quad (22)$$

и представим искомую функцию $G_1^{(z)}(\vec{r}, t)$ из (17) в виде интеграла (20)–(21):

$$G_1^{(z)}(\vec{r}, t) = \int_0^{+\infty} \tau \text{th} \pi \tau \hat{G}_1^{(z)} P_{-1/2+i\tau}(\text{chb}) d\tau, \quad (23)$$

$$\hat{G}_1^{(z)} = -\frac{1}{r} \eta \left(t - t_0 - \frac{r+r_0}{a} \right) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{\hat{a}}_{m\tau} \hat{b}_{m\tau}^{(\chi),p}(\gamma_p, \theta_0) \hat{U}_{m\tau}^{(z)}(\theta, \varphi),$$

$$\tilde{\hat{a}}_{m\tau} = \frac{1}{4\pi r_0} (-1)^m e^{-im\varphi_0} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - m + i\tau\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + m + i\tau\right)},$$

$$\hat{U}_{m\tau}^{(z)} = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{\alpha}_{mn}^{(z)} P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(\cos \theta) e^{i(m+nN)\varphi}, & 0 < \theta < \gamma_1, \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{\beta}_{mn}^{(z)}(\theta) e^{i(m+nN)\varphi}, & \gamma_1 < \theta < \gamma_2, \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{\eta}_{mn}^{(z)} P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(-\cos \theta) e^{i(m+nN)\varphi}, & \gamma_2 < \theta < \pi, \end{cases}$$

где $\hat{\beta}_{mn}^{(z)}(\theta) = \hat{\beta}_{mn}^{(z)} P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(\cos \theta) + \hat{\xi}_{mn}^{(z)} P_{-1/2+i\tau}^{m+nN}(-\cos \theta)$,

$\hat{\alpha}_{mn}^{(z)}, \hat{\xi}_{mn}^{(z)}, \hat{\beta}_{mn}^{(z)}, \hat{\xi}_{mn}^{(z)}, \hat{\eta}_{mn}^{(z)}$ – неизвестные коэффициенты, коэффициенты $\hat{b}_{m\tau}^{(\chi),p}(\gamma_p, \theta_0)$ связаны с месторасположением электрического или магнитного диполя:

$$\hat{b}_{m\tau}^{(\chi),p}(\gamma_p, \theta_0) = \eta \left(\frac{5}{2} - p \right) \eta[(-1)^p (\theta_0 - \gamma_2)] \frac{d^{\chi-1}}{d\gamma_2^{\chi-1}} U_{m\tau}^{(0)}(\theta, \theta_0) + \eta \left(p - \frac{5}{2} \right) \eta(\theta_0 - \gamma_p) \frac{d^{\chi-1}}{d\gamma_p^{\chi-1}} U_{m\tau}^{(0)}(\theta, \theta_0),$$

$p = 1: 0 < \theta_0 < \gamma_1$, источник расположен внутри конуса Σ_1 ;

$p = 2: \gamma_1 < \theta_0 < \gamma_2$, источник расположен между конусами Σ_1 и Σ_2 ;

$p = 3: \gamma_2 < \theta_0 < \pi$, источник расположен вне конуса Σ_2 . В результате использования краевого условия на сложной конической поверхности (15), а также непрерывности искомой функции Грина $G_1^{(z)}(\vec{r}, t)$ и ее частных производных в щелях конусов Σ_2 и Σ_3 в любой момент времени, получаем выражения коэффициентов $\hat{\beta}_{mn}^{(z)}, \hat{\xi}_{mn}^{(z)}$ через коэффициенты $\hat{\alpha}_{mn}^{(z)}, \hat{\eta}_{mn}^{(z)}$:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} z_{m,n}^{(\chi),j} e^{i(n+v)N\varphi} = \hat{g}_{i\tau}^{(\chi),p}(\gamma_j) e^{i(m_0+v)N\varphi}, \quad \text{ленты } \Sigma_j, \quad j = 1, 2, \quad (24)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} [N(n+v)]^{\alpha(x)} \frac{|n|}{n} (1 - \varepsilon_{n,j}^{(x)}) \hat{z}_{m,n}^{(x)} e^{i(n+v)N\varphi} = 0, \quad (25)$$

щели $\Sigma_j, j=1,2,$

$$\hat{z}_{m,n}^{(x)} = z_{m,n}^{(x),1} [\hat{h}_{it}^{(x),(n+v)N}(\pi - \gamma_2, \pi - \gamma_1)]^{j-1} - z_{m,n}^{(x),2} [\hat{h}_{it}^{(x),(n+v)N}(\gamma_1, \gamma_2)]^{2-j},$$

$$z_{m,n}^{(x),j} = x_{m,n}^{(x)} \delta_j^1 + y_{m,n}^{(x)} \delta_j^2 = [x_{m,n}^{(x)}]^{2-j} + [y_{m,n}^{(x)}]^{j-1},$$

$$\hat{h}_{it}^{(x),(n+v)N}(x, y) = \frac{d^{x-1} P_{-1/2+it}^{(n+v)N}(\cos x)}{dx^{x-1}} \frac{d^{x-1} P_{-1/2+it}^{(n+v)N}(\cos y)}{dy^{x-1}},$$

$$\hat{g}_{it}^{(x),p}(\theta) = \frac{1}{\hat{b}_{it}^{(x),p}} \frac{d^{x-1}}{d\theta^{x-1}} U_{mr}^{(0)}(\theta, \theta_0),$$

$$x_{m,n+m_0}^{(x)} = \hat{\alpha}_{mn}^{(x)} \frac{d^{x-1}}{d\gamma_1^{x-1}} P_{-1/2+it}^{(n+v)N}(\cos \gamma_1),$$

$$y_{m,n+m_0}^{(x)} = \hat{\eta}_{mn}^{(x)} \frac{d^{x-1}}{d\gamma_2^{x-1}} P_{-1/2+it}^{(n+v)N}(\cos \gamma_2),$$

$$[N(n+v)]^{\alpha(x)} \frac{|n|}{n} (1 - \varepsilon_{nj}^{(x)}) = \frac{(-1)^{(n+v)N+x-1} \text{ch}\pi\tau}{\pi(\sin \gamma_j)^{1-\alpha(x)}} \frac{\Gamma(1/2 + it + (n+v)N)}{\Gamma(1/2 + it - (n+v)N)} \times \frac{1}{\frac{d^{x-1}}{d\gamma_j^{x-1}} P_{-1/2+it}^{(n+v)N}(\cos \gamma_j) \frac{d^{x-1}}{d\gamma_j^{x-1}} P_{-1/2+it}^{(n+v)N}(-\cos \gamma_j)} \times \frac{1}{1 - C_{it}^{(x),(n+v)N}(\gamma_1, \gamma_2)},$$

$$C_{it}^{(x),(n+v)N}(x, y) = \frac{d^{x-1} P_{-1/2+it}^{(n+v)N}(\cos x)}{dx^{x-1}} \frac{d^{x-1} P_{-1/2+it}^{(n+v)N}(-\cos x)}{dx^{x-1}} \times \frac{d^{x-1} P_{-1/2+it}^{(n+v)N}(-\cos y)}{dy^{x-1}} \frac{d^{x-1} P_{-1/2+it}^{(n+v)N}(\cos y)}{dy^{x-1}}.$$

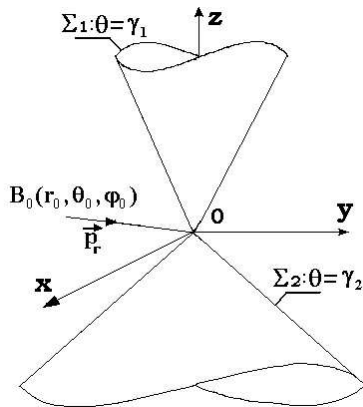


Рис. 2. Сплошной биконус

4. Частные случаи структуры. Аналитическое решение

1) Сплошной биконус (рис.2). В этом случае потенциал Дебая имеет следующий вид ($\gamma_1 < \theta_0 < \gamma_2$):

$$v_1^{(x)}(\vec{r}, t) = \frac{1}{r} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-im\varphi} \int_0^{+\infty} \tilde{\kappa}_{mr}^{(x)} \frac{\tilde{B}_{mr}^{(x)}(\theta)}{d^{x-1} \Delta_{it}^{(x),m}} \Phi_{it}(t - t_0) dt,$$

$$\gamma_1 < \theta < \gamma_2,$$

$$\tilde{\kappa}_{mr}^{(x)} = \frac{(-1)^{m+1} a M_r^{(x)}}{4r_0^2 \varepsilon^{2-\gamma} \mu^{x-1}} e^{-im\varphi_0} \tau \text{th}\pi\tau \frac{\Gamma(1/2 - m + it)}{\Gamma(1/2 + m + it)},$$

$$\tilde{B}_{mr}^{(x)}(\theta) = \Delta_{it}^{(x),m}(\gamma_1, \theta_0) \frac{d^{x-1}}{d\gamma_2^{x-1}} P_{-1/2+it}^m(-\cos \gamma_2) P_{-1/2+it}^m(\cos \theta) -$$

$$- \Delta_{it}^{(x),m}(\gamma_2, \theta_0) \frac{d^{x-1}}{d\gamma_1^{x-1}} P_{-1/2+it}^m(\cos \gamma_1) P_{-1/2+it}^m(-\cos \theta),$$

$$\Delta_{it}^{(x),m}(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{d^{x-1}}{d\gamma_1^{x-1}} P_{-1/2+it}^m(\cos \gamma_1) P_{-1/2+it}^m(-\cos \gamma_2) -$$

$$- \frac{d^{x-1}}{d\gamma_1^{x-1}} P_{-1/2+it}^m(-\cos \gamma_1) P_{-1/2+it}^m(\cos \gamma_2).$$

В случае одиночного конуса полученные результаты совпадают с результатами работы[9].

2) Одиночный конус с продольными щелями, $f(t - t_0) = \delta(t - t_0)$ (рис.3).

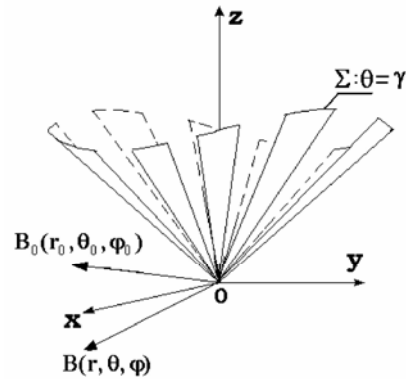


Рис. 3. Конус с продольными щелями

В случае одиночного конуса с периодически прорезанными вдоль образующих щелями систему линейных уравнений первого рода (24), (25) следует регуляризовать и свести к системе линейных алгебраических уравнений второго рода, которая в отличие от системы (24), (25) является устойчивой. Процедура регуляризации базируется на привлечении метода полуобращения [10].

В случае полупрозрачного конуса, который определяется существованием предела

$$\lim_{\substack{N \rightarrow +\infty \\ d/1 \rightarrow 1}} \left[-\frac{1}{N} \ln(1 - d/1) \right] = Q > 0,$$

потенциал Дебая (19), (23) записывается в виде

$$u_1^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \frac{\tilde{A}}{4\pi r_0} \eta \left(\hat{\mathbf{r}} - \frac{\mathbf{r} + \mathbf{r}_0}{c} \right) \times \\ \times \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im\varphi} \int_0^{+\infty} h_{m\tau} \frac{P_{-1/2+i\tau}^m(\cos \gamma)}{P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos \gamma)} \times \\ \times P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos \theta) P_{-1/2+i\tau}^m(\text{chb}) d\tau, \quad \gamma < \theta < \pi, \quad (26)$$

$$h_{m\tau} = \frac{g_{m\tau}}{1 + 2mQ(\tilde{P}_{\varepsilon_{m,0}}^{m\tau})} = \left(\frac{-1}{2} \right)^{m+1} e^{-im\varphi_0} \tau \text{th} \pi \tau \frac{\Gamma(1/2 - m + i\tau)}{\Gamma(1/2 + m + i\tau)} \times \\ \times P_{-1/2+i\tau}^m(-\cos \theta_0) P_{-1/2+i\tau}^m(\cos \gamma).$$

В случае расположения источника на оси конуса ($\theta_0 = \pi$) представление (26) упрощается и приобретает вид

$$u_1^{(1)}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\tilde{A}}{4\pi r_0} \eta \left(\hat{\mathbf{r}} - \frac{\mathbf{r} + \mathbf{r}_0}{c} \right) \times \\ \times \int_0^{+\infty} \frac{\tau \text{th} \pi \tau}{D_{i\tau}} [P_{-1/2+i\tau}(\cos \gamma)]^2 P_{-1/2+i\tau}(-\cos \theta) \times \\ \times P_{-1/2+i\tau}(\text{chb}) d\tau, \quad \gamma < \theta < \pi, \quad (27)$$

$$D_{i\tau} = \pi P_{-1/2+i\tau}(\cos \gamma) P_{-1/2+i\tau}(-\cos \gamma) + 2Q \text{ch} \pi \tau.$$

Для получения одномодового режима в представлении (27) необходимо перейти к интегрированию по мнимой оси и воспользоваться основной теоремой о вычетах для разложения интеграла в ряд по вычетам подынтегральной функции [11]. Если поместить источник у вершины конуса, то доминирующим в ряде будет первый член, который и характеризует распределение поля в этом случае.

5. Заключение

Впервые предложен численно-аналитический подход для решения задачи рассеяния электромагнитных волн на сложной незамкнутой конической структуре во временной области. Этот подход основан на использовании интегрального преобразования Мелера-Фока и метода полуобращения. Его применение значительно упрощает решение четырехмерной электродинамической задачи и дает возможность, минуя процедуру обращения решения соответствующей задачи в частотной области, свести ее к системе линейных алгебраических уравнений второго рода относительно коэффициентов неизвестной трансформанты преобразования

Мелера-Фока в ряд Фурье по азимутальной координате сферической системы. Решение системы может быть получено как численно (при любых соотношениях между параметрами структуры), так и аналитически (в случае большого числа щелей и сравнимости или их малости по сравнению с периодом структуры). Аналитическое решение позволяет наглядно и качественно провести анализ спектра граничной задачи и структуры поля. В частном случае одиночного сплошного конуса решение задачи совпадает с известными результатами других авторов [9]. Предложенный подход может быть использован для исследования задачи рассеяния волн на сложных конических и клиновидных структурах, которые являются моделями элементов современных антенных систем, радиолокационных комплексов и аппаратуры для дистанционного зондирования.

Литература: 1. *Лерер А.М.* Регуляризация в двумерных задачах дифракции коротких электромагнитных импульсов // Радиотехника и электроника. 1998. Т.43, №8. С.915-920. 2. *Brit Ch. L.* Solution of electromagnetic scattering problems using time domain techniques // IEEE Trans. Antennas Propagat. 1989. Vol.37, No.9. P.1181-1192. 3. *Lee J.F., Lee R., Cangellaris A.* Time-domain finite element methods // IEEE Trans. Antenna Propagat. 1997. Vol.45, No.3. P.430-441. 4. *Shanker B., Ergin A.A., Aygun K., Michielssen E.* Analysis of transient electromagnetic scattering phenomena using a two-level plane wave time-domain algorithm // IEEE Trans. Antennas Propagat. 1997. Vol.45, No.3 P.430-441. 5. *Фок В.А.* О разложении произвольной функции в интеграл по функциям Лежандра с комплексным значком // Докл. АН СССР. 1943. Т.39, №7. С.279-283. 6. *Дорошенко В.А.* Возбуждение биконуса с продольными щелями точечным источником, поле которого произвольно меняется во времени // Радиотехника. 2002. Вып.129. С.14-21. 7. *Положий Г.Н.* Уравнения математической физики. М.: Высш. шк., 1964. 560с. 8. *Фелсен Л., Маркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн. М.: Мир, 1978. Т.1. 550с. Т.2. 558с. 9. *Chan K.-K., Felsen L.* Transient and time-harmonic diffraction by a semi-infinite cone // IEEE Trans. Antennas Propagat., 1977. Vol.25, No.6. P.802-806. 10. *Шестопалов В.П.* Сумматорные уравнения в современной теории дифракции. Киев: Наук. думка, 1983. 252с. 11. *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций. М.: Наука, 1967. Т.1. 488 с.

Поступила в редколлегию 25.12.2004

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Нерух А.Г.

Дорошенко Владимир Алексеевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры ВМ ХНУРЭ. Научные интересы: электродинамика, математическая физика. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр.Ленина,14, тел.7021-372.