

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ

О.Г. Пащенко, О.Б. Галат, О.Ю. Бабиченко

НАПІВПРОВІДНИКОВІ КВАНТОВІ ГЕНЕРАТОРИ З НАНОСТРУКТУРАМИ

Навчальний посібник для студентів спеціальностей
171 Електроніка, 153 Мікро- та наносистемна техніка

РЕКОМЕНДОВАНО
Вченою радою ХНУРЕ.
Протокол № 13/11 від 28.12.2018

Харків 2019

УДК 621. 396. 67

О.Г. Пащенко, О.Б. Галат, О.Ю. Бабиченко. Напівпровідникові квантові генератори з наноструктурами. – Харків: ХНУРЕ, 2019. – 236 с.

ISBN 978-966-659-258-6

У навчальному посібнику викладено основи взаємодії оптичного випромінювання з речовиною, конструкція, принцип дії і основні характеристики відкритих резонаторів, а також конструкція, принцип дії і основні параметри світловипромінювальних і лазерних діодів.

Розглянуто фізичні принципи і найбільш поширені математичні моделі відкритих резонаторів та енергетичного спектра наноструктур.

Рекомендується студентам денної та заочної форм навчання спеціальностей 171 Електроніка і 153 Мікро- та наносистемна техніка.

Іл.: 66. Табл.: 24. Бібліогр. наймен.: 27.

Рецензенти:

К.П. Ватутін, д-р техн. наук, проф., академік Української державної академії зв'язку ім. О.С. Попова;

В.А. Шумаков, канд. техн. наук., доц. каф. РЕС ХНУРЕ.

ISBN 978-966-659-258-6

©

О.Г. Пащенко,

О.Б. Галат,

О.Ю. Бабиченко, 2018

ЗМІСТ

ВСТУП.....	6
1 ФІЗИЧНІ ОСНОВИ ВЗАЄМОДІЇ КВАНТОВИХ СИСТЕМ	
3 ЕЛЕКТРОМАГНІТНИМ ПОЛЕМ.....	8
1.1 Поглинання і випромінювання енергії під час квантових переходів. Коефіцієнти Ейнштейна.....	8
1.2 Квантові переходи під дією електромагнітного поля в дворівневій системі	15
1.3 Підсилення за допомогою квантових систем.....	17
1.4 Форма і ширина спектральної лінії	20
1.5 Характеристики лазерного випромінювання	25
1.5.1 Монохроматичність.	25
1.5.2 Когерентність.....	30
1.5.3 Напрявленість.	35
1.5.4 Яскравість.	41
1.5.5 Поляризація.....	42
1.6 Основні фізичні принципи нелінійного перетворення інфрачервоних і оптичних частот.....	43
1.7 Розрахунок ефективності енергетичного перетворення в пруститі і тіогалаті срібла.....	46
1.8 Розрахунок гранично допустимих розстроювань фазового синхронізму	52
1.8.1 Розрахунок умов фазового синхронізму для прустита.	49
1.8.2 Розрахунок умов фазового синхронізму для тіогалата срібла.	57
1.9 Контрольні запитання і завдання	59
1.10 Задачі для самостійного розв'язку.....	60
Перелік посилань до розділу 1	66
2 ОПТИЧНІ РЕЗОНАТОРИ	67
2.1 Основні властивості оптичних резонаторів	67
2.2 Розрахунок розподілу поля на дзеркалах відкритого резонатора.....	68
2.2.1 Метод інтегральних рівнянь.	68
2.2.2 Метод хвилевого рівняння.	75
2.3 Види оптичних резонаторів	81
2.4 Стійкі і нестійкі резонатори.....	85
2.5 Визначення геометричних параметрів відкритого резонатора	87
2.5.1 Конфокальний резонатор.	89
2.5.2 Напівконфокальний резонатор	89
2.5.3 Неконфокальний резонатор	89
2.5.4 Нестійкий резонатор з конфокальною системою дзеркал	90
2.6 Втрати у відкритому резонаторі	91
2.6.1 Резонатор із плоскими дзеркалами. Д.....	91
2.6.2 Конфокальний резонатор.	92
2.6.3 Стійкий резонатор довільної форми	92

2.6.4	Нестійкий резонатор з конфокальною системою дзеркал	93
2.7	Розбіжність пучка.....	93
2.7.1	Розбіжність випромінювання конфокального резонатора.....	93
2.7.2	Розбіжність випромінювання неконфокального резонатора.....	94
2.7.3	Кут розбіжності нестійкого резонатора з конфокальною системою дзеркал	94
2.8	Матричний метод розрахунку відкритого резонатора	95
2.9	Завдання для самостійної роботи.....	97
	Перелік джерел посилань до розділу 2.....	98
3	НАПІВПРОВІДНИКОВІ ЛАЗЕРИ	100
3.1	Фізичні основи.....	100
3.1.1	Специфічні особливості інжекційних лазерів.....	100
3.1.2	Активні середовища	100
3.1.3	Нагнітання	100
3.1.4	Конструкція	101
3.2	Інжекційний лазер на основі GaAs	102
3.2.1	Інжекційний лазер на основі $Al_xGa_{1-x}As/GaAs$	103
3.2.2	Інжекційний лазер на основі $Ga_xIn_{1-x}As_{1-y}/In$	105
3.2.3	Інжекційний лазер на основі $Al_xGa_{1-x}As_ySb_{1-y}/GaSb$	106
3.2.4	Лазер на основі PbSnTe.....	106
3.3	Активний шар інжекційних гомо- і гетеролазерів.....	107
3.3.1	Електронні характеристики лазерних p-n – переходів [2].....	107
3.3.2	Гетероструктури.....	110
3.3.3	Квантоворозмірні структури (КРС).....	113
3.4	Основні канали втрат енергії в інжекційних лазерах	115
3.5	Спектральні і просторові характеристики генерованого випромінювання [2].....	116
3.5.1	Одномодовий і багатомодовий режими генерації.	116
3.5.2	Кут розбіжності лазерного променя	120
3.6	Методика розрахунку основних параметрів і характеристик напівпровідникового інжекційного лазера [3].....	122
3.6.1	Конструктивні параметри. Довжина активного шару	122
3.6.2	Енергетичні характеристики	123
3.7	Енергетичні стани частинок у квантоворозмірних структурах.....	127
3.7.1	Стаціонарне рівняння Шредінгера для частинок у прямокутній квантовій ямі.....	127
3.7.2	Частинки і квазічастинки в потенціальній ямі з нескінченно високими непроникними бар'єрами	128
3.7.3	Частинки і квазічастинки в потенціальній ямі кінцевої глибини ...	129
3.8	Квантоворозмірна структура у зовнішніх електричних полях	138
3.8.1	Вплив зовнішнього стаціонарного електричного поля на енергетичні стани частинок і квазічастинок.....	138
3.8.2	Вплив зовнішнього гармонічного електричного поля на енергетичні стани частинок і квазічастинок.....	147

3.9 Завдання для самостійної роботи.....	152
Перелік джерел посилань до розділу 3.....	153
Додаток А	155
Додаток Б	198

ВСТУП

Виникнення і розвиток нових галузей техніки, таких як інформатика, аерокосмічна техніка, ядерна енергетика, сучасна біомедицина, а також подальший розвиток традиційних галузей приладо- і машинобудування, неможливі без застосування принципово нових технологій, в яких використовуються малогабаритні, потужні та ефективні джерела оптичного випромінювання і особливо світловипромінювальні діоди і лазери. Унікальні фізичні особливості лазерного випромінювання, високий ступінь когерентності, монохроматичності, можливість досягнення великої інтенсивності сприяють розповсюдженню лазерів у різних сферах людської діяльності.

Підготовка фахівців високої кваліфікації за такими спеціальностями як «Електроніка» і «Прикладна фізика та наноматеріали» неможлива без глибокого розуміння принципів дії лазерів і властивостей лазерного випромінювання.

Метою даного посібника є поглиблення знань студентів спеціальностей «Електроніка» і «Прикладна фізика та наноматеріали» з питань функціонування оптоелектронних приладів, а саме світловипромінювальних діодів та напівпровідникових лазерів і використання математичного моделювання для їхнього дослідження, аналізу та розробки.

Матеріал посібника складається з трьох розділів: Фізичні основи взаємодії квантових систем з електромагнітним полем. Оптичні резонатори. Напівпровідникові лазери і двох додатків. Кожна з частин містить відомості про особливості оптичних середовищ і розповсюдження в них оптичного випромінювання; конструкції, таблиці робочих параметрів, математичні моделі та приклади розрахунку характеристик лазерів і оптичних резонаторів. У кожній частині є контрольні запитання і завдання для самостійної роботи.

В ході створення навчального посібника була зроблена спроба скористатися широкими можливостями, які надає сьогодні обчислювальна техніка. Під час вивчення запропонованих тем за допомогою комп'ютерів студенти можуть не тільки проводити розрахунок параметрів і дослідження характеристик квантових приладів і пристроїв, але і ставити числовий експеримент, у правильності результатів якого вони можуть переконатися, звернувшись до фундаментальних досліджень, результати яких опубліковані в науковій літературі.

У більшості підручників відсутній докладний хід міркувань і проміжних обчислень, що ускладнює читання таких робіт навіть підготовленими студентами. Автори даного підручника знайшли доцільним у другому розділі подати докладне виведення розрахункових співвідношень, на підставі яких можна досліджувати відкриті резонатори і навести один з можливих варіантів алгоритму і програми розрахунку. Використовуючи цей матеріал, студент може не тільки провести розрахунок параметрів і характеристик резонатора, але і, по-перше, зрозуміти логіку побудови теорії резонатора, і, по-друге, самостійно

поставити числовий експеримент з дослідження розподілу інтенсивності різних типів коливань, дослідження дифракційних втрат, спектра частот і т.д.

Останнім часом широкого розповсюдження набули напівпровідникові лазери на основі квантоворозмірних структур і квантових точок, а також використання цих структур у напівпровідникових приладах нелазерного типу.

Тому у посібнику пропонується більш глибоке вивчення явищ і процесів, що протікають у квантоворозмірних структурах. Наведено розв'язки ряду задач, алгоритми та програми реалізації отриманих розв'язків. Використовуючи наведені програми, студент має можливість отримати як чисельні значення деяких фізичних величин, так і можливість візуально спостерігати їхні зміни зі зміною параметрів навколишнього середовища, умов роботи конкретного приладу і граничних умов.

1 ФІЗИЧНІ ОСНОВИ ВЗАЄМОДІЇ КВАНТОВИХ СИСТЕМ З ЕЛЕКТРОМАГНІТНИМ ПОЛЕМ

1.1 Поглинання і випромінювання енергії під час квантових переходів. Коефіцієнти Ейнштейна

Уся множина електромагнітних хвиль, що існують у природі, утворює спектр (рис. 1.1.), який складається з таких основних ділянок [0]: гамма-рентгенівського, оптичного та радіовипромінювання.

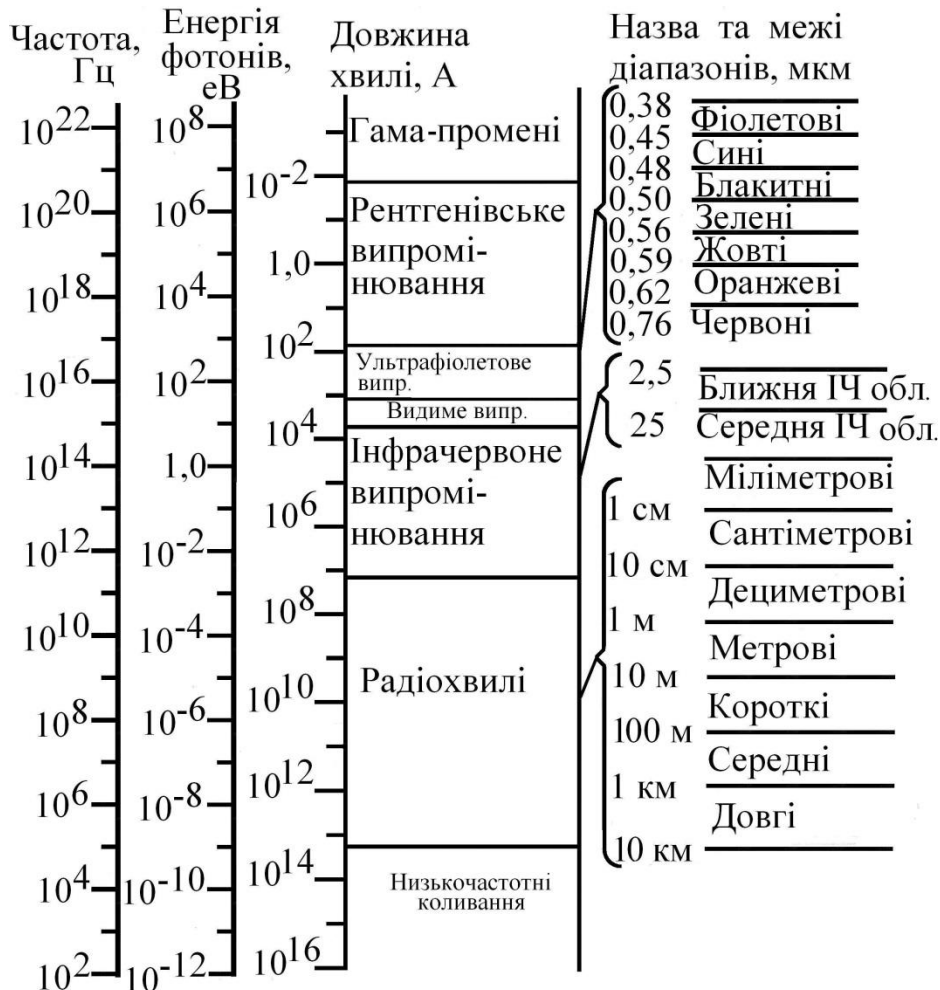


Рисунок 1.1 – Спектр усіх можливих електромагнітних хвиль

Довжину поширюваної електромагнітної хвилі λ з частотою ν пов'язує співвідношення $\lambda = c/\nu$. Через велику протяжність оптичного діапазону (від $\lambda = 10^{-3}$ м до $\lambda = 10^{-8}$ м – умовні межі відповідно інфрачервоного та ультрафіолетового спектрів) на кожній з його ділянок доцільно використовувати свої одиниці довжини хвилі: мікромметр (1 мкм = 10^{-6} м), нанометр (1 нм = 10^{-9} м) та ангстрем (1 А = 10^{-10} м).

Випромінювання описують не тільки одиницями довжини, а й частотними одиницями – герцами. Оскільки згідно з формулою Планка енергія фотона пропорційна його частоті ($E = h \cdot \nu$), то випромінювання можна характеризувати також ергами чи електрон-вольтами.

Стан електрона в атомі, який перебуває в зовнішньому електричному полі або в полі інших мікрочастинок, описує хвильова функція ψ , що задовольняє рівняння Шредінгера (1.1):

$$i \cdot \hbar \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi. \quad (1.1)$$

У випадку, коли атоми (чи іони) не перебувають у змінних зовнішніх полях, то хвильові функції ψ є власними хвильовими функціями ψ_n оператора Гамільтона \hat{H}_0 , які не залежать від часу й задовольняють рівняння:

$$\hat{H}_0 \psi_n = E_n \cdot \psi_n. \quad (1.2)$$

Стани квантових частинок, що їх описують функції ψ_n , для яких енергія має певні значення E_n , називають стаціонарними, тобто стійкими, стабільними. Стаціонарний стан, якому відповідає мінімальне значення енергії частинки, є основним (незбудженим), а всі інші – збудженими. Під час переходу з одного стану в інший енергія змінюється дискретно – на величину

$$h \cdot \nu_{21} = E_2 - E_1. \quad (1.3)$$

Сукупність множини значень енергії стаціонарних станів називають енергетичним спектром квантової системи. Енергію стаціонарного стану, частоту і довжину хвилі одну з одною пов'язують співвідношення:

$$\frac{E_2 - E_1}{h} = \nu_{21}; \quad \frac{E_2 - E_1}{h \cdot c} = \frac{1}{\lambda_{21}}; \quad \frac{\nu_{21}}{c} = \frac{1}{\lambda_{21}}. \quad (1.4)$$

На підставі співвідношень (1.4) енергію стаціонарного стану та частоту можна подати в одиницях довжини хвилі, тобто в см^{-1} .

У приладах квантової електроніки (мазери та лазери) використано три фундаментальні явища, які відбуваються під час взаємодії електромагнітних хвиль із системою квантових частинок [0], процеси спонтанного та вимушеного випромінювання і поглинання.

Спонтанний перехід – це самовільний перехід частинки з вищого E_n на нижчий E_m рівень (рис. 1.2), що його супроводжує випромінювання кванта

енергії з частотою ω_{nm} . Щоб цей процес відбувався, зовнішнє поле не потрібне, а тому керувати спонтанним переходом або передбачити його принципово неможливо. Можна говорити тільки про ймовірність цього процесу, яка залежить не від зовнішнього поля, а від властивостей атома (іона) чи молекули.

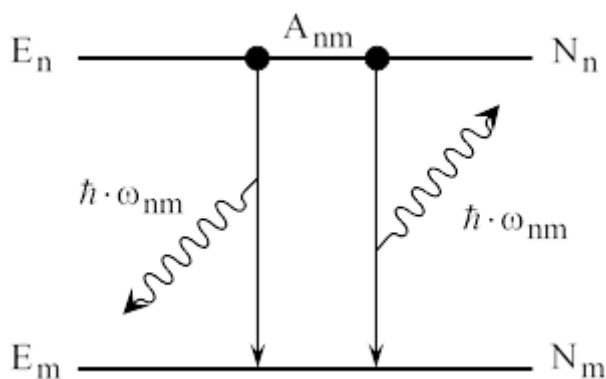


Рисунок 1.2 – Енергетична діаграма спонтанного переходу

Ймовірність спонтанного переходу за одиницю часу із стану E_n в стан E_m – $\left(\frac{dW_{nm}^{cn}}{dt} \right)$ називають коефіцієнтом Ейнштейна для спонтанного випромінювання й позначають A_{nm} , тобто:

$$\frac{dW_{nm}^{cn}}{dt} = A_{nm}. \quad (1.5)$$

Якщо нижче від збудженого рівня n розташовано кілька рівнів, то повна зміна його заселеності внаслідок спонтанних переходів на ці рівні дорівнюватиме сумі ймовірностей усіх переходів:

$$\frac{dW_n^{cn}}{dt} = \sum_i A_{ni}. \quad (1.6)$$

Для випадку, наведеного на рис. 1.3,

$$\frac{dW_n^{cn}}{dt} = A_{nm} + A_{nk}. \quad (1.7)$$

Як відомо, середній час життя атома, іона чи молекули в збудженому стані обернено пропорційний ймовірності спонтанного переходу: $\tau = 1/A_{nm}$.

Якщо нижче від рівня n є кілька рівнів, то час життя частинок у стані n дорівнює величині, зворотній повній ймовірності спонтанних переходів з рівня n на всі нижче розташовані:

$$\tau_n = \left(\sum_i A_{ni} \right)^{-1}. \quad (1.8)$$

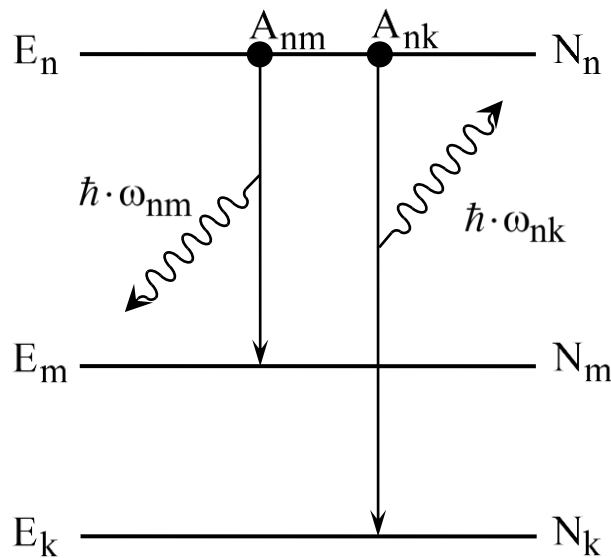


Рисунок 1.3 – Енергетична діаграма спонтанного переходу у багаторівневій системі

Для випадку, наведеного на рис. 1.3,

$$\tau_n = (A_{nm} + A_{nk})^{-1}. \quad (1.9)$$

Величину $\tau_{nm}(\tau_n)$ ще називають спонтанним часом життя для переходів $n \rightarrow m$.

Щоб зрозуміти процеси, які відбуваються в квантових приладах, треба мати на увазі, що випадковість спонтанних переходів зумовлює незалежність та несинхронність випромінювання квантових частинок у системі. Отже, спонтанне випромінювання ненаправлене, некогерентне й немонахроматичне і є джерелом шумів та нестабільності коливань. Проте водночас, і це дуже важливо, спонтанні переходи сприяють початкові процесу підсилення й збудження коливань у мазерах та лазерах, а також відіграють важливу роль під час одержання нерівноважних станів у квантовій системі.

Вимушені (індуковані) переходи відбуваються під дією зовнішнього поля резонансної частоти й залежать від спектральної густини його енергії $\rho(\omega)$. Під

час вимушеного переходу з нижнього рівня на верхній (рис. 1.4) поглинається квант енергії з частотою

$$\omega_{nm} = \frac{(E_n - E_m)}{\hbar}. \quad (1.10)$$

Імовірність таких переходів за одиницю часу

$$\frac{dW_{mn}^{ногл.}}{dt} = B_{mn} \cdot \rho(\omega), \quad (1.11)$$

де B_{mn} – коефіцієнт Ейнштейна для вимушеного (індукованого) переходу з поглинанням.

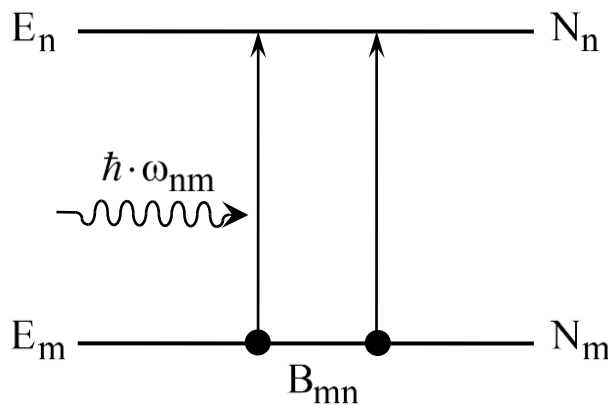


Рисунок 1.4 – Енергетична діаграма вимушеного переходу з нижнього рівня на верхній

Якщо квантова частинка перебуває на верхньому рівні, то, подіявши на неї електромагнітним випромінюванням з частотою: $\omega_{nm} = (E_n - E_m)/\hbar$, можна спричинити перехід на нижній рівень (рис. 1.5) з випромінюванням кванта енергії. Ймовірність індукованого випромінювання за одиницю часу

$$\frac{dW_{nm}^{випр.}}{dt} = B_{nm} \cdot \rho(\omega), \quad (1.12)$$

де B_{nm} – коефіцієнт Ейнштейна для вимушеного випромінювання.

Середній час життя атома відносно індукованого переходу $n \rightarrow m$ обернено пропорційний величині $B_{nm} \cdot \rho(\omega)$, тобто $\tau_{nm} = 1/(B_{nm} \cdot \rho(\omega))$.

Індуковане випромінювання має ті ж самі частоту, фазу, напрям розповсюдження і поляризацію, що й зовнішнє випромінювання, яке діє на квантову частинку, а тому воно когерентне.

Ймовірності спонтанного й вимушеного переходів за одиницю часу пов'язує співвідношення:

$$A_{nm} = \frac{\hbar \cdot \omega_{nm}^3}{\pi^2 \cdot c^3} \cdot B_{nm}, \quad (1.13)$$

а ймовірності індукованих переходів з випромінюванням ($n \rightarrow m$) та поглинанням ($m \rightarrow n$) енергії дорівнюють одна одній, тобто $B_{nm} = B_{mn}$.

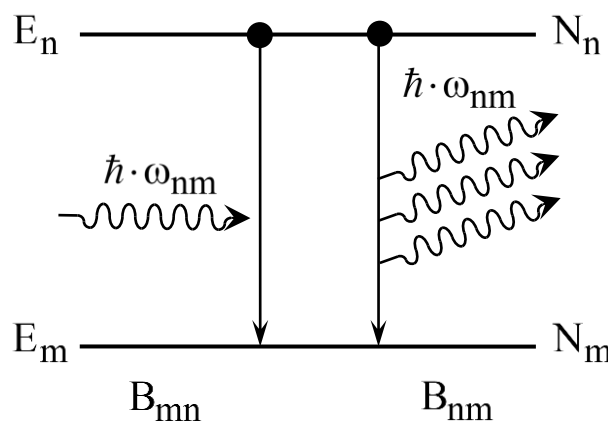


Рисунок 1.5 – Енергетична діаграма вимушеного переходу з верхнього рівня на нижній з випромінюванням кванта енергії

Коефіцієнт $\omega^2 / (\pi^2 \cdot c^3)$ – це кількість типів коливань в одиничному об'ємі та в одиничному інтервалі частот для вільного простору.

Крім випромінювальних переходів, пов'язаних з поглинанням кванта енергії, в системі квантових частинок можливі й безвипромінювальні переходи, під час яких свою енергію атоми передають іншим атомам чи навколишньому середовищу (співударення атомів у газовому розряді, передавання енергії кристалічним ґраткам тощо). Внаслідок такої взаємодії атом, іон чи молекула переходить із стану n у стан m або, навпаки, – без випромінювання кванта і без його участі (рис. 1.6).

Ймовірність безвипромінювального переходу за одиницю часу з верхнього рівня на нижній узвичаєно позначати w_{nm} , а з нижнього на верхній – w_{mn} . Імовірності безвипромінювальних переходів між рівнями $n \leftrightarrow m$ пов'язує формула:

$$w_{nm} = w_{mn} \cdot \exp\left(\frac{h \cdot \nu_{mn}}{K \cdot T}\right). \quad (1.14)$$

Середній час життя атома відносно безвипромінювального переходу обернено пропорційний величині w_{nm} чи w_{mn} , тобто:

$$\tau_{nm} = \frac{1}{w_{nm}}; \quad \tau_{mn} = \frac{1}{w_{mn}}. \quad (1.15)$$

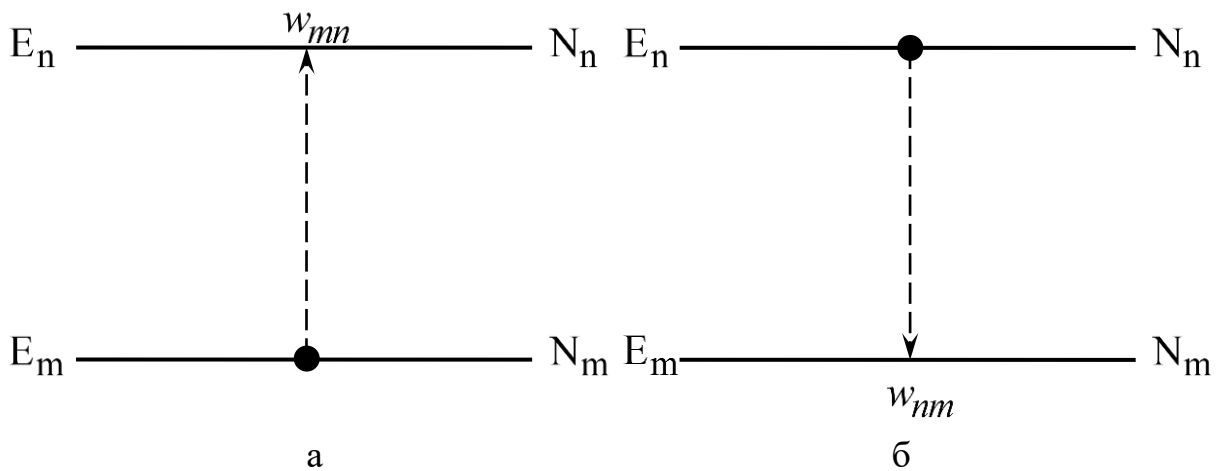


Рисунок 1.6 – Енергетична діаграма безвипромінювальних переходів з ймовірністю w_{mn} переходу з нижнього рівня на вищий (а), і з ймовірністю w_{nm} переходу з вищого рівня на нижчий (б)

Коли квантова частинка переходить із збудженого стану n внаслідок різних процесів (спонтанного, індукованого, безвипромінювального), що їх характеризують часи життя $\tau_1 = 1/A_{mn}$, $\tau_2 = 1/(B_{nm} \cdot \rho(\omega))$, $\tau_3 = 1/w_{nm}$ і ці процеси статистично незалежні, то згідно з теоремою про додавання ймовірностей середній час життя частинки в стані n є:

$$\frac{1}{\tau_n} = \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_3}. \quad (1.16)$$

У випадку теплової рівноваги розподіл частинок по рівнях підпорядкований законові Больцмана [0]:

$$\frac{N_n}{g_n} = \frac{N_m}{g_m} \cdot \exp\left(-\frac{E_n - E_m}{K \cdot T}\right), \quad (1.17)$$

де g_n і g_m – кратності виродження (статистичні ваги) рівнів n і m , K – стала Больцмана.

1.2 Квантові переходи під дією електромагнітного поля в дворівневій системі

Основним завданням теорії квантових переходів є визначення імовірності переходів у квантовій системі під дією зовнішніх полів. У більшості випадків збурення, яке діє на систему, можна вважати малим порівняно з її внутрішньою енергією. Завдяки цьому розв'язувати завдання можна з допомогою добре розроблених методів теорії збурення [0].

Коли квантові частинки взаємодіють із зовнішнім полем випромінювання, хвильова функція має задовольняти рівняння Шредінгера:

$$i \cdot \hbar \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} = (\hat{H}_0 + \hat{H}') \psi, \quad (1.18)$$

де \hat{H}_0 і \hat{H}' – гамільтоніани відповідно незбуреної системи і збурення.

Для найпростішої квантової частинки (атома), яка складається з ядра, що має ефективний потенціал V_n електрона масою m_e та заряду e ,

$$\hat{H}_0 = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \nabla^2 + V_n \right), \quad (1.19)$$

де ∇^2 – оператор Лапласа.

У більшості задач квантової електроніки можна застосувати дипольне наближення для енергії взаємодії зарядів з електромагнітним полем напруженістю \vec{E} й частотою ω . Гамільтоніан збурення в цьому разі

$$\hat{H}' = -\hat{\vec{d}} \cdot \vec{E}. \quad (1.20)$$

Для одноелектронного атома оператор дипольного моменту $\hat{\vec{d}}$ дорівнює добуткові заряду електрона на радіус-вектор \vec{r} : $\hat{\vec{d}} = -e \cdot \vec{r}$. Напруженість поля

$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{i \cdot \omega \cdot t} + \vec{E}'_0 \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t}$. Розв'язок рівняння Шредінгера можна знайти у вигляді лінійної комбінації хвильових функцій незбуреного стану:

$$\psi = \sum_n a_n(t) \cdot \psi_{n0}(t). \quad (1.21)$$

Треба мати на увазі, що під час взаємодії частинки, які є складовими квантової системи, обмінюються енергією з полем випромінювання і їх енергетичний стан залежить від часу. А тому з'являється ймовірність знайти частинку чи декілька частинок в іншому стані, який відрізняється від початкового. Так, коли частинка до взаємодії із зовнішнім полем була в стані, який описує функція ψ_1 , а після взаємодії її стан описує функція ψ_2 , то це означає, що між станами стався перехід, а величина $|a_n(t)|^2$ є його імовірністю. Розв'язавши рівняння Шредінгера відносно величини $a_n(t)$, визначимо імовірність переходу між станами квантової системи під дією зовнішнього електромагнітного поля:

$$|a_n(t)|^2 = \left| \frac{\vec{d}_{mn} \vec{E}_0}{2h} \right|^2 \cdot \left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2} \cdot (\omega_{mn} - \omega) \cdot t\right)}{\frac{1}{2} \cdot (\omega_{mn} - \omega)} \right)^2, \quad (1.22)$$

де \vec{d}_{mn} – матричний елемент дипольного моменту.

Для електродипольних переходів $d_{mn} \approx 10^{-18}$ СГС ≈ 1 Д. У випадку магнітодипольних переходів у виразі для $|a_n(t)|^2$ слід замінити електричне поле \vec{E}_0 магнітним \vec{H}_0 , а \vec{d}_{mn} – матричним елементом магнітного моменту $\vec{\mu}_{mn}$, який чисельно дорівнює приблизно 10^{-20} СГС.

Як впливає з виразу для $|a_n(t)|^2$, залежність ймовірності переходу від частоти зовнішнього поля має резонансний характер, який з часом позначається дедалі більше. Ймовірність переходу за одиницю часу (швидкість переходу) визначається виразом:

$$W_{mn} = \frac{|a_n(t)|^2}{t} = \frac{2 \cdot \pi}{\vec{d}_{mn}} \cdot \vec{E}_0 \cdot |2 \cdot \hbar|^2 \cdot \delta(\omega_{mn} - \omega). \quad (1.23)$$

Коефіцієнти Ейнштейна:

- для вимушених переходів у дипольному наближенні

$$B_{mn} = \frac{2 \cdot \pi}{3 \cdot h^2} \cdot |d_{mn}|^2 = B_{nm}; \quad (1.24)$$

- для спонтанного випромінювання

$$A_{nm} = \frac{4 \cdot \omega_{nm}^3}{3 \cdot \hbar \cdot c^3} \cdot |d_{mn}|^2. \quad (1.25)$$

Отже, коефіцієнти Ейнштейна пов'язані квантовомеханічною характеристикою переходу і матричним елементом дипольного моменту [3].

1.3 Підсилення за допомогою квантових систем

У стані термодинамічної рівноваги нижчерозташовані рівні в квантовій системі мають населеність більшу, ніж вищерозташовані, отже, запас внутрішньої енергії системи мінімальний. На рис. 1.7 зображено розподіл населеностей у дворівневій системі, яка перебуває в тепловій рівновазі (суцільна лінія).

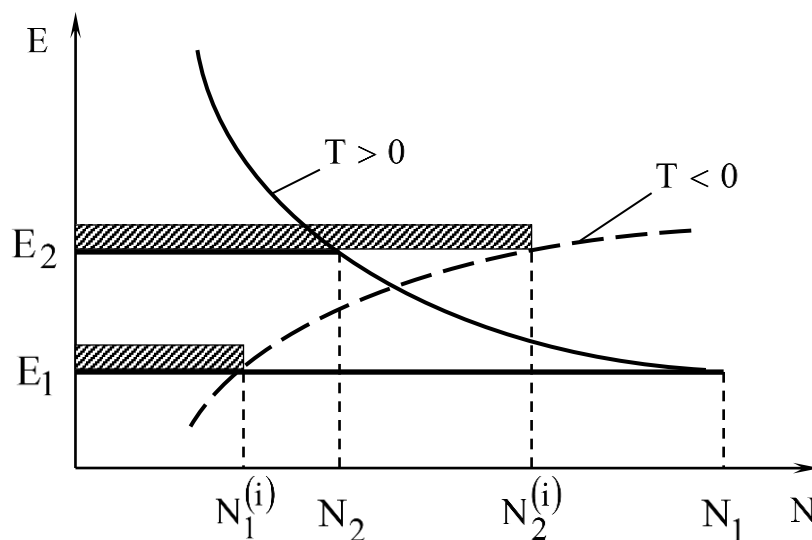


Рисунок 1.7 – Розподіл населеностей у дворівневій системі, яка перебуває у тепловій рівновазі

У випадку порушення термодинамічної рівноваги населеність верхнього рівня збільшується, а нижнього – зменшується. Стан квантової системи, коли населеність верхнього енергетичного рівня перевищує населеність нижнього, називають інверсною населеністю (пунктирна лінія на рис. 1.7).

Квантова система, в якій інверсну населеність створено між рівнями E_2 та E_1 , здатна підсилювати електромагнітне випромінювання з частотою $\omega_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar$.

Інверсія населеностей необхідна, але недостатня умова для одержання підсилення в середовищі. Достатньою умовою буде перевищення підсилення, досягнутого за рахунок процесу вимушеного випромінювання, над усіма можливими втратами. Якщо частота переходу ω_{21} лежить в оптичному діапазоні, підсилувач називають лазерним, якщо в НВЧ діапазоні – мазерним.

Важливою характеристикою нерівноважного стану є від’ємна температура. Це поняття можна ввести в межах системи двох рівнів з використанням розподілу Больцмана. Температура, подана через відношення населеностей рівнів [0],

$$T = -\frac{E_2 - E_1}{K \cdot \ln \left(\left(\frac{N_2}{g_2} \right) / \left(\frac{N_1}{g_1} \right) \right)}. \quad (1.26)$$

Якщо внаслідок зовнішньої дії частинки в квантовій системі перерозподіляються так, що $N_2 > N_1$, то цьому стану відповідає негативне значення температури.

Поняття «температура середовища» й «від’ємна температура» дуже відрізняються одне від одного. Термін «від’ємна температура» еквівалентний термінові «інверсна населеність» і має той самий зміст: населеність верхнього рівня більша, ніж населеність нижнього.

У квантовій електроніці широко використовують поняття «поперечний переріз» (поперечник) для процесів індукованого випромінювання і поглинання [0, 0]: $\sigma_{21}(\nu)$ – переріз індукованого випромінювання; $\sigma_{12}(\nu)$ – переріз індукованого поглинання. Поперечник вимушеного поглинання (або випромінювання) $\sigma_{12}(\nu)$ кванта з частотою ν вводять за допомогою співвідношення:

$$dW_{12} = \sigma_{12}(\nu) \cdot I(\nu) d\nu, \quad (1.27)$$

де dW_{12} – ймовірність індукованого переходу; $I(\nu) \cdot d\nu$ – кількість квантів в інтервалі частот ν , $\nu + d\nu$ які проходять крізь площинку завбільшки 1 м^2 за 1 с .

Інтегральний поперечник $\sigma = \int \sigma(\nu) d\nu$ для індукованого переходу з верхнього рівня на нижній, коли лінія має форму Лоренца,

$$\sigma_{21} = \frac{c^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot \nu_{21}^2 \cdot \Delta\nu \cdot n^2 \cdot \tau_{21}^{cn}}, \quad (1.28)$$

де $\Delta\nu$ – ширина лінії випромінювання; n – показник заломлення середовища; τ_{21}^{cn} – час спонтанного переходу з рівня 2 на рівень 1; c – швидкість світла.

Іншим параметром, який описує взаємодію випромінювання з речовиною, є коефіцієнт поглинання

$$\chi = \sigma_{21} \cdot (N_1 - N_2 \cdot g_1 / g_2). \quad (1.29)$$

У стані термодинамічної рівноваги $N_1 > N_2$ і коефіцієнт поглинання величина позитивна. Це означає, що під час проходження електромагнітної хвилі (випромінювання) крізь шар атомів завтовшки χ інтенсивність її зміниться від I_0 до I внаслідок взаємодії з атомами, молекулами чи іонами. Зміна інтенсивності підпорядковується закономірності $I = I_0 \cdot \exp(\chi \cdot x)$, що відомий як закон Бугера.

Коли $N_1 < N_2$, тобто коли у квантовій системі наявна інверсна населеність, коефіцієнт поглинання χ стає від'ємним, і інтенсивність електромагнітної хвилі, яка проходить через систему, збільшується.

Величина, обернена коефіцієнтові поглинання, називається коефіцієнтом підсилення: $\alpha = -\chi$. Закон Бугера для підсилення випромінювання виражається формулою

$$I(x) = I_0 \cdot e^{\alpha \cdot x}. \quad (1.30)$$

Таким чином, підсилювати й генерувати електромагнітні хвилі вимушеним (індукованим) випромінюванням можливо, коли створити квантове середовище з від'ємними втратами або, що те ж саме, з інверсною населеністю рівнів.

Коли населеності верхнього та нижнього рівнів однакові ($N_1 = N_2$, $T = \pm\infty$), у квантовій системі настає насичення, у випадку якого швидкість переходу частинок з нижнього рівня на верхній за рахунок поглинання квантів зовнішнього поля більша від швидкості процесів, що сприяють відновленню термодинамічної рівноваги. Насичення, яке зменшує коефіцієнт поглинання неінвертованих і коефіцієнт підсилення інвертованих систем, є тією нелінійністю, що обмежує інтенсивність генерації лазерів.

Інтенсивність насичення I_S , яка є параметром, що залежить від властивостей квантової системи й частоти падаючої хвилі, з перерізом поглинання σ пов'язує співвідношення $[0, 0]$:

$$I_S = \frac{h \cdot \nu}{2 \cdot \sigma \cdot \tau}. \quad (1.31)$$

1.4 Форма і ширина спектральної лінії

Розглядаючи процеси поглинання й випромінювання енергії в квантових системах, часто припускають, що енергетичні рівні атомів, іонів чи молекул твердо визначені, а зовнішнє поле некогерентне, немонахроматичне й займає деякий діапазон частот $\Delta\omega$. Проте рівні енергії квантових частинок не нескінченно тонкі, а мають певну ширину.

Ширину лінії випромінювання можуть зумовлювати різні причини. Одна з них полягає в тому, що час життя частинки в збудженому стані скінченний. Якщо час життя частинки на верхньому рівні становить τ , то згідно із співвідношенням невизначеностей останній має ширину $\Delta E \approx \hbar/\tau$. Оскільки енергія стану не є суворо фіксованою й займає деяку ділянку ΔE , це спричинює певний розподіл інтенсивностей поглинання й випромінювання чи поглинання. Типову форму лінії випромінювання зображено на рис. 1.8.

Форма лінії змінюватиметься залежно від фізичних процесів, які відбуваються в квантовій системі. Лінії різної форми можна спостерігати як у випромінюванні, так і у поглинанні в твердих тілах, рідинах та газах.

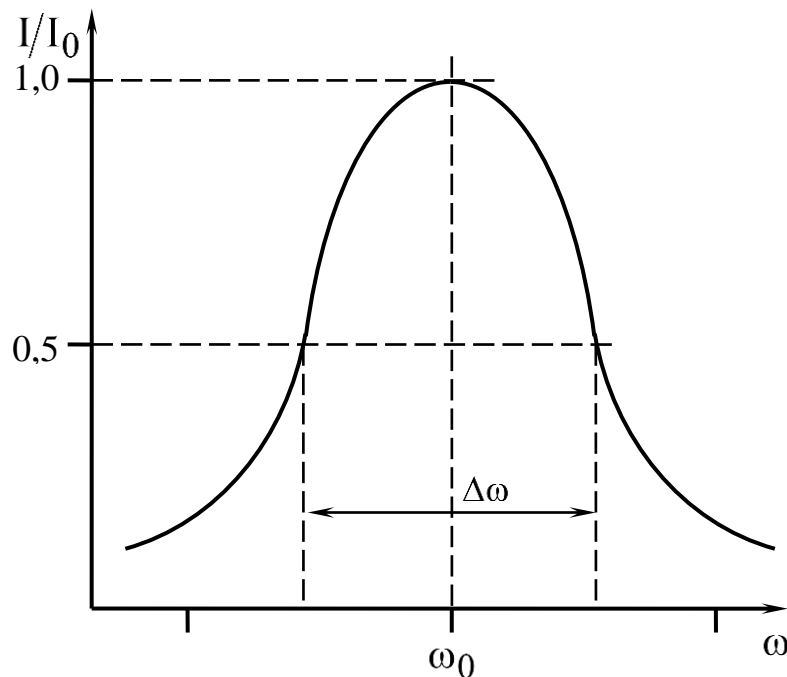


Рисунок 1.8 – Типова форма лінії випромінювання

Однією з важливих характеристик форми лінії є її ширина, яку визначає інтервал частот $\Delta\omega$ біля центра лінії, на краях якого інтенсивність поглинання (чи випромінювання) спадає вдвічі порівняно з центром лінії. Ширину лінії, яку визначає спонтанний час життя квантової частинки, називають радіаційною, або природною, шириною. Природна ширина лінії – це та межа, меншою за яку спектральна лінія бути не може. Час життя частинки у збудженому стані залежний від ймовірності спонтанного переходу, пов'язує співвідношення

$\tau_{cn} = \frac{1}{A_{nm}}$, тому $\Delta E = \hbar \cdot A_{nm}$. Ширина лінії на рівні 0,5 від максимуму (див. рис. 1.8) $\Delta\omega = A_{nm}$, отже, чим більша ймовірність спонтанного переходу, тим більша природна ширина лінії. Оскільки $A_{nm} \approx \omega_{nm}^3$, то в радіодіапазоні природна ширина лінії істотно менша, аніж в оптичному.

Скінченність часу життя частинки на енергетичному рівні можна розрахувати під час розв'язку рівняння Шредінгера, ввівши множник γ_n , який описує загасання хвильової функції ψ , заданої у вигляді ряду:

$$\psi = \sum_n a_n(t) \cdot \psi_{n0}(t) \cdot \exp\left(-\frac{\gamma_n \cdot t}{2}\right). \quad (1.32)$$

Тоді ймовірність переходу частинки з рівня n на рівень m [0] є:

$$P_{nm} = \left| \frac{\bar{d}_{nm} \cdot \bar{E}_0}{2 \cdot \hbar} \right|^2 \cdot \frac{1}{(\omega - \omega_{nm})^2 + (\gamma_n/2 + \gamma_m/2)^2}. \quad (1.33)$$

Позначивши $\omega - \omega_{nm} = \Delta\omega$, $\gamma_n + \gamma_m = \gamma$. З урахуванням нормувального коефіцієнта, який дорівнює $\gamma/(2 \cdot \pi)$, множник, що його містить вираз для імовірності переходу P_{nm} , запишеться так:

$$g_L(\omega) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\gamma}{(\omega - \omega_{nm})^2 + \gamma^2/4}. \quad (1.34)$$

Він визначає форму лінії випромінювання (поглинання), пов'язану із скінченним часом життя частинки на рівні й названу формою Лоренца (рис. 1.9).

Контур лінії спонтанного випромінювання має форму Лоренца завширшки $\Delta\omega_{cn} = 1/\tau_{cn}$, симетричну відносно ω_{nm} . Здебільшого реальна ширина лінії значно перевищує природну внаслідок різних процесів у газах, рідинах та твердих тілах.

Час життя частинок на верхньому енергетичному рівні може зменшуватися за рахунок їх співударяння одна з одною, з вільними електронами, із стінками посудини. Форму спектральної лінії, розширеної внаслідок співударінь, описуватиме функція Лоренца, як і у випадку природної ширини.

Тепловий рух частинок у газі спричинює розширення лінії, пов'язане з ефектом Доплера. Під час теплового руху швидкість частинки \vec{v} та напрям її руху будуть різними, тому в спектрі випромінювання чи поглинання з'явиться

сукупність частот, що її визначає доплерівський зсув частот $\nu - \nu_0 = \pm \nu_0 \cdot \mathcal{G}/c$. У цьому разі за умови термодинамічної рівноваги форму спектральної лінії описує функція Гаусса [0 – 0].

$$g_c(\nu) = \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\Delta \nu_D} \cdot \exp\left[-(\nu - \nu_0)^2 \cdot \ln 2 / \Delta \nu_D^2\right], \quad (1.35)$$

тому вона називається лінією Гаусса, а ширина спектральної лінії, зумовлена ефектом Доплера, з урахуванням максвеллівського розподілу частинок за швидкостями на рівні 0,5 [0, 0]

$$\Delta \nu_D = \frac{2 \cdot \nu_0}{c} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot K \cdot T \cdot \ln 2}{M}}, \quad (1.36)$$

де T – температура; M – маса частинки.

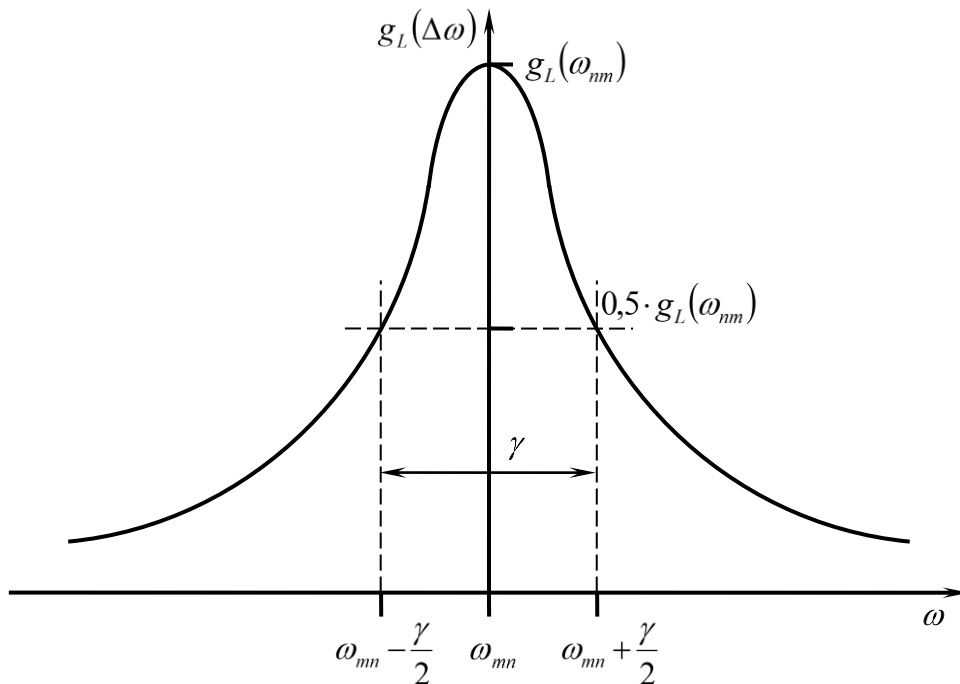


Рисунок 1.9 – Форма лінії, пов’язана зі скінченністю часу життя випромінювання

Лінія, форму якої визначає функція Гаусса, називається доплерівськи розширеною: вона симетрична відносно центральної частоти $\Delta \omega$ (рис. 1.10).

Порівнюючи лінії Гаусса й Лоренца, які нормовані на одиницю й мають однакову ширину на половині висоти (рис. 1.10 – відрізок $\Delta \omega$ на осі абсцис), бачимо, що лінія Гаусса має вищий максимум і не так виявлені крила. Отже, конкретний механізм розширення помітно позначається лише на крилах лінії. Таким чином, ширина спектральної лінії атома (молекули, іона) речовини, яка перебуває в газовому стані, залежить від таких факторів [0]: природної ширини;

співударянь атомів з однорідними й неоднорідними атомами, з електронами та іонами, із стінками посудини, в якій міститься газ; ефекту Доплера.

У квантових приладах поряд з газовими середовищами використовують тверді матеріали (різні кристали і скло), в які вкраплено парамагнітні іони-активатори, наприклад, кристали рубіна ($Al_2O_3:Cr^{3+}$), ітрієво-алюмінієвого гранату ($Y_3Al_5O_{12}:Nd^{3+}$), скла, активовані Nd^{3+} тощо.

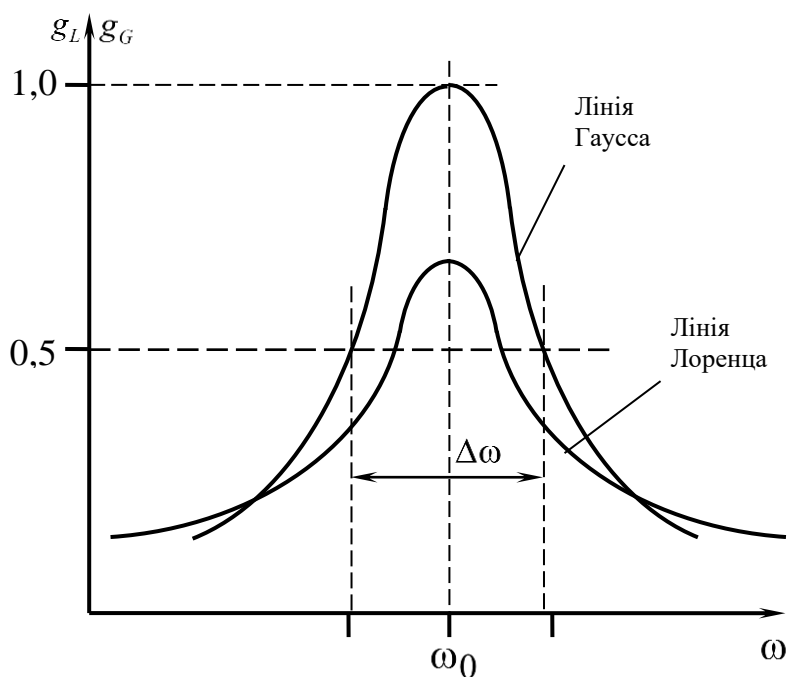


Рисунок 1.10 – Типова форма доплерівськи розширеної лінії випромінювання

Енергетичні рівні в твердому тілі через цілу низку причин мають більшу ширину: природна ширина спектральної лінії змінюється від десятих часток нанометра в кристалах до кількох нанометрів у стеклах. Проте глибокі рівні енергії зазнають невеликого збурення, тому їхній спектр схожий на спектр ізольованого іона.

На ширину спектральної лінії та її положення впливають $[0, 0]$: взаємодія іонів-активаторів з електромагнітним полем кристалічних ґраток; неоднорідності середовища, зумовлені дефектом кристалічних ґраток (особливо в стеклах); теплові коливання кристалічних ґраток матриці; магнітна дія іонів активатора на його енергетичні рівні тощо.

Коли розширення лінії відносно фіксованої частоти ω_{nm} відбувається за рахунок процесів, які обмежують час життя збудженого стану (спонтанні переходи, переходи, спричинені всілякими зіткненнями), то воно називається однорідним. У випадку однорідного розширення форма лінії описує

спектральні характеристики кожної частинки і всієї системи частинок загалом (рис. 1.11).

Є процеси, які зумовлюють розкид частот переходів в атомній системі. Розширення, яке виникає з цієї причини, називають неоднорідним. Прикладом може бути змінний у просторі внаслідок неоднорідностей ефект Штарка в твердих тілах чи ефект Доплера в газах, спричинений максвеллівським розподілом швидкостей частинок газу (див. рис. 1.10).

Згортання двох функцій, які описують лінії Лоренца завширшки $\Delta\omega_1$ та $\Delta\omega_2$, знову призведе до лінії Лоренца завширшки $\Delta\omega = \Delta\omega_1 + \Delta\omega_2$. Згортання двох ліній Гаусса, одна з яких має ширину, $\Delta\omega_1$, а друга – $\Delta\omega_2$, дає лінію Гаусса завширшки $\Delta\omega = \sqrt{\Delta\omega_1^2 + \Delta\omega_2^2}$. У загальному випадку повну ширину лінії випромінювання (поглинання) визначають усі механізми розширення. Розглядаючи конкретні квантові системи, можна обмежитися одним із зазначених механізмів.

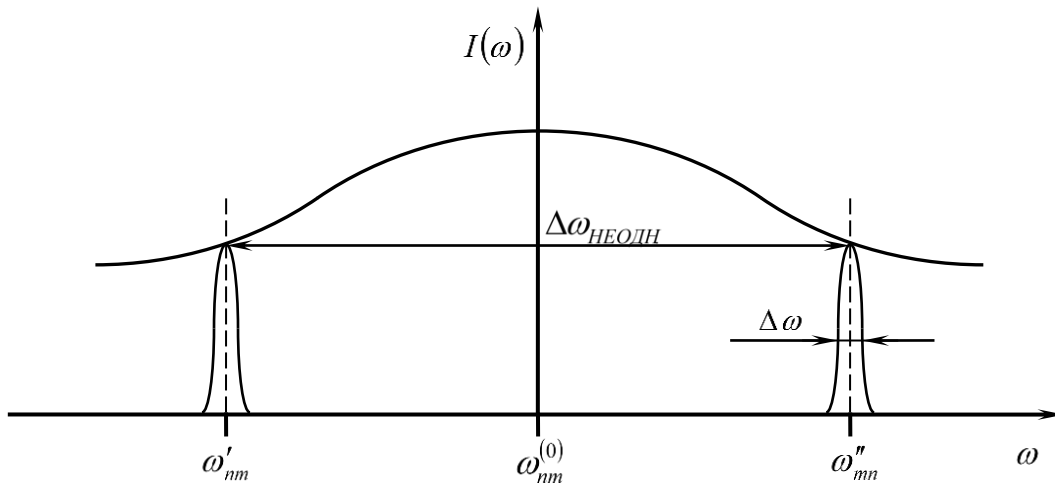


Рисунок 1.11 – Спектральні характеристики кожної частинки, що належать до системи частинок і всієї системи загалом

Під час вивчення взаємодії випромінювання з квантовою системою, яке має скінченну ширину енергетичних рівнів, доцільно використати не інтегральні, а спектральні коефіцієнти Ейнштейна $A_{nm}(\omega)$, $B_{nm}(\omega)$, $B_{mn}(\omega)$. Коефіцієнти $A_{nm}(\omega)$, $\rho(\omega) \cdot B_{nm}(\omega)$, $\rho(\omega) \cdot B_{mn}(\omega)$ визначають відповідно імовірності спонтанних та індукованих переходів за одиницю часу в одиничному інтервалі частот. Спектральні та інтегральні коефіцієнти пов'язуються співвідношеннями:

$$A_{nm} = \int_0^{\infty} A_{nm}(\omega) d\omega, \quad B_{nm} = \int_0^{\infty} B_{nm}(\omega) d\omega, \quad B_{mn} = \int_0^{\infty} B_{mn}(\omega) d\omega. \quad (1.37)$$

Відомо, що будь-який нерівноважний розподіл частинок за станами в квантовій системі, коли немає зовнішньої дії, самовільно змінюватиметься доти, доки не зробиться рівноважним. Процеси, які переводять систему в рівноважний стан, називаються релаксаційними, наприклад, «спін-граткова» й «спін-спінова» релаксації.

Термодинамічна рівновага в системі, яка може перебувати в одному з двох станів з енергіями E_m та E_n і населеностями відповідно N_m та N_n , може наставати внаслідок спонтанного випромінювання, взаємодії атомів (молекул) з гратками в твердому тілі або непружного зіткнення частинок одна з одною в газі чи в рідині. Такі релаксаційні процеси називаються повздовжніми. Час T_1 , протягом якого змінюється стан системи, називають часом спін-граткової чи диполь-граткової релаксації.

До рівноважного стану квантова система може повернутися під час спін-спінової взаємодії, яка внаслідок взаємного збурювального впливу частинок розфазовує рух окремих спінів. Час T_2 , протягом якого розфазовуються магнітні моменти частинок системи, називають часом спін-спінової, або поперечної, релаксації.

Отже, спін-граткова й спін-спінова релаксації спричиняють у системі квантових частинок рівновагу, яку визначають часи T_1 і T_2 . Оскільки обмін енергією між системою частинок і гратками автоматично спричинює розфазовування моменту окремих частинок, то в твердих тілах $T_2 \gg T_1$. У рідинах і особливо в газах величини T_1 і T_2 наближаються одна до одної.

1.5 Характеристики лазерного випромінювання

1.5.1 Монохроматичність

Одна з важливих характеристик випромінювання – ширина спектра, тобто інтервал частот чи довжин хвиль, який займає випромінювання. Щоб оцінити монохроматичність останнього, запровадили поняття ступеня монохроматичності.

Монохроматичність лазерного випромінювання, яка характеризує здатність лазерів випромінювати у вузькому діапазоні довжин хвиль чи частот, визначає величина $\Delta\nu/\nu_c$. Як відомо, контур лінії підсилення активного середовища, що збігається з контуром лінії випромінювання, має ширину $\Delta\nu_\Sigma$. Отже, в межах лінії підсилення вміщується одна чи більше власних частот резонатора, які задовольняють співвідношення $L_p = (Q \cdot \lambda)/2$ (Q – ціле число і в реальних умовах досить велике) і віддалені одна від одної на $\Delta\nu_p = c/(2 \cdot L_p)$, де c – швидкість світла, L_p – довжина резонатора.

У резонаторі можуть виникати коливання з будь-якою його власною частотою ν_p , для якої коефіцієнт підсилення G перевищує всі можливі сумарні втрати β_Σ . Коли число, що задовольняє цю умову повздовжніх мод, невелике

(рис. 1.12, а), то генерування розвивається на одній чи кількох частотах, яким відповідає максимальне значення коефіцієнта підсилення $G(\nu)$. Коли кількість мод, збуджуваних у резонаторі, велика, то генерування розвивається на великому числі довжин хвиль і спектр лазерного випромінювання є пунктирною лінією, яка огинає піки випромінювання, які відповідають різним модам (рис. 1.12, б).

У табл. 1.1 наведено дані для деяких лазерів, у яких досягнуто одномодового режиму генерування [0].

Умова одномодового режиму генерування $\Delta\nu_p \geq \Delta\nu_\Sigma$ виконується за малих $\Delta\nu_\Sigma$ і малої довжини резонаторів. Зменшувати останню не завжди доцільно, оскільки це може призвести до зриву генерування і зменшення потужності випромінювання. Тому у випадках, коли в межах контуру підсилення розташовано кілька власних частот, кількість генерованих лазером ліній можна зменшити, використавши тридзеркальний резонатор або у більш загальному випадку багатодзеркальний – кільцевий резонатор [0].

Оскільки лазер має працювати на частотах, які є власними частотами одночасно для двох резонаторів L_1 , і L_2 , то кількість ліній генерування істотно скорочується і генерування випромінювання на одній повздовжній моді можливе навіть у випадку твердотілих лазерів. Повна потужність лазера в цьому разі залишається високою [0, 0].

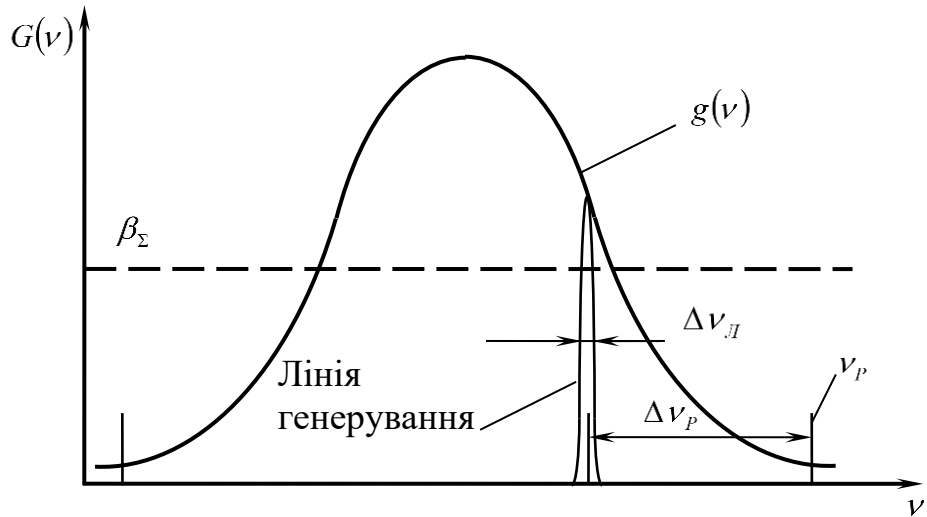
Таблиця 1.1

Активне середовище	Довжина хвилі випромінювання λ , мкм	Ширина лінії підсилення $\Delta\nu_L$, МГц	Довжина резонатора L , см	Кількість мод усередині лінії підсилення
Суміш гелію та неону – $He - Ne$	0,63	170	100	10
Вуглекислий газ – CO_2 (за низького тиску 30 торр)	10,6	300	100	60
Аргон Ar	0,49...0,51	3500	100	20
Рубін – $Al_2O_3 : Nd^{3+}$ (за кімнатної температури)	0,69	$3 \cdot 10^5$	10	200
Скло з неодимом – Nd	1,06	$6 \cdot 10^6$	10	$4 \cdot 10^3$

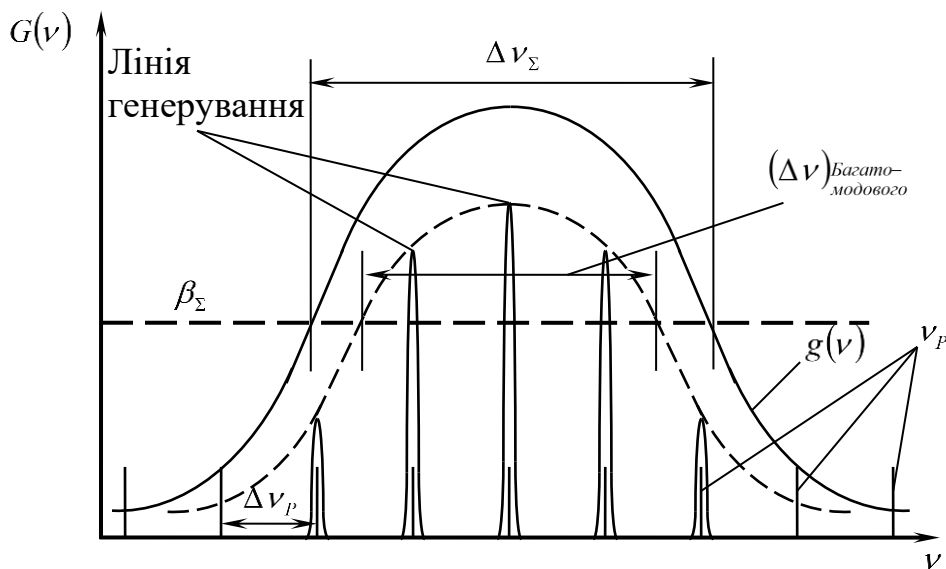
В одномодовому режимі генерування спектральна ширина випромінюваної лінії набагато вужча, ніж ширина контуру лінії підсилення, і залежить від спектральних характеристик резонатора.

Розкид частот, збуджуваних у резонаторі коливань, залежить від його добротності Q , яку визначають так:

$$Q = 2 \cdot \pi \cdot \nu_0 \cdot \frac{\text{запасена енергія резонатора}}{\text{енергія, втрачена за 1 с}}. \quad (1.38)$$



а



б

Рисунок 1.12 – Профіль лінії підсилення $G(\nu)$ і частотний спектр випромінювання лазера в одномодовому (а) та багатомодовому (б) режимах генерування

Коли врахувати, що в оптичному резонаторі втрати енергії за одне проходження становлять β_{Σ} , а тривалість останнього $2 \cdot L/c$, то добротність резонатора

$$Q = \frac{2 \cdot \pi \cdot \nu_0 \cdot L}{\beta_{\Sigma} \cdot c} = \frac{\nu_0}{\Delta \nu_P}. \quad (1.39)$$

Якщо порівняти вираз (1.39) з роздільною здатністю інтерферометра Фабрі-Перо [0, 0]:

$$R = \frac{\lambda}{\sigma \lambda} = \frac{2 \cdot \pi \cdot L \cdot \sqrt{r} \cdot \cos(i)}{\nu \cdot (1 - R)}, \quad (1.40)$$

де r – коефіцієнт відбиття від дзеркал; i – кут між віссю та напрямом на інтерференційний максимум, то за малих дифракційних втрат добротність резонатора наближено дорівнює роздільній здатності використовуваного як резонатор інтерферометра.

Ширина певної лінії вихідного випромінювання лазера не може перевищувати резонансний пік інтерферометра, тобто величину

$$\Delta \nu_P = \frac{\nu}{Q} = \frac{\beta_{\Sigma} \cdot c}{2 \cdot \pi \cdot L}. \quad (1.41)$$

Коли дифракційні втрати малі, величина $\beta_{\Sigma} \approx 1 - r$ досягає значення 0,01. Тоді для інтерферометра метрової довжини ширина резонансного піка

$$\Delta \nu_P = \left(0,01 \cdot 10^{10}\right) / \left(2 \cdot \pi \cdot 10^2\right) \approx 0,5, \text{ Гц.}$$

Оскільки природна ширина лінії, наприклад, для атома неона, наближено становить 16 МГц, то навіть коли б спектральна лінія випромінювання дорівнювала ширині піка інтерферометра, вона була б атомною лінією робочого переходу.

У реальному лазері резонатор заповнено активним середовищем. Коли умови генерування виконуються, то внутрішньорезонаторні втрати і втрати когерентного випромінювання крізь вихідне вікно резонатора безперервно поповнюються. Отже, резонансні явища спричиняють куди більше звуження лінії випромінювання. Коли врахувати, що найбільше підсилення наявне в центрі резонансного піка, то спектральна лінія випромінювання розташується в цьому центрі (рис. 1.13) і матиме теоретичну ширину [0]

$$\Delta \nu_{\lambda} = \frac{8 \cdot \pi \cdot h \cdot \nu \cdot \Delta \nu_P^2}{P}, \quad (1.42)$$

де P – повна потужність, що її випромінює лазер на даній лінії.

Наприклад, для CO_2 лазера, коли $L=10^2$ см, $P=1$ кВт, $\beta_\Sigma=0,5$, $\Delta\nu_p=1,5\cdot 10^7$ Гц, а $\Delta\nu_\lambda=2\cdot 10^{-8}$ Гц.

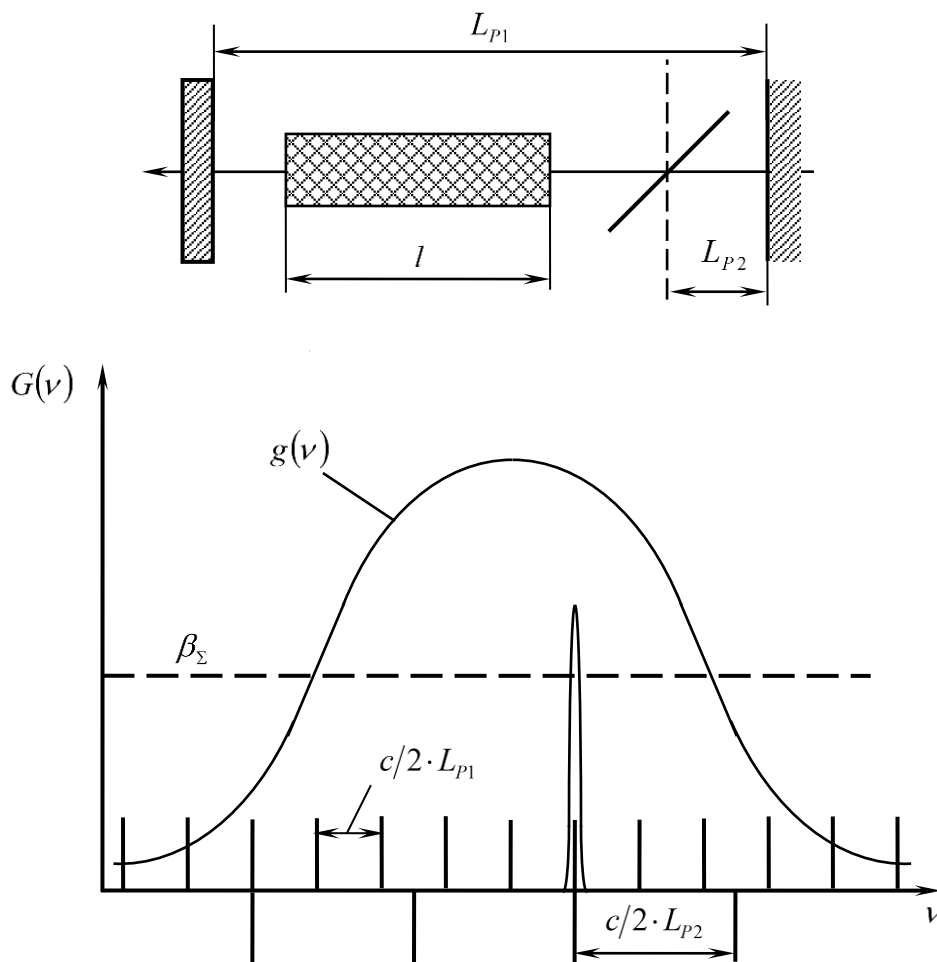


Рисунок 1.13 – Зменшення кількості ліній генерування за допомогою тридзеркального резонатора

Отже, теоретична ширина лінії випромінювання $\Delta\nu_\lambda$ надзвичайно мала. Вона, як бачимо з наведеного прикладу, на кілька порядків менша, ніж природна ширина лінії робочої частинки (молекули CO_2). Це можна пояснити тим, що природну ширину лінії визначає спонтанний перехід, а спектральна лінія лазера – це наслідок вимушеного резонансного процесу.

У реальних умовах одержаного значення $\Delta\nu_\lambda$ не досягають через неоднорідності робочого середовища, механічні нестабільності резонаторів і недосконалість їх оптичних елементів. Завдяки використанню матеріалів з малим коефіцієнтом теплового розширення, ізоляції від механічних та акустичних впливів, стабілізації джерел живлення, ретельній стабілізації температури, можна створити лазери з короткочасовою шириною спектра

одномодового випромінювання до 1 кГц. Проте навіть реально досяжні значення $\Delta\nu_\lambda \approx 10^3 \dots 10^4$ Гц при $\nu_0 \approx 10^{13} \dots 10^{15}$ Гц відповідають ступеневі монохроматичності $10^{-9} \dots 10^{-12}$, чого не можна досягти для інших спектральних джерел.

Таким чином, одна з відмінностей лазерів від звичайних джерел світла полягає в тому, що у перших випромінювана потужність зосереджена в одній чи в кількох надзвичайно вузьких спектральних лініях, а в інших – вона розподілена в широкому спектральному діапазоні. Це спричинює винятково велику спектральну інтенсивність густини енергії лазерів.

Монохроматичність випромінювання – важлива характеристика. Монохроматичне випромінювання використовують під час розв'язку таких задач [0]:

- дослідження властивостей атмосфери, зокрема визначення монохроматичних коефіцієнтів поглинання й розсіювання;
- спектральний аналіз за спектрами поглинання, що містить аналіз структури й визначення концентрації поглинання речовини;
- аналіз спектрів поглинання, мета якого – вивчити будову поглинальних центрів і природу процесу поглинання;
- вивчення явищ фотолюмінесценції й фотоефекту, зокрема визначення спектральної залежності виходу цих процесів;
- вивчення фотохімічних явищ;
- вивчення густини плазми;
- керування хімічними реакціями;
- збільшення завадозахищеності системи приймання випромінювання за рахунок застосування вузькосмугових оптичних фільтрів, відповідних просвітлювальних покриттів і приймачів.

Монохроматичність тісно пов'язана з іншою важливою властивістю лазерного випромінювання – когерентністю.

1.5.2 Когерентність

Когерентність випромінювання лазера – одна з основних, коли не основна, його властивість.

Під когерентністю розуміють кореляцію (зв'язок) характеристик поля (амплітуди, частоти, фази), які розглядаються у різних точках простору в різні моменти часу. Математично цей зв'язок описує кореляційна функція.

Ідеально когерентного випромінювання не буває. Тому кажуть про ступінь його когерентності, тобто про те, якою мірою воно наближається до когерентного.

Для електромагнітної хвилі можна визначити два незалежних поняття: просторову й часову когерентності. Просторова когерентність – це кореляція фаз електромагнітних хвиль, випромінених з двох різних точок одного джерела (або двома просторово відокремленими джерелами) в один і той самий момент часу, а часова – це кореляція фаз електромагнітних хвиль у заданій точці простору в різні моменти часу.

Когерентність обох типів можна описати відповідними кореляційними функціями й експериментально визначити за інтерференційною картиною.

Щоб виявити кореляцію коливань у двох довільних точках P_1 і P_2 хвильового поля (рис. 1.14), зазвичай розглядають інтерференційну картину, створювану в деякій довільній точці Q випромінюванням, яке виходить з точок P_1 і P_2 , котрі вважаються центрами вторинних збурень (згідно з принципом Гюйгенса). Поле, випромінюване в точці Q , аналітично визначається хвильовою функцією $\Psi(\vec{r}, t)$.

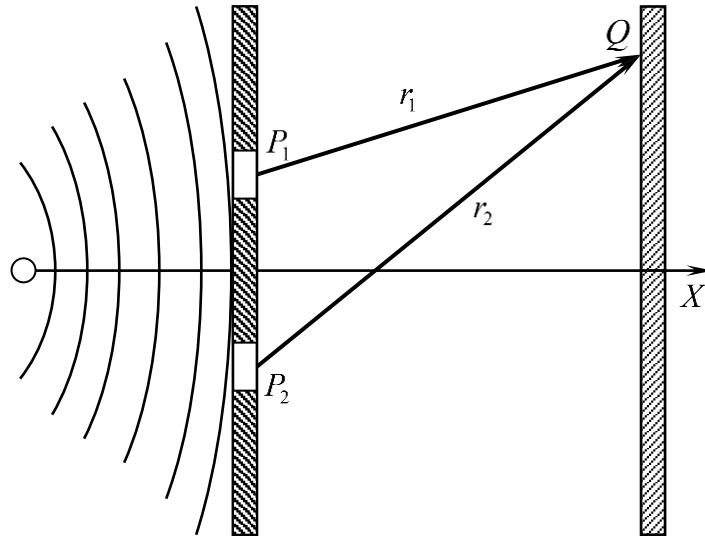


Рисунок 1.14 – До визначення ступеня когерентності випромінювання

Оскільки лазерне випромінювання задовольняє умову $\Delta\omega_0/\omega_0 \leq 1$, де $\Delta\omega_0$ – ширина спектра випромінювання; ω_0 – центральна частота спектра, і має високий ступінь монохроматичності, то його можна охарактеризувати функцією [0]

$$V(\vec{r}, t) = A(\vec{r}, t) \cdot \exp[i \cdot (\omega_0 \cdot t + \varphi(\vec{r}, t))], \quad (1.43)$$

де $V(\vec{r}, t)$ – скалярна величина, яка може означати проекцію напруженості електричного $E(\vec{r}, t)$ чи магнітного $H(\vec{r}, t)$ поля; $A(\vec{r}, t)$ – амплітуда хвилі; $\varphi(\vec{r}, t)$ – фаза хвилі, що набігає додатково до фази $\omega_0 \cdot t$.

Кореляційна функція першого порядку, яка визначає кореляцію (зв'язок) між фазами коливань в один і той самий момент часу в двох різних точках хвильового поля P_1 і P_2 (просторова когерентність) [0],

$$\Gamma_{12}^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, 0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} V(\vec{r}_1, t) \cdot V^*(\vec{r}_2, t) dt = \langle V(\vec{r}_1, t) \cdot V(\vec{r}_2, t) \rangle. \quad (1.44)$$

Нормуючи $\Gamma_{12}^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, 0)$, отримуємо комплексний ступінь і коефіцієнт когерентності

$$\gamma_{12}^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, 0) = \frac{\Gamma_{12}^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, 0)}{\sqrt{\Gamma_{11}^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, 0) \cdot \Gamma_{22}^{(1)}(\vec{r}_2, \vec{r}_2, 0)}} = \frac{\Gamma_{12}^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, 0)}{\sqrt{\langle I(\vec{r}_1) \rangle \cdot \langle I(\vec{r}_2) \rangle}}. \quad (1.45)$$

де

$$\Gamma_{11}^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, 0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \int_{-T}^{+T} V(\vec{r}_1, t) \cdot V^*(\vec{r}_1, t) dt;$$

аналогічно для $\Gamma_{22}^{(1)}(\vec{r}_2, \vec{r}_2, 0)$; $I(\vec{r}, t)$ – інтенсивність пучка,

$$I(\vec{r}, t) = V(\vec{r}, t) \cdot V^*(\vec{r}, t).$$

Модуль функції $\gamma_{12}^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, 0)$ визначає ступінь просторової когерентності.

Функції $\Gamma_{11}^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, t)$ і $\gamma_{11}^{(1)}(\tau)$, які характеризують міру кореляції між сигналами в одній і тій самій точці простору для двох моментів часу, відокремлених інтервалом τ (часова когерентність), мають вигляд:

$$\Gamma_{11}^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot T} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} V(\vec{r}_1, t + \tau) \cdot V^*(\vec{r}_1, t) dt = \langle V(\vec{r}_1, t + \tau) \cdot V(\vec{r}_1, t) \rangle, \quad (1.46)$$

$$\gamma_{11}^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau) = \frac{\Gamma_{11}^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau)}{\langle V(\vec{r}_1, t) \cdot V^*(\vec{r}_1, t) \rangle} = \frac{\Gamma_{11}^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau)}{\langle I(\vec{r}_1, t) \rangle}. \quad (1.47)$$

Модуль функції $\gamma_{11}^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, \tau)$ визначає ступінь часової когерентності, який дорівнює $0 \leq |\gamma_{11}^{(1)}| \leq 1$.

Поняття часової й просторової когерентності можна об'єднати, запровадивши функцію взаємної когерентності

$$F^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau) = \langle V(\vec{r}_1, t + \tau) \cdot V(\vec{r}_2, t) \rangle \quad (1.48)$$

і нормовану функцію, яка їй відповідає,

$$\gamma^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau) = \frac{\Gamma^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau)}{\sqrt{\Gamma^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_1, 0) \cdot \Gamma^{(1)}(\vec{r}_2, \vec{r}_2, 0)}}. \quad (1.49)$$

Часто для опису когерентності випромінювання запроваджують поняття часу $\tau_{\text{ког}}$ і довжини $l_{\text{ког}}$ когерентності.

Як відомо, ширина спектра, що характеризує гармонічне коливання, пов'язана з часом існування останнього (рис. 1.15):

$$\Delta \nu_{\lambda} = \frac{1}{\Delta \tau}, \quad (1.50)$$

де $\Delta \nu_{\lambda}$ – ширина спектральної лінії; $\Delta \tau = \tau_{\text{ког}}$ – час когерентності, тобто відрізок часу, протягом якого коливання лишається гармонічним і, отже, може бути когерентним.

Можна зробити висновок, що протягом часу $\tau_{\text{ког}}$ і в межах відстані $l_{\text{ког}}$ випромінювання лазера «пам'ятатиме» про синхронність коливань на виході з резонатора. Характеристики $\tau_{\text{ког}}$ і $l_{\text{ког}}$ змінюються в широкому діапазоні: у газових лазерах, де $\Delta \nu_{\lambda} \approx 10^3 \dots 10^6$ Гц, вони можуть набувати значень відповідно $10^{-3} \dots 10^6$ і $10^4 \dots 10^7$ с. У твердотілих лазерах, які випромінюють велику кількість повздовжніх мод, $\Delta \nu_{\lambda}$ може досягати 10^{12} Гц, і тому $\tau_{\text{ког}} \approx 10^{-12}$ с, а $l_{\text{ког}} \approx 3 \cdot 10^{-2}$ см.

Час когерентності пов'язаний з довжиною останньої співвідношенням:

$$l_{\text{ког}} = c \cdot \tau_{\text{ког}}. \quad (1.51)$$

Ступінь взаємної когерентності можна експериментально оцінити за контрастом інтерференційної картини K :

$$K = \frac{I_{\text{max}} - I_{\text{min}}}{I_{\text{max}} + I_{\text{min}}},$$

де I_{min} та I_{max} – інтенсивності відповідно в мінімумі та максимумі інтерференційних смуг.

Ступінь взаємної когерентності можна експериментально оцінити за контрастом інтерференційної картини K :

$$K = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

де I_{\min} та I_{\max} – інтенсивності відповідно в мінімумі та максимумі інтерференційних смуг.

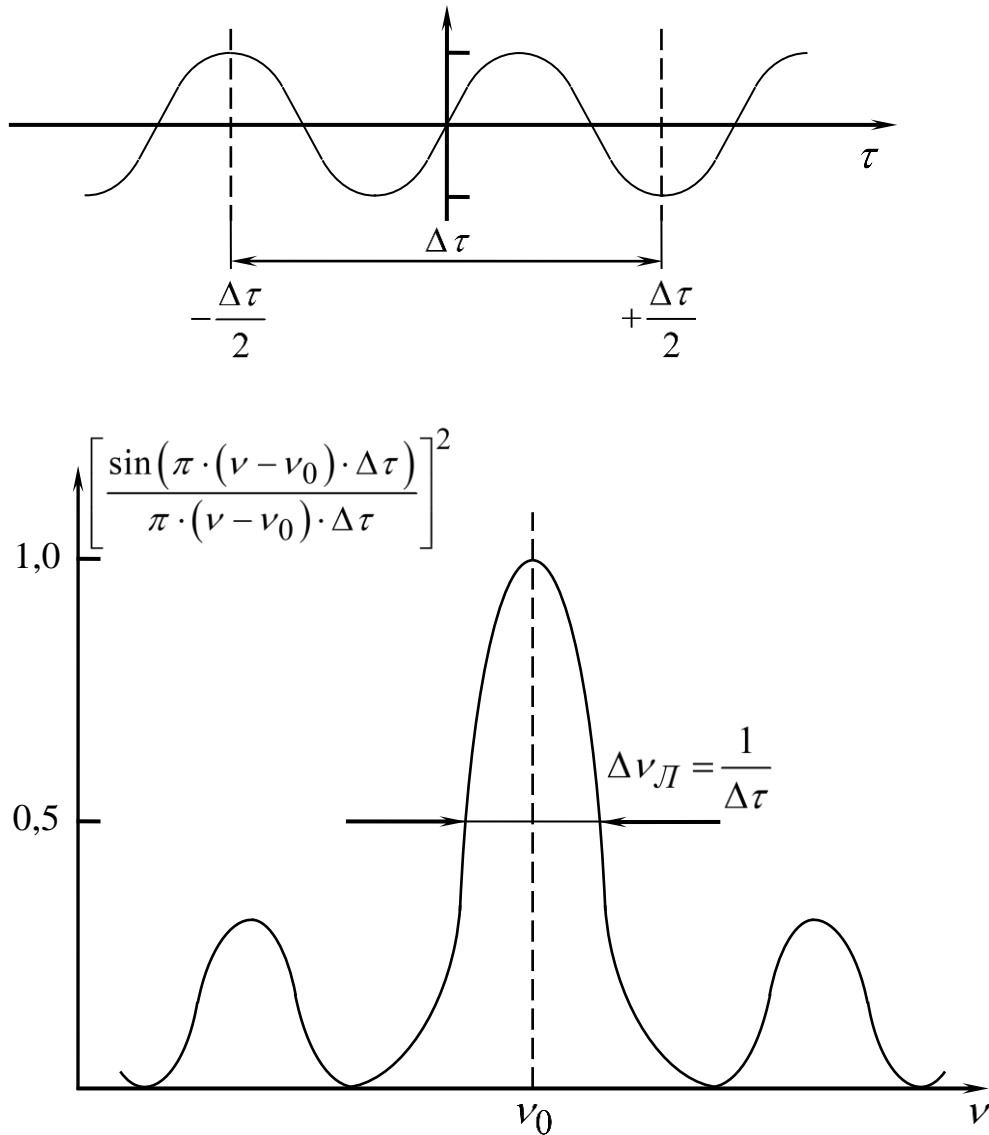


Рисунок 1.15 – До визначення поняття часу когерентності

Вимірявши інтенсивності, можна визначити функцію [1]

$$\left| \gamma_{12}^{(1)} \right| = \frac{K}{2} \cdot \left(\frac{I_1 + I_2}{\sqrt{I_1 \cdot I_2}} \right). \quad (1.52)$$

Коли $\left| \gamma_{12}^{(1)} \right| = 1$, хвилі повністю когерентні; коли $\left| \gamma_{12}^{(1)} \right| = 0$, хвилі некогерентні; коли $0 < \left| \gamma_{12}^{(1)} \right| < 1$, хвилі частково когерентні. Практично випромінювання вважають когерентним з високим ступенем, якщо $\left| \gamma_{12}^{(1)} \right| = 0,88$.

Ступінь когерентності та її часові й просторові характеристики вимірюють інтерферометрами: просторової – Юнга, часової – Майкельсона.

Часовою когерентністю випромінювання лазерів можна скористатись $[0, 0, 0]$:

- для передавання інформації на оптичних частотах;
- у дослідах, пов'язаних з інтерференцією: вимірювання відстаней, лінійних та кутових швидкостей з високою точністю; виявлення надзвичайно малих переміщень, дефектів поверхні тощо;
- для оптичного гетеродинування під час прийому когерентних оптичних сигналів;
- в еталонах частоти й часу.

Просторова когерентність обумовлює високу напрямленість лазерного пучка, який можна сфокусувати в пляму з дуже малими розмірами.

1.5.3 Направленість

Лазери характеризує напрямленість випромінювання, яка визначає розбіжність світлового пучка в просторі і яку оцінюють плоским чи тілесним кутом, де поширюється більша частина випромінювання.

Вивчаючи розбіжність лазерного випромінювання, важливо з'ясувати два питання: якої мінімальної кутової розбіжності пучка можна досягти і за яких умов її вимірювання можна отримати однозначні результати. Для цього доцільно запровадити поняття ідеального пучка, під яким розуміє світловий пучок, що має такі властивості: форма хвильового фронту, плоска чи сферична, розподіл амплітуди напруженості поля на поверхні хвильового фронту рівномірний або гауссівський.

Коли ідеальний пучок з плоскої хвильової поверхні падає на непрозорий екран з отвором діаметром D (рис. 1.16), розподіл амплітуди поля в просторі праворуч від екрана Q можна знайти, розв'язавши рівняння Кірхгофа, на якому ґрунтується теорія дифракції. Розв'язок такого рівняння засвідчує, що напівпростір праворуч від екрана можна поділити на три зони $[0, 0, 0]$: близьку, Френеля й далеку.

У близькій зоні, де виконується умова $0 < z < (D/2) \cdot \sqrt[3]{D/\lambda}$, дифракція практично не позначається на розподілі поля. Тому, він майже такий самий, як і на отворі.

Близька зона переходить у зону Френеля, яку обмежують такі значення z : $(D/2) \cdot \sqrt[3]{D/\lambda} < z < 2 \cdot D^2/\lambda$. У цій зоні по мірі зростання z роль дифракції в розподілі амплітуди поля дедалі збільшується.

За зоною Френеля йде далека зона, $2 \cdot D^2/\lambda < z < \infty$, в якій процес формування стаціонарного розподілу поля практично завершується. Кутова розбіжність від z залежить так. У близькій зоні пучок паралельний (кут розбіжності дорівнює нулю).

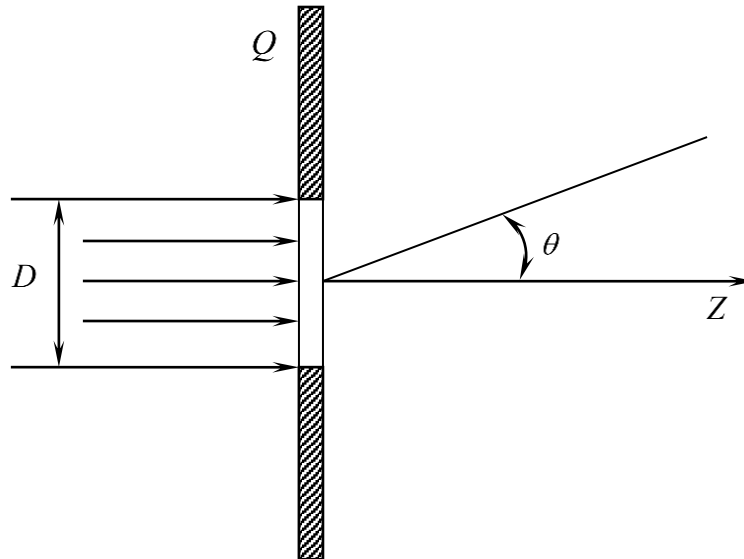


Рисунок 1.16 – До визначення кута дифракційної розбіжності

У зоні Френеля він розширюється за рахунок дифракції й остаточно формується. У далекій зоні кут розбіжності θ і розподіл поля досягають стаціонарного значення. Тому кутову розбіжність пучка (дифракційну розбіжність), зумовлену дифракцією на апертурі діаметром D , визначають у далекій зоні.

Розподіл інтенсивності випромінювання лазера в близькій та далекій зонах визначається типами використовуваного резонатора й модовим складом збуджуваних у ньому коливань.

Розподіл інтенсивності випромінювання можна визначити на підставі розподілу поля на вихідному дзеркалі резонатора і описати дифракційним інтегралом Кірхгофа. Для плоского резонатора [0]

$$E \approx \int_0^{D/2} \int_0^{2\pi} e^{-i \cdot k \cdot R \cdot \cos(\theta)} \cdot R dR d\theta . \quad (1.53)$$

Тут D – апертурний діаметр (діаметр активного елемента); k – хвильове число; θ – кут між нормаллю до випромінювальної площинки й променем.

Обчисливши інтеграл у (1.53), можна отримати для однорідного круглого пучка

$$E(\theta) \approx \frac{2 \cdot J_1(\pi \cdot D \cdot \theta / \lambda)}{\pi \cdot D \cdot \theta / \lambda} , \quad (1.54)$$

де J_1 – функція Бесселя першого роду першого порядку.

Інтенсивність випромінювання $I \approx E^2$, отже,

$$I(\theta) = I_0 \cdot \left[\frac{2 \cdot J_1(\pi \cdot D \cdot \theta / \lambda)}{\pi \cdot D \cdot \theta / \lambda} \right]^2. \quad (1.55)$$

Формула (1.55) задає діаграму напрямленості випромінювання для центральної моди TEM_{00} , зображену на рис. 1.17, на якому кути розбіжності позначено на рівні половинної потужності $\theta_{0,5}$ і повної розбіжності θ_0 .

Оскільки перший нуль функції Бесселя (рис. 1.17, а) відповідає $D \cdot \theta / \lambda = 1,22$, то

$$\theta = 1,22 \cdot \lambda / D. \quad (1.56)$$

У середині цього кута чи відповідного йому у фокальній площині кружка радіусом $1,22 \cdot \lambda \cdot F / D$, де F – фокусна відстань дзеркала, зосереджено 84% усієї потужності випромінювання.

Якщо діаметр випромінювальної поверхні $D = 10$ мм, а довжина хвилі випромінювання $\lambda = 0,7$ мкм, то кут розбіжності такого лазера

$$\theta = \frac{1,22 \cdot 0,7}{10 \cdot 10^3} = 0,854 \cdot 10^{-4} \text{ рад} \approx 20''.$$

Отже, лазер можна розглядати як джерело майже паралельних променів з дуже малою розбіжністю, що її визначає дифракція на отворі вихідного дзеркала. Слід зауважити, що високої напрямленості лазерного випромінювання досягнуто не завдяки якимось способам, а внаслідок самого характеру випромінювання, а саме його когерентності.

Коли в резонаторі розподіл поля гауссівський, то

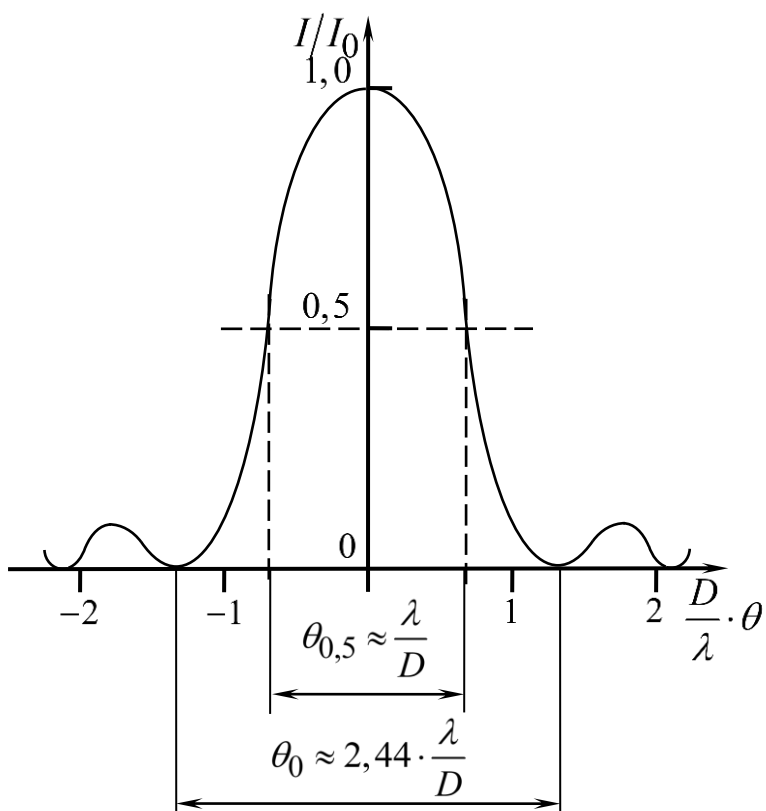
$$I(w) = I_0 \cdot \exp\left(-2 \cdot w^2 / w_G^2\right), \quad (1.57)$$

де I_0 – інтенсивність на осі пучка; w_G – кутовий радіус вихідного гауссівського пучка, тобто відстань, на якій інтенсивність випромінювання знижується в e^2 разів.

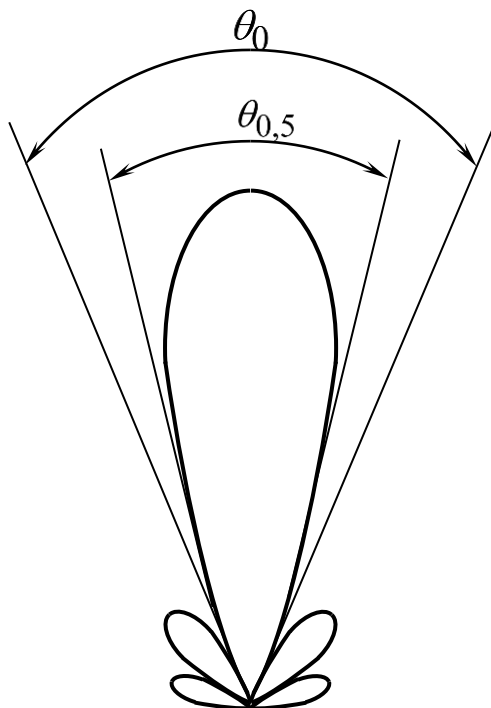
Кут дифракційної розбіжності гауссівського пучка

$$\theta \approx 1,27 \cdot \lambda / (2 \cdot w_0), \quad (1.58)$$

де $2 \cdot w_0$ – розмір пучка в перетяжці.



a



б

Рисунок 1.17 – Діаграма напрямленості випромінювання круглої площинки в системі координат: а – декартовій; б – полярній

Порівнявши (1.56) і (1.58), бачимо, що гауссівський розподіл дає трохи меншу розбіжність, ніж рівномірний, бо в цьому разі амплітуда поля знижується до краю пучка і дифракційні ефекти заявляються менше. У табл. 1.2 наведено розподіл інтенсивності випромінювання в близькій та далекій зонах, а також формули для розрахунку кута θ , який визначає напрямленість для певних найчастіше використовуваних лазерів [0, 0].

Для нестійких резонаторів пучок має кільцевий переріз із зовнішнім діаметром D_k і завширшки $a_k = D_k/2 \cdot (1 - 1/M)$. Тут $M = R_1/R_2$; R_1 і R_2 – радіуси дзеркал резонатора. Коли $M < 2$, усередині кута зосереджено близько 84% потужності, а $\theta(0,84) \approx 1,2 \cdot \lambda/d_k$ (див. табл. 1.2).

Порівняння кутової розбіжності пучків з різною формою перерізу й різним розподілом амплітуди поля засвідчує, що кут розбіжності мало залежить від цих параметрів. А тому прийнято твердження: дифракційна розбіжність пучка дорівнює відношенню довжини хвилі до розміру апертури випромінювача [0, 0].

У реальних умовах розбіжність випромінювання лазерів може набагато перевищувати дифракційну розбіжність через оптичну неоднорідність активного середовища, недосконалість оптичних елементів резонатора та їх механічні вібрації, які спричинюють коливання осі останнього.

У сферичному резонаторі розбіжність променя більша, ніж у плоскому. Для TEM_{00} моди кут розбіжності у випадку неплоских дзеркал резонатора [0, 0]

$$\theta_{0,5} \approx 0,939 \cdot \sqrt{\lambda/R_{ek}}, \quad (1.59)$$

де R_{ek} – еквівалентний радіус кривизни.

Цю розбіжність спричинює сферичність хвиль. З урахуванням дифракційної розбіжності

$$\theta_{0,5} = 0,939 \sqrt{\lambda/R_{ek}} + 1,22 \cdot \lambda/D. \quad (1.60)$$

На величину θ дуже впливає кількість генерованих поперечних мод, тобто ступінь просторової когерентності.

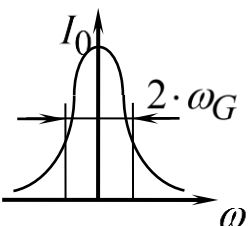
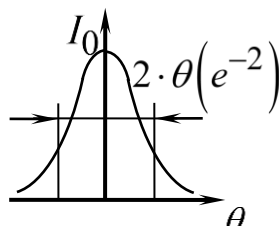
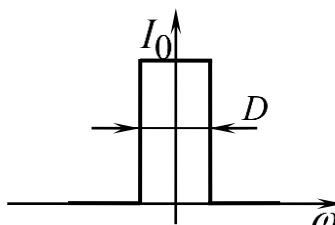
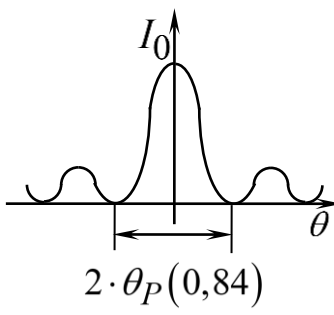
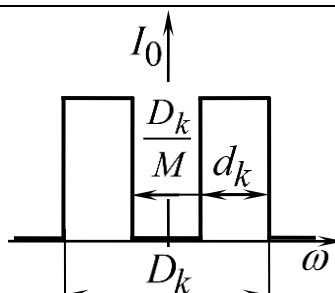
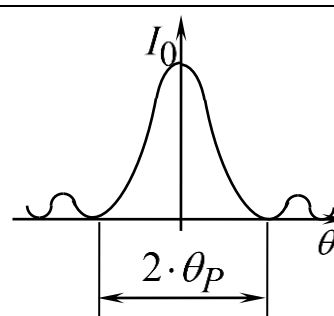
Велика напрямленість лазерного випромінювання зумовлює переваги лазерів перед звичайними джерелами: дуже малі втрати енергії; високий кутовий розділ; можливість просторової фільтрації під час прийому сигналу.

Вузконаправлене випромінювання можна ефективно використати:

- для передавання інформації на великі відстані;
- під час оптичної локації віддалених об'єктів активним методом, особливо для вирізнення об'єкта з-поміж інших цілей;

- для передавання енергії на великі відстані;
- у системах наведення за променем тощо.

Таблиця 1.2

Розподіл	У близькій зоні	У далекій зоні
Гауссівський пучок Вид розподілу	$I(\omega) = I_0 \cdot \exp(-2 \cdot \omega^2 / \omega_G^2)$ 	$I(\theta) = I_0 \cdot \exp(-2 \cdot \theta^2 / \theta_G^2)$ 
Дифракційна розбіжність		$\theta_I(e^{-2}) = \theta_P(0,86) = 0,63 \cdot \lambda / (2 \cdot \omega_0)$
Однорідний круг	$I(\omega) = \begin{cases} I_0 & \text{при } \omega \leq \left \frac{D}{2} \right \\ 0 & \text{при } \omega > \left \frac{D}{2} \right \end{cases}$	$I(\theta) = 4 \cdot I_0 \cdot \left(\frac{J_1(\pi \cdot D \cdot \theta / \lambda)}{(\pi \cdot D \cdot \theta / \lambda)} \right)$
Вид розподілу		
Дифракційна розбіжність		$\theta_P(0,84) = 1,22 \cdot \lambda / D$
Однорідне кільце	$I(\omega) = \begin{cases} I_0 & \text{при } \left \frac{D_k}{2 \cdot M} \right \leq \omega \leq \left \frac{D_k}{2} \right , \\ 0 & \text{при } \omega < \left \frac{D_k}{2} \right \text{ та } \omega > \left \frac{D_k}{2} \right \end{cases}$	$I(\theta) = 4 \cdot I_0 \cdot \left(\frac{J_1(\pi \cdot D_k \cdot \theta / \lambda)}{(\pi \cdot D_k \cdot \theta / \lambda)} - \frac{1}{M^2} \cdot \frac{J_1(\pi \cdot D_k \cdot \theta / (\lambda \cdot M))}{(\pi \cdot D_k \cdot \theta / (\lambda \cdot M))} \right)^2$
Вид розподілу		

1.5.4 Яскравість

Яскравість джерела електромагнітних хвиль характеризує потужність випромінювання, емітованого з одиниці його поверхні в одиничний тілесний кут у напрямі, перпендикулярному до випромінювальної поверхні.

На рис. 1.18 зображено елемент dS поверхні джерела в точці O . Потужність, яку він випромінює в тілесний кут $d\Omega$ в напрямі OO' , можна записати так $[0, 0]$:

$$dP = B \cdot \cos(\theta) dS d\Omega,$$

де θ – кут між напрямом OO' та нормаллю до поверхні \vec{n} .

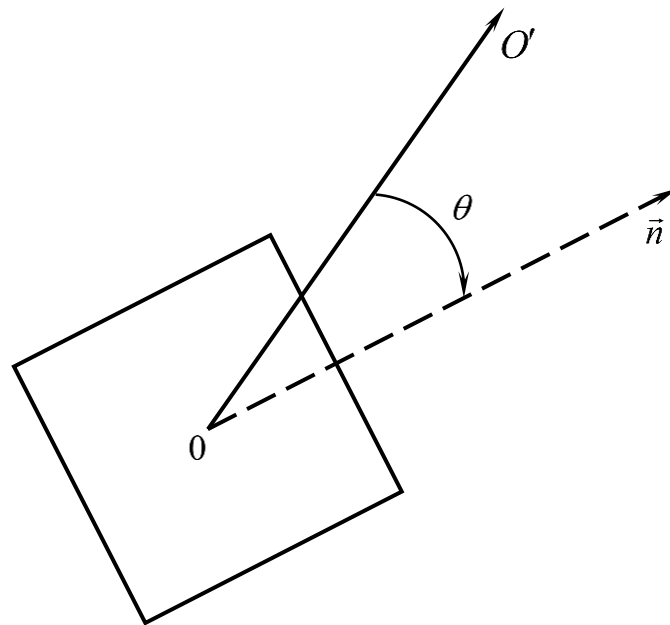


Рисунок 1.18 – До визначення поверхневої яскравості джерела

Величина B залежить від полярних координат θ та φ , тобто від напрямку OO' та положення точки O , і називається яскравістю джерела в точці O в напрямі OO' . Якщо B не залежить від θ і φ , то джерело ізотропне (джерело Ламберта). У цьому разі яскравість є відношенням густини випромінювання джерела R до тілесного кута розбіжності променя, що його емітує джерело:

$$B = \frac{R}{\Omega}. \quad (1.61)$$

Щоб визначити густину випромінювання джерела, можна скористатися кривою видимості (рис. 1.19). Наприклад, коли джерело випромінює світло потужністю 1 Вт на довжині хвилі $\lambda = 555$ нм, то випромінювана потужність 1 Вт еквівалентна світловому потокові 680 лм.

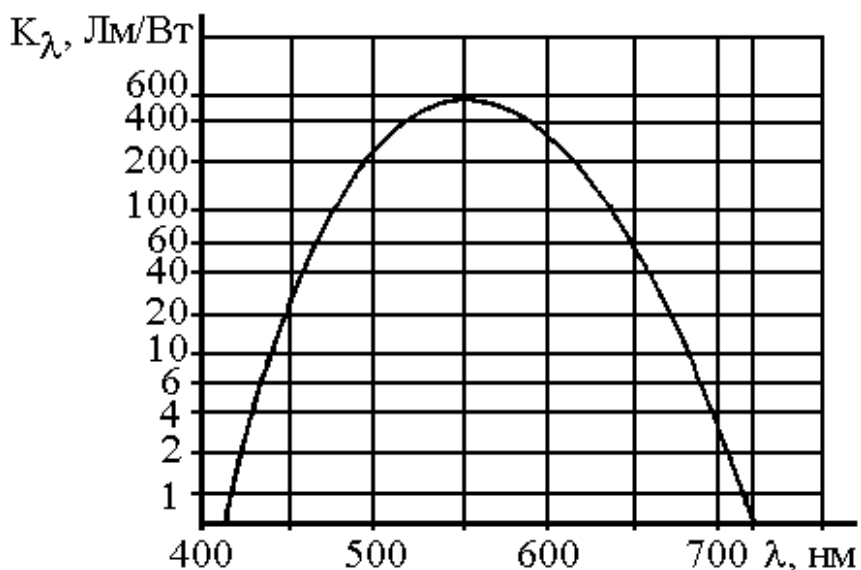


Рисунок 1.19 – Крива видимості

Щоб визначити R , потрібно значення отриманого світлового потоку (680 лм) поділити на площу джерела випромінювання.

Визначивши кут розбіжності Ω , за виразом (1.61) можна знайти яскравість.

1.5.5 Поляризація. Поляризованим називають випромінювання, яке можна зобразити електричним вектором, модуль і напрям якого у даній точці простору закономірно змінюються протягом часу. За напрям поляризації домовилися брати напрям вектора \vec{E} електричного поля.

Є випромінювання лінійно-поляризоване по колу й еліптично поляризоване. Залежно від типу поляризації кінець вектора \vec{E} описує синусоїду, коло або еліпс (у проекції на площину xoy) з частотою, яка дорівнює частоті поширення хвилі. Залежно від напрямку обертання вектора \vec{E} розрізняють праву й ліву поляризації. Площину, яка проходить через напрям випромінювання й ортогональна до площини коливань векторів, називають площиною поляризації (рис. 1.20) $[0, 0]$.

Коли світло не поляризоване, то вектор миттєвого електричного поля в кожній фіксованій точці простору може хаотично набувати будь-якої орієнтації в площині, перпендикулярній до напрямку поширення.

Квант, утворений внаслідок спонтанного переходу, може мати який завгодно напрям поляризації, але квант, що з'явився під час вимушених переходів, матиме ту саму поляризацію, що й квант, котрий спричинив даний

процес. Через це випромінювання майже всіх типів лазерів поляризоване. Якщо торці активних елементів лазерів скошено під кутом Бакстера, то ступінь поляризації наближається до 100 % і випромінювання лінійно поляризоване.

У рубінових лазерах, коли торці стрижня активного середовища розташовуються по нормалі до осі резонансної системи, вид і ступінь поляризації залежать від орієнтації оптичної осі кристала відносно геометричної осі стрижня. Під кутами 60° і 90° спостерігають лінійну поляризацію.

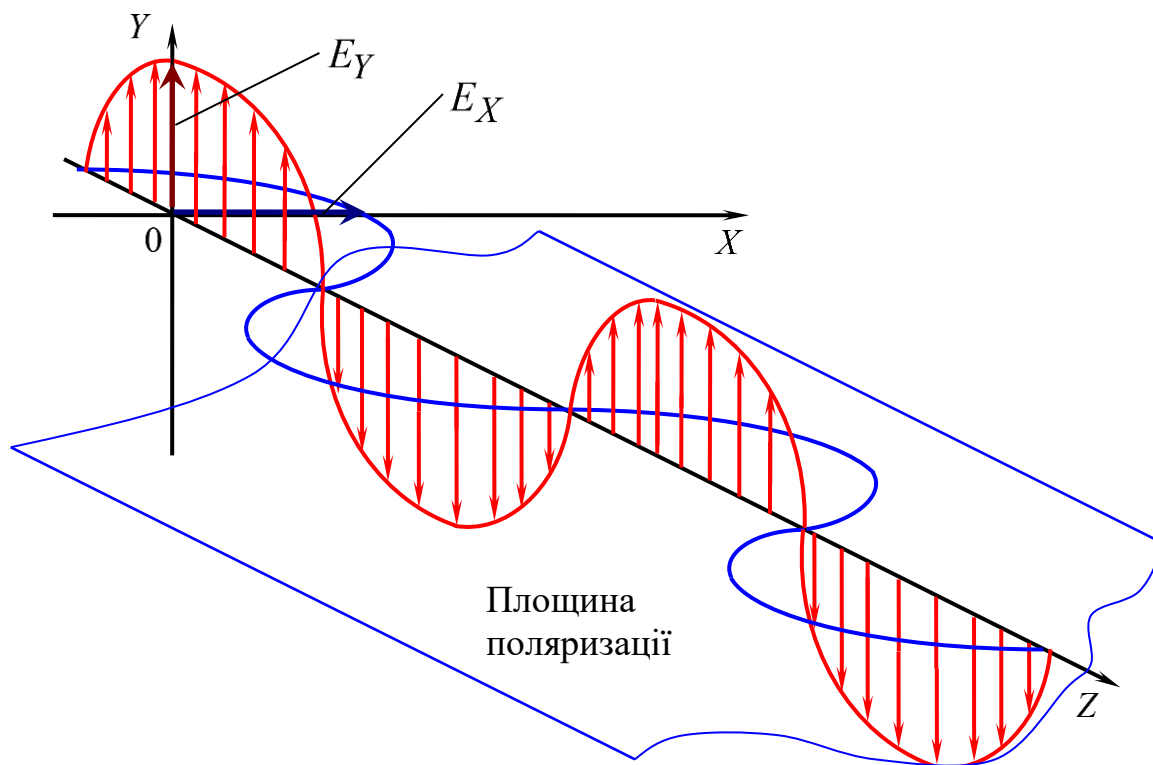


Рисунок 1.20 – До визначення поляризованості випромінювання

Поляризація не є такою незаперечною перевагою лазерного випромінювання, як монохроматичність, когерентність, напрямленість чи яскравість. У деяких лазерах її не використовують. З іншого боку, поляризоване випромінювання може істотно впливати на ефективність технологічних процесів, в яких відбиття випромінювання відіграє важливу роль, наприклад лазерного різання товстих металевих матеріалів. Поляризоване лазерне випромінювання застосовують під час вивчення фотопружності; в поляризованій мікроскопії для виявлення зникаючих малих зсувів фаз; в інших оптико-електронних приладах з лазерами, призначених для вимірювання й контролю технічних та фізичних величин.

1.6 Основні фізичні принципи нелінійного перетворення інфрачервоних і оптичних частот

Параметричне перетворювання (ПП) ІЧ випромінювання з підвищенням частоти відбувається його зміщенням в нелінійному середовищі з допоміжним випромінюванням (нагнітанням), в результаті чого генерується нове випромінювання сумарної або різницевої частоти, на яке переноситься інформація, що міститься у вихідному ІЧ сигналі. Ідея такого перетворювання ілюструється на рис. 1.21. В нелінійний кристал подається хвиля нагнітання з частотою ω_1 та ІЧ випромінювання з частотою ω_2 ; на виході кристала з'являється хвиля з частотою $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ або $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$ (вихідні хвилі $\omega_{1,2}$ потім відфільтровуються).

Фізичною причиною зміщення хвиль $\omega_{1,2}$ є нелінійність електричного типу – нелінійний зв'язок питомої поляризації середовища P і напруженості електричного поля E . Процеси, що нас цікавлять, описуються квадратичною нелінійністю поляризації [0] $P_i^{NL} = \chi_{ijk} \cdot E_j \cdot E_k$ (по повторюваних тензорних індексах, вважають підсумовування). Тут $\chi_{ijk}(\omega_1, \omega_2)$ квадратична нелінійна поляризованість – тензор третього рангу; відомості про його властивості містяться в [0]. В області прозорості зазвичай покладають $\chi_{ijk}(\omega_1, \omega_2) = \chi_{ijk}(\omega_1, \omega_2) = 2\chi_{ijk}^{2\omega_1}$, де $\chi_{ijk}^{2\omega_1}$ – тензор, який відповідає за генерацію іншої, оптичної гармоніки (ГДГ), про яку зараз має місце досить повна інформація [0, 0]. Тензор $\chi_{ijk}^{2\omega_1}$ – симетричний по другому і третьому індексах, тому його зручно відображати матрицею dim , замінюючи пару індексів (j,k) індексом m за правилом: $11 \Rightarrow 1$, $22 \Rightarrow 2$, $33 \Rightarrow 3$, $23(32) \Rightarrow 4$, $13(31) \Rightarrow 5$, $12(21) \Rightarrow 6$.

Зазвичай ефективно взаємодіють хвилі фіксованих лінійних поляризацій, які можна задати ортами $e_{1,2,3}$. При цьому істотною виявляється тільки складова $P^{NL} = (e_3, P^{NL})$, для випадку взаємодії плоских монохроматичних хвиль

$$E_v(r,t) = e_v A_v e^{i(k_v r - \omega_v t)} + \text{к.с.}, \quad k_v = \frac{\omega_v}{c} n_v = \frac{2\pi}{\lambda_v} n_v, \quad v = 1, 2, 3, \quad (1.62)$$

можна відобразити у вигляді:

$$P^{NL} = P_0 e^{i(qr - \omega_3 t)} + \text{к.с.} \quad P_0 = \chi A_1 A_2, \quad q = k_1 k_2, \quad (1.63)$$

$$\chi = 2 \cdot d = e_{3i} \cdot e_{1j} \cdot e_{2k} \cdot \chi_{ijk}(\omega_1, \omega_2). \quad (1.64)$$

Скалярну величину χ (або d) називають ефективною нелінійною поляризованістю. Розрахунки цієї величини для різних конкретних випадків можна знайти, наприклад, у книзі [0].

Для конкретних ілюстрацій теорії в подальшому обмежимося взаємодією хвиль в одновісєових кристалах. Поляризації (для звичайної і незвичайної хвиль) позначатиме літерами "о" і "е". Взаємодії при різних комбінаціях поляризацій (різних "типах взаємодії") визначаються як $oo \Rightarrow e$, $oe \Rightarrow e$ і т.д. із зазначенням поляризації хвиль $\omega_{1,2,3}$ відповідно. Припустимо, що кристал має форму плоскопаралельного шару з товщиною 1, грані якого перпендикулярні до осі Z. Генерація випромінювання з частотою ω_3 відбувається найбільш ефективно, якщо хвиля ω_3 , яка надходить до даного елемента об'єму від попередніх, знаходиться в потрібній фазі з випромінюванням, яке породжується в даному елементі. Вказане сприятливе співвідношення фаз реалізується, якщо:

$$k_3 = q = k_1 \pm k_2. \quad (1.65)$$

Умову (1.65) називають умовою хвильового (фазового) синхронізму [0 – 0]. Вона може виконуватися при різних поляризаціях хвиль в анізотропних кристалах для визначених напрямків їх розповсюдження, коли дисперсія показника заломлення компенсується анізотропією. В умовах синхронізму, які звичайно використовуються на практиці, інтенсивність генерації зростає на декілька порядків, оскільки її накопичування здійснюється на всій довжині кристала.

В загальному випадку існує два типи умови хвильового синхронізму – дотичний та критичний векторний синхронізм (рис. 1.21). Перша умова виконується тоді, коли поверхні k_1 і k_2 дотикаються одна одної, але не перетинаються. Друга умова відповідає ситуації, коли поверхні перетинаються під малим кутом одна до одної. Конкретизація геометричних умов його здійснення проводилась Уорнером [0], а також Вороніним, Іль'їнським і співробітниками [0, 0].

Кристал доцільно вирізати так, щоб дотичний синхронізм реалізовувався під час розповсюдження хвилі нагнітання вздовж нормалі до граней (вісь Z). Практично вибором зрізу кристала забезпечується лише грубе настроювання, а прецизійне настроювання на синхронізм може бути досягнуте шляхом невеликого відхилення від осі Z [0]. При цьому зручно спочатку, повертаючи кристал навкруги осі Y, перпендикулярної до k_1 , добитися одновимірного синхронізму, а потім додатково повертати кристал навкруги тієї ж осі на відомий кут φ_0 , що визначається величиною анізотропії. Напрямок k_2 , що відповідає дотичному синхронізму, тоді утворює відомий кут $\psi_0 \cdot p \cdot k_1$. Спочатку необхідно, хоча би приблизно знати необхідну орієнтацію вектора k_1 .

Зазначимо, що ситуація вдала, коли дотичний синхронізм реалізується як 90° (або близький до нього). Якщо синхронізм порушений, тобто є хвильове розстроювання $\tau = k_3 - k_1 - k_2$, інтенсивність генерації досить швидко спадає. У випадку поперечно однородної генерації заданими плоскими хвилями $\omega_{1,2}$ і $\tau \parallel z$ залежність інтенсивності генерації від хвильового розстроювання передається фактором $\mathcal{F}(x) = \sin^2 x = (\sin x/x)^2$, $x = 1/2 \cdot \tau_z$, який істотно відрізняється від нуля в області $\pi/2 \geq |x|$, тобто $\pi/1 \geq |\tau_z|$.

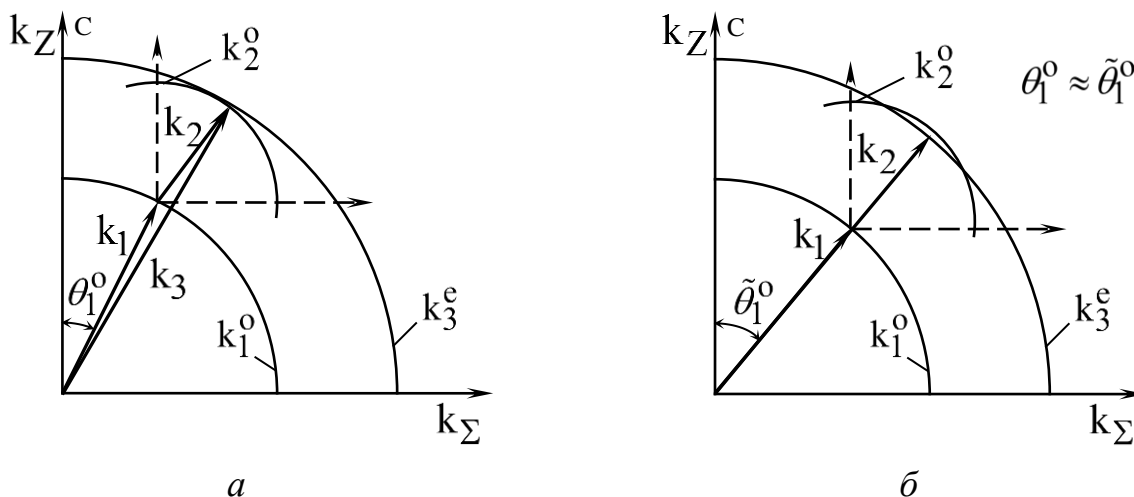


Рисунок 1.21 – Діаграми фазового синхронізму в нелінійному кристалі: а – випадок дотичного синхронізму; б – випадок одновимірного критичного синхронізму; С – оптична вісь кристала

Це накладає обмеження на припустимі кутові і спектральні розстроювання від синхронізму для кожної із хвиль. Вони характеризуються ефективною кутовою ($\psi_{1,2}$) та спектральною ($\delta_{1,2}$) шириною синхронізму. Останнє відповідає подвоєним значенням кутових і частотних розстроювань, відповідних $|x| = \pi/2$. Лінійне наближення для τ_z відносно частотних і кутових розстроювань відповідає критичному синхронізму. Якщо в лінійному наближенні $\tau_z = 0$, то необхідно враховувати складові другого порядку, що відповідають некритичному синхронізму. В задачі про параметричне перетворення важливо забезпечити некритичний кутовий синхронізм за ГЧ сигналом.

1.7 Розрахунок ефективності енергетичного перетворення в пруститі і титогалаті срібла

Проведення аналізу енергетичних характеристик нелінійного перетворення пов'язане з оцінкою двох умов. Перша – це визначення рівня потужності перетвореного випромінювання, щоб з'ясувати можливості його стійкої реєстрації

та дослідження. Друга – визначення рівнів потужностей взаємодіючих хвиль, за яких не відбувається теплове руйнування кристала.

Математичний опис взаємодії хвиль $\omega_{1,2,3}$, зумовлений нелінійністю поляризації P^{NL} , базується на використанні добре відомого методу скорочених рівнянь [0, 0]. В стаціонарному та поперечно-однорідному наближенні система скорочених рівнянь для зв'язаних скалярних амплітуд поля має вигляд [0]:

$$\frac{dA_1}{dz} = i \cdot Q_1 \cdot A_3 \cdot A_2 \cdot e^{i \cdot \tau_z \cdot z}, \quad \tau_z = k_{3z} - k_{1z} - k_{2z}, \quad \omega_3 = \omega_1 + \omega_2, \quad (1.66)$$

$$\frac{dA_2}{dz} = i \cdot Q_2 \cdot A_3 \cdot A_1 \cdot e^{i \cdot \tau_z \cdot z}, \quad Q_v = \frac{2 \cdot \pi \cdot \omega_v}{c \cdot n_v \cdot \cos(\xi_v \cdot \Lambda_v)}, \quad (1.67)$$

$$\frac{dA_3}{dz} = i \cdot Q_{1,2} \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot e^{-i \cdot \tau_z \cdot z}, \quad (v = 1, 2, 3) \quad \Lambda_v = 1 - \frac{e_{vz}(k_v e_v)}{k_{vz}} \cong 1; \quad (1.68)$$

тут ξ_v – кути між k_v і віссю Z . Рівняння (1.67) слід доповнити межовими умовами: $A_{1,2}|_{z=0} = A_{1,2}^0$, $A_3|_{z=0} = 0$. Задача має загальний розв'язок, який виражається досить громіздкими формулами [0]. Проте у випадках, коли поля з частотами $\omega_{1,2}$ вважаються заданими, залишається лише третє рівняння системи, яке легко розв'язується. Якщо перейти до інтенсивностей $I_v = c \cdot n_v \cdot |A_v|^2 / (2 \cdot \pi)$, враховуючи, що $I_3 \sim I_1 \cdot I_2$, ввести енергетичну – $\eta_e = I_3 / I_2^0$ та квантову – $\eta_k = N_3 / N_2^0$ ефективність перетворювання ($N_v = I_v / (h \cdot \omega_v)$ – густина потоку фотонів з частотою ω_v), то:

$$\eta_k = \frac{\omega_2}{\omega_3} \cdot \eta_e = a \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot \sin\left(c^2 \cdot \frac{\tau_z \cdot z}{2}\right), \quad a = \frac{32 \cdot \pi^3 \cdot \omega_2 \cdot \omega_3 \cdot d^2}{c^3 \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \cos^2(\xi_3)}; \quad (1.69)$$

$I_1 = P_1 / S$, де P_1 – потік енергії нагнітання в області взаємодії з поперечним перерізом S . Константа a у виразі (1.69) має значення квантової ефективності параметричного перетворювання в кристалі одиничної товщини при одиничній інтенсивності нагнітання і точному синхронізмі.

Поза наближення заданого ГЧ поля:

$$\eta_k = \frac{\sin\left(1/\sqrt{a \cdot I_1 + \tau_z^2/4}\right)}{1 + \left(\tau_z^2/(4 \cdot a \cdot I_1)\right)}. \quad (1.70)$$

Як видно з виразу (1.70), η_k осцилює з 1, причому $\eta_k^{\max} = \left(1 + \left(\tau_z^2/(4 \cdot a \cdot I_1)\right)\right)^{-1}$, у випадку синхронної генерації $\eta_k^{\max} = 1$. Таким чином, область значення η_k обмежена інтервалом $[0, 1]$. Фізично це пов'язано з тим, що елементарний акт, який лежить в основі процесу генерації сумарної частоти, є "злиттям" двох квантів: $h \cdot \omega_1$ і $h \cdot \omega_2$ з народженням ще одного кванта $h \cdot \omega_3$, так що кількість народжених квантів $h \cdot \omega_3$ точно дорівнює зменшенню кількості ПЧ квантів $h \cdot \omega_2$. Зрозуміло, що N_3^{\max} не може перевищувати N_2^0 . Водночас $\eta_e = (\omega_3/\omega_2) \cdot \eta_k > \eta_k$, тому що $h \cdot \omega_3 > h \cdot \omega_2$, і при досить великій ω_1 , η_e явно може перевищувати 1.

У випадку генерації різницевої частоти замість (1.70) маємо:

$$\eta_k = \left| \operatorname{ch}(f) + \frac{i \cdot \tau_z}{2 \cdot f} \cdot \operatorname{sh}(f) \right|^2, \quad f = \sqrt{a \cdot I_1 - \frac{\tau_z^2}{4}}. \quad (1.71)$$

Елементарний акт відповідає тут "розпаду" кванта $h \cdot \omega_1$ на два кванти: $h \cdot \omega_1 \Rightarrow h \cdot \omega_2 + h \cdot \omega_3$; при цьому поповнюється енергія обох хвиль $\omega_{2,3}$. Тому тут не тільки η_e , але й η_k , можуть як завгодно перевищувати 1.

Суттєво, що в усіх випадках ефективність перетворення не залежить від інтенсивності вхідного ПЧ сигналу і визначається лише інтенсивністю нагнітання. Практично дуже часто використовуються фокусовані гауссівські пучки; цей випадок теоретично розглянутий в [0]. В працях [0] для колінеарної і в [0] для перпендикулярної взаємодії результати [0] узагальнені для випадку еліптичного фокусування, з урахуванням дифракції та апертурних ефектів. Вибір оптимального фокусування забезпечує згідно з [0] вииграш для η_k в пруститі ($\lambda_2 = 10,6$ мкм) приблизно у 30 разів; для $P_1 = 1$ Вт, $l = 1$ см можна отримати $\eta_k \sim 10^{-4}$.

Для коректного обчислення рівня потужності перетвореного випромінювання необхідно зважати на геометрію взаємодіючих пучків, тобто їх розбіжність, розмір перетяжки та розподіл густини потужності випромінювання в поперечному перерізі пучка.

Найбільш складний розв'язок цієї задачі виходить у випадку неколінеарної взаємодії, коли пучки перетинаються під кутом. В цьому разі

необхідно здійснити інтегрування по області, яку створило перетинання двох гауссівських пучків з неспіввимірними розмірами перетяжок.

Задача значно спрощується у випадку колінеарної взаємодії, коли просторове розміщення перетяжок взаємодіючих хвиль співпадає. Тоді енергетичне перетворювання можна обчислювати за об'ємом обмеженим каустикою хвилі нагнітання і розмірами кристала. На рис. 1.22 відображена схема геометричного розташування в просторі відносно кристала гауссівських пучків взаємодіючих хвиль.

Припускається, що вихідні пучки мають одновимірний гауссівський розподіл амплітуд. Формули, які описують пучки в кристалі, мають такий вигляд:

$$E_1(x,y,z) = \frac{E_{10} \cdot w_1^2}{4} \cdot \frac{1}{\frac{w_1^2}{4} - \frac{i \cdot z}{2 \cdot k_1}} \cdot \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2}{4 \left(\frac{w_1^2}{4} - \frac{i \cdot z}{2 \cdot k_1} \right)} - i \cdot k_1 \cdot z \right\}, \quad (1.72)$$

$$E_2(x,y,z) = \frac{E_{20} \cdot w_2^2}{4} \cdot \frac{1}{\frac{w_2^2}{4} - \frac{i \cdot z}{2 \cdot k_2}} \cdot \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2}{4 \left(\frac{w_2^2}{4} - \frac{i \cdot z}{2 \cdot k_2} \right)} - i \cdot k_2 \cdot z \right\}. \quad (1.73)$$

Тут E_{10} і E_{20} – амплітуди поля в точці $Z=0$, перетяжка також знаходиться в точці $Z=0$.

В наближенні заданих взаємодіючих полів для потужності випромінювання на сумарній частоті у випадку взаємодії $\infty \Rightarrow \infty$ має вигляд:

$$P_3 = \frac{8 \cdot \pi^2 \cdot \omega_3 \cdot |d_{\text{ефф}}| \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot \omega_1 \cdot \omega_2}{c^3 \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \cos^4(\gamma_3)} \cdot \int_{-1/2}^{1/2} \int f(z', z) dz dz'. \quad (1.74)$$

Подвійний інтеграл у формулі (1.74) береться з урахуванням двох взаємодіючих хвиль. Функція $f(z', z)$ описується громіздкою формулою, в якій врахована каустика пучків.

Для проведення експериментальних досліджень і порівнювання їх з теоретичними результатами достатньо обмежитись інтегруванням по двох зрізаних конусах, що утворюються, якщо апроксимувати квадратичну залежність гауссівського пучка поблизу перетяжки лінійною залежністю.

Похибка такого наближення не більша за 1%, що для оцінки енергетичного перетворювання є задовільною величиною.

Оскільки радіуси перетяжок для пучків хвилі нагнітання і пучка ІЧ випромінювання неспіввимірні, то інтегрування в поперечному перерізі можна проводити в припущенні, що поле ІЧ випромінювання в поперечному перерізі не залежить від радіуса, а є тільки залежність від повздовжньої координати Z . Тоді коефіцієнт, зумовлений об'ємом взаємодії, в формулі для повної потужності перетвореного випромінювання матиме вигляд:

$$V = \pi \cdot \frac{1}{3 \cdot \left[w_1^2 + (1 + k_1/2)^2 + w_1(1 + k_1/2) \right]} \quad (1.75)$$

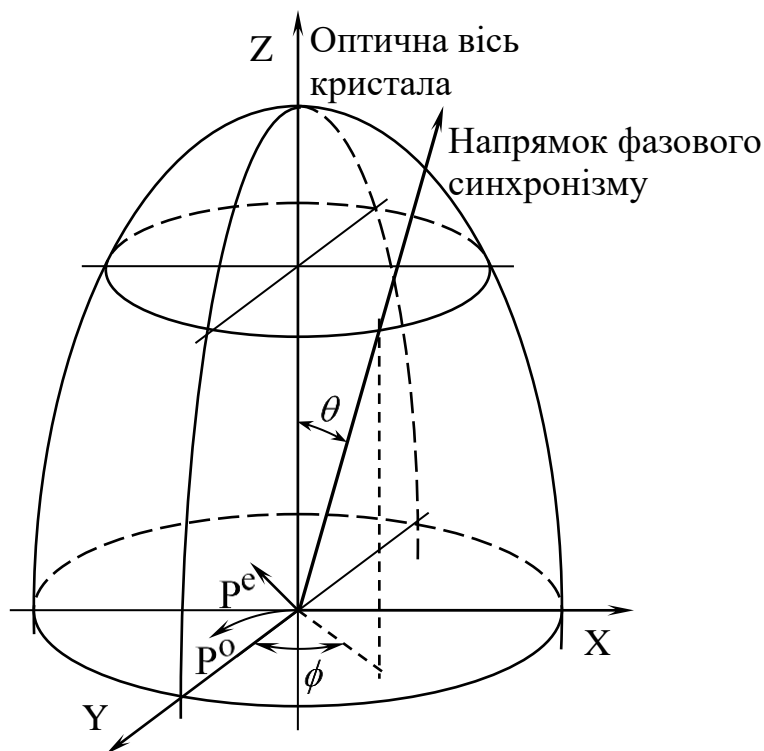


Рисунок 1.22 – Просторове розташування осей нелінійного кристала і напрямку вектора фазового синхронізму

Слід визначити, що для незвичайної хвилі існує відхилення між вектором \vec{k} і напрямком розповсюдження енергії, тобто вектором Пойнтінга. Цей кут характеризує знос енергії і виведення її з об'єму взаємодії, що особливо важливо для випадку, коли взаємодіють хвилі з різними поляризаціями. В такому випадку знос енергії призводить до зменшення ефективного об'єму, в якому здійснюється взаємодія хвиль. Тому поперечні розміри пучків (величини перетяжок w) мають вибиратися з урахуванням ефекту зносу енергії однієї або двох взаємодіючих хвиль.

Щоб виключити вплив зносу, необхідно виконувати такі умови: $w_1 \gg \sqrt{2 \cdot l/k_1}$ і $w_2 \gg \sqrt{2 \cdot l/k_2}$, тобто розміри перетяжки повинні помітно перевищувати дифракційну межу. Домогтися такої умови можна шляхом підбору фокусуємих лінз як для хвилі нагнітання, так і для ГЧ випромінювання. На рис. 2.1 наведено схему фокусування оптичних пучків взаємодіючих хвиль. Для квантової ефективності перетворювання визначальну роль відіграє густина потужності хвилі нагнітання. Проте повна потужність перетвореного випромінювання пропорційна добуткові потужностей падаючих хвиль. Як визначалося вище за умови, що потужність генерованої хвилі мала, можна вважати амплітуди двох падаючих хвиль сталими вздовж усієї довжини нелінійного середовища, тому кінцева формула містить в собі значення потужностей падаючих хвиль на межі нелінійного середовища. Густина потужності перетвореного випромінювання на виході кристала

$$S_3 = \frac{512 \cdot \pi^5 \cdot L^2 \cdot d^2 \cdot S_1 \cdot S_2}{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \lambda_3^2 \cdot c} \cdot \left(\frac{\sin(\Delta k \cdot L/2)}{(\Delta k \cdot L/2)} \right)^2 \cdot V, \quad (1.76)$$

де V – коефіцієнт, що враховує об'єм взаємодіючих хвиль.

Повна потужність вихідного перетвореного випромінювання на виході кристала

$$P_3 = \frac{512 \cdot \pi^5 \cdot L^2 \cdot d^2 \cdot P_1 \cdot P_2}{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \lambda_3^2 \cdot c \cdot A_1} \cdot \left(\frac{\sin(\Delta k \cdot L/2)}{(\Delta k \cdot L/2)} \right)^2 \cdot V, \quad (1.77)$$

для $\Delta k = 0$, тобто у випадку повного синхронізму, вихідна потужність пропорційна квадрату відношення довжини кристала до довжини хвилі перетвореного випромінювання. В іншому разі вихідна потужність залежить від довжини кристала як $\sin^2(\Delta k \cdot L/2)$. Найбільше розстроювання визначається із умови $\sin(\Delta k \cdot L/2) = 1$, тобто $\Delta k = \pi/L$. Це найбільш припустиме розстроювання, за якого ще можна спостерігати вихідне випромінювання.

Таким чином, із формули (1.76) можна отримати розраховане значення потужності перетворювання випромінювання для прустита і для тіогалата срібла. При цьому припускається, що $\Delta k = 0$.

$$P_{\text{прус}} = 3 \cdot 10^{-9} \text{ Вт}, \quad (1.78)$$

$$P_{\text{тіог}} = 1 \cdot 10^{-8} \text{ Вт.} \quad (1.79)$$

Ці якісні оцінки величин потужності перетвореного випромінювання показують, що такої потужності достатньо для подальшої реєстрації і дослідження отриманого випромінювання.

1.8 Розрахунок гранично допустимих розстроювань фазового синхронізму

Точне дотримання фазового синхронізму, коли $\Delta k = 0$, є теоретичною моделлю, яка дозволяє здійснити всі необхідні розрахунки. В реальній ситуації добитися такої умови дуже складно з тієї причини, що взаємодіюче випромінювання – це просторові гауссівські пучки з заданою кінцевою розбіжністю. Тому основна частина спектра просторових гармонік гауссівського пучка розповсюджується під кутом до осі пучка. Звідси випливає, що якщо умови фазового синхронізму по кутах напрямку взаємодіючих хвиль можуть виконуватися з похибкою, співвимірною з кутом розбіжності гауссівського пучка, то практично всі складові просторового спектра даватимуть внесок у формування перетвореного випромінювання.

Фазове розстроювання є функцією кута падіння ІЧ випромінювання. На рис. 1.21 показано, як ця умова пов'язана з геометрією фазового синхронізму, що виконується в кристалі тіогалата срібла. В цьому випадку, коли вихідні хвилі звичайні, а сумарна хвиля незвичайна, можна отримати відносно невеликий прийомний кут, що лежить в площині, перпендикулярній площині діаграми. Це пов'язано з тим, що поверхня, яка визначається вектором $(k_1 + k_2)$, сферична поверхня з центром на кінці вектора k_1 (припускається, що лазерний пучок, як це зазвичай має місце, добре колімований). Поверхня, що визначається вектором k_3 , також є майже сферичною для малих кутів поблизу напрямку синхронізму, але нормаль до неї не проходить крізь центр кривизни поверхні $(k_1 + k_2)$, тому що показник заломлення для незвичайної хвилі змінюється разом із зміною кута. Таким чином, обидві поверхні перетинають під невеликим, але закінченим кутом, і зміна k_2 , що призводить до припустимих змін Δk , є малою. Тому припустиме відхилення кута θ від центрального напрямку фазового синхронізму, при якому фазове розстроювання ще не перевищує Δk , подається простим виразом:

$$\Delta\theta_1 = \left(\frac{\partial k_3}{\partial \theta} \right)^{-1}, \quad \Delta k = \frac{\pi}{L} \left(\frac{\partial k_3}{\partial \theta} \right)^{-1}. \quad (1.80)$$

У попередніх розрахунках вважалося, що фігуруючі тут кути розстроювання досить малі, так що ділянки сферичних поверхонь, отримані при перерізі площиною під кутом θ , можуть розглядатися як лінійні.

В напрямку, перпендикулярному площині зображення, обидві поверхні $(k_1 + k_2)$ і k_3 є сферичними; вони дотикаються одна одній в центрі пучків, де має місце точний синхронізм. Через те, що обидві поверхні в цій площині перетинаються симетрично, вигляд залежності фазового розстроювання від кута не потрібен. Половинний кут $\Delta\theta_2$ знову дає розстроювання π/L . Апроксимуючи синуси і косинуси малих кутів, можна отримати такий результат:

$$\Delta\theta_2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \pi}{L \cdot k_2 \cdot (1 - k_2/k_3)}}. \quad (1.81)$$

Повний тілесний кут для синхронного випромінювання в інфрачервоній області при вимірюванні зовні лінійного кристала виражається формулою:

$$\Delta\varphi_1 = 4 \cdot n_2^2 \cdot \Delta\theta_1 \cdot \Delta\theta_2, \quad (1.82)$$

і його поперечний переріз має приблизно прямокутну форму. Множник n_2 з'явився тому, що кути, виведені у формулах (1.80) і (1.81), вимірюються з середини кристала, і тому кожний з них збільшується в n_2 разів під час заломлення променя на поверхні.

Якщо підставити у раніше виведені формули числа для розглядуваного випадку, стають зрозумілими співвідношення між різними характеристиками. Для першого випадку $k_3 = n_3/c$, так що:

$$\frac{\partial k_3}{\partial \theta} = \frac{\omega_3}{c} \cdot \left(\frac{\partial n_3(\theta)}{\partial \theta} \right) \Big|_{\theta_m}. \quad (1.83)$$

Для незвичайного променя диференціювання дає такий результат:

$$\frac{\partial n_3(\theta)}{\partial \theta} = \frac{-n_3^e \cdot n_3^0 \cdot \left((n_3^0)^2 - (n_3^e)^2 \right) \cdot \sin(2 \cdot \theta_m)}{2 \cdot \left[(n_3^0)^2 \cdot \sin^2(\theta_m) + (n_3^e)^2 \cdot \cos^2(\theta_m) \right]^{3/2}}. \quad (1.84)$$

Якщо для прикладу покласти $\theta_m = 45^\circ$ і використовувати дані за показником заломлення тіогалата срібла, то для довжини хвилі інфрачервоного випромінювання 10,6 мкм і довжини хвилі сумарного випромінювання 0,59 мкм можна отримати такі орієнтовні значення для кристала довжиною 1 см: $\Delta\theta_1 = 0,5^\circ$, $\Delta\theta_2 = 0,1^\circ$, $\Delta\theta_3 = 0,1^\circ$, $\Delta\varphi_1 = 1^\circ$, $\Delta\varphi_2 = 1^\circ$.

Другим механізмом, що призводить до розстроювання фазового синхронізму, є температурна залежність n_0 та n_e . Якщо умову фазового синхронізму було виконано при температурі T_0 , то при зміні останньої до T_1 з'являється розстроювання фазового синхронізму, пов'язане з тим, що змінилися величини n_0 і n_e за заданих значень довжини хвиль. При цьому змінюється кут θ , при якому можливе точне виконання фазового синхронізму. З іншого боку, цю температурну залежність можна використовувати для точного підстроювання фазового синхронізму, якщо відомий закон зміни n_0 та n_e залежно від T . Для цієї мети нелінійний кристал вміщується в термостат, що дозволяє змінювати температуру кристала в межах 20°C .

1.8.1. Розрахунок умов фазового синхронізму для прустита. Як було зазначено вище, в ролі нелінійного середовища для параметричного перетворення ПЧ випромінювання, можна застосовувати нелінійні кристали, що вирощуються штучним шляхом. Одним з найбільш широко використовуваних для генерації сумарних та різницевих частот кристалів є прустит, його хімічна формула Ag_3AsS_3 . Кристал негативний одновісьовий ($n_0 > n_e$), клас симетрії – 3m.

Діапазон прозорості 0,6 – 13 мкм. Верхня межа діапазону визначає мінімальну довжину хвилі 0,59 мкм, яка вже не потрапляє в смугу прозорості і ефективно поглинається в кристалі. Тому, в ході використання прустита необхідно розглянути умови генерації різницевої частоти, коли довжина хвилі перетвореного випромінювання буде 0,67 мкм. Таким чином, використання прустита для нашої мети зумовлює характер взаємодії та ставить першою умовою те, що перетворювання має бути різницевим за частотою, тобто $\omega_3 = \omega_1 - \omega_2$. Ця умова визначає вибір типу взаємодіючих хвиль. Зрозуміло, що необхідна комбінація звичайних і незвичайних хвиль. Тільки в цьому випадку можливе узгодження фаз між хвильовою поляризацією і електромагнітною хвилею. Для різницевої взаємодії в пруститі необхідно використовувати тип взаємодії $e_o \Rightarrow o$. Незвичайна хвиля нагнітання з $\lambda = 0,63$ мкм взаємодіє із звичайною хвилею з $\lambda = 10,6$ мкм, що приводить до збудження звичайної хвилі з $\lambda = 0,67$ мкм.

У загальному випадку для одновісьових кристалів показники заломлення для звичайної і незвичайної хвилі можна записати таким чином:

$$n^{\text{ord}} = n_0, \quad n^{\text{ext}} = \frac{n_0 \cdot n_e}{\sqrt{(n_0^2 \cdot \sin^2(\theta) + n_e^2 \cdot \cos^2(\theta))}}, \quad (1.85)$$

де θ – кут між оптичною віссю кристала і напрямком поширення хвилі. Для прустита n_0 і n_e описуються такими формулами:

$$n_0^2 = 9,220 + \frac{0,4454}{\lambda^2 - 0,1264} - \frac{1733}{1000 - \lambda^2}, \quad (1.86)$$

$$n_e^2 = 7,007 + \frac{0,3230}{\lambda^2 - 0,1192} - \frac{660}{1000 - \lambda^2}. \quad (1.87)$$

Залежність показників заломлення від довжини хвилі й кута θ дозволяють використовувати умови синхронізму:

$$\vec{k}_3 = \vec{k}_1 - \vec{k}_2, \quad (1.88)$$

$$\omega_3 = \omega_1 - \omega_2, \quad (1.89)$$

знайти для заданої пари взаємодіючих хвиль величину кута θ і значення частоти (довжини хвилі) генерованого випромінювання. Для прустита існують дві можливості виконання умови синхронізму – це колінеарна та компланарна взаємодії.

Оскільки основну зацікавленість викликає колінеарна взаємодія, то другу умову в (1.88) можна переписати спрощено:

$$n_3 \cdot \omega_3 = n_1 \cdot \omega_1 - n_2 \cdot \omega_2. \quad (1.90)$$

Щодо осей кристала взаємодіючі хвилі розповсюджуються під кутом θ до осі Z (вісь кристала) в площині, що складає кут φ до осі X. Проекцію електричного поля взаємодіючих хвиль можна записати таким чином (див. рис. 1.22):

$$E_{1j}e = |\vec{E}_1| \cdot \begin{vmatrix} -\cos(\varphi) \cdot \cos(\theta) \\ -\sin(\varphi) \cdot \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{vmatrix} = |\vec{E}_1| \cdot a_j, \quad (1.91)$$

$$E_{2j}o = |\vec{E}_2| \cdot \begin{vmatrix} \sin(\varphi) \\ -\cos(\varphi) \\ 0 \end{vmatrix} = |\vec{E}_2| \cdot a_j, \quad (1.92)$$

$$E_{3j}o = |\vec{E}_3| \cdot \begin{vmatrix} \sin(\varphi) \\ -\cos(\varphi) \\ 0 \end{vmatrix} = |\vec{E}_3| \cdot a_j. \quad (1.93)$$

З урахуванням незалежних компонент тензора нелінійної сприйнятливості кристала прустита визначимо коефіцієнти нелінійності у напрямку синхронізму. З урахуванням того, що для поляризації виконуються умови симетрії, тобто:

$$P_{00}e = P_{e0}o, \quad (1.94)$$

надалі можна отримати:

$$d_{e0}o = d_{15} \cdot \sin(\theta) - d_{22} \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(3 \cdot \varphi). \quad (1.95)$$

Тут d_{15} і d_{22} – елементи тензора діелектричної проникності кристала:

$$d_{15}(10,6 \text{ мкм}) = (2,7 \dots 0,6) \cdot 10^{-8} \text{ см/дін}^{1/2}, \quad (1.96)$$

$$d_{22}(10,6 \text{ мкм}) = (4,3 \dots 0,6) \cdot 10^{-8} \text{ см/дін}^{1/2}. \quad (1.97)$$

Звідси виходить, що для одержання максимального значення нелінійного коефіцієнта необхідно кут φ вибрати рівним $3\pi/2$, тоді:

$$d_{e0}o = d_{15} \cdot \sin(\theta) + d_{22} \cdot \cos(\theta). \quad (1.98)$$

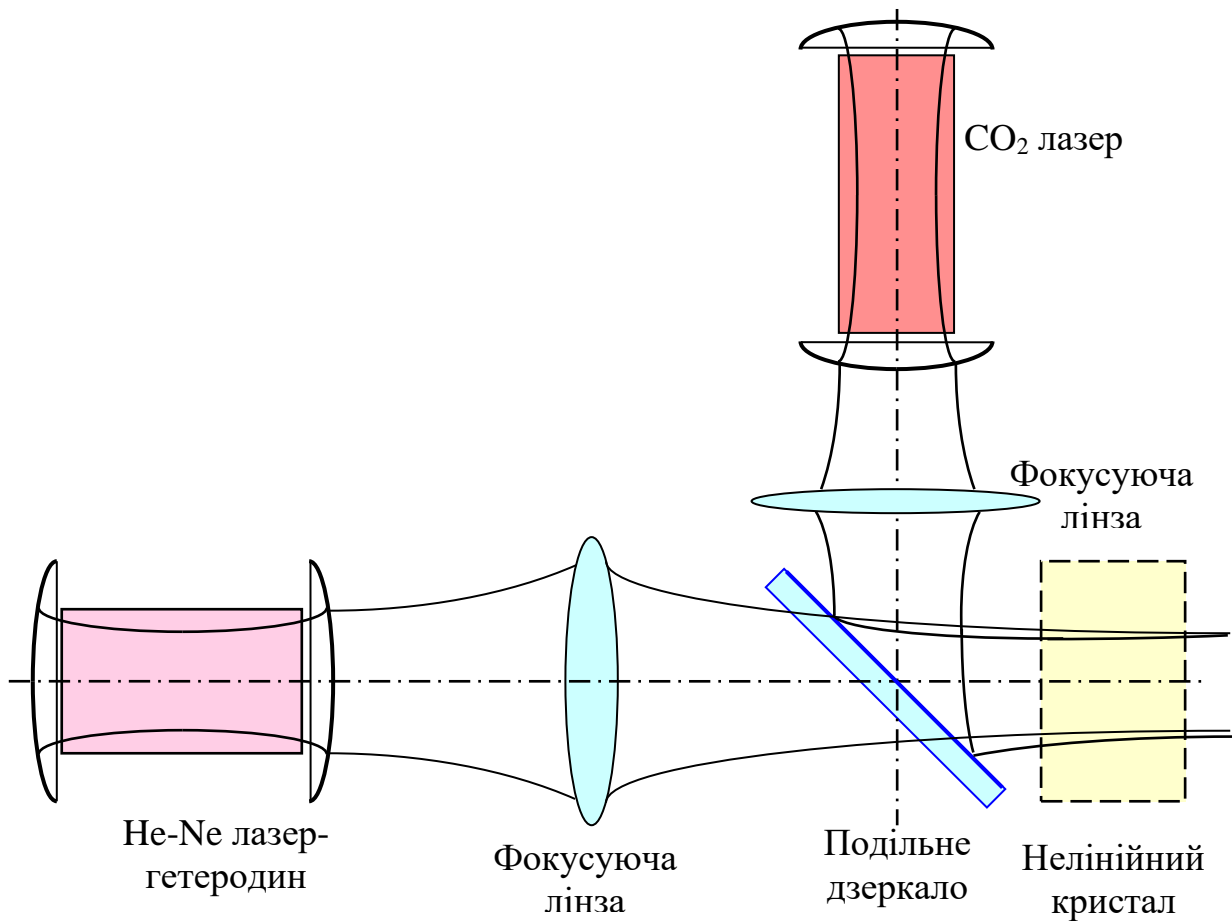


Рисунок 1.23 – Оптична схема системи зв'язку

Через це площина входу взаємодіючих хвиль повинна бути паралельною площині YZ кристала прустита і напрямок входу променів повинен співпадати з напрямком осі Y .

Кут θ можливо одержати із розв'язку системи за допомогою використання (2.1). В загальному вигляді формула для θ з урахуванням взаємодії типу $e_o \Rightarrow o$ має вигляд:

$$\theta = \frac{180}{\pi} \cdot \arcsin \left(\frac{\left(\frac{n_0^2(\lambda_3)}{n^2(\lambda_2, \lambda_3)} - 1 \right)^{1/2}}{\frac{n_0(\lambda_1)}{n_e(\lambda_1)} - 1} \right). \quad (1.99)$$

Використовуючи значення n_0 і n_e для відповідних довжин хвиль (10,6 та 0,63 мкм), отримуємо значення $\theta = 27^\circ 15'$. Геометричне розташування граней кристала зображено на рис. 1.24.

1.8.2 Розрахунок умов фазового синхронізму для тіогалата срібла.

Використання кристала тіогалата срібла дозволяє в існуючій схемі нелінійного перетворення частот отримати тільки різницеву частоту між хвилею нагнітання і хвилею ПЧ випромінювання. Однак для задачі вимірювання довжини хвилі перетвореного випромінювання краще, щоб перетворення здійснювалось у видимий діапазон. Цього можна досягти, використовуючи сумарне перетворення. Для такого перетворення використовується кристал тіогалата срібла.

Тіогалат срібла ($AgGaS_2$) – це від'ємний одноосьовий кристал, клас симетрії 42 m, діапазон прозорості 0,5 – 13 мкм. Дисперсійні залежності показників заломлення описуються наступними формулами:

$$n_0^2 = 5,728 + \frac{0,2410}{\lambda^2 - 0,087} - 0,00210 \cdot \lambda^2, \quad (1.100)$$

$$n_e^2 = 5,497 + \frac{0,2026}{\lambda^2 - 0,1307} - 0,00233 \cdot \lambda^2. \quad (1.101)$$

Розрахунок умов фазового синхронізму здійснюється на основі закону збереження енергії та імпульсу для сумарного перетворення частот:

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2, \quad (1.102)$$

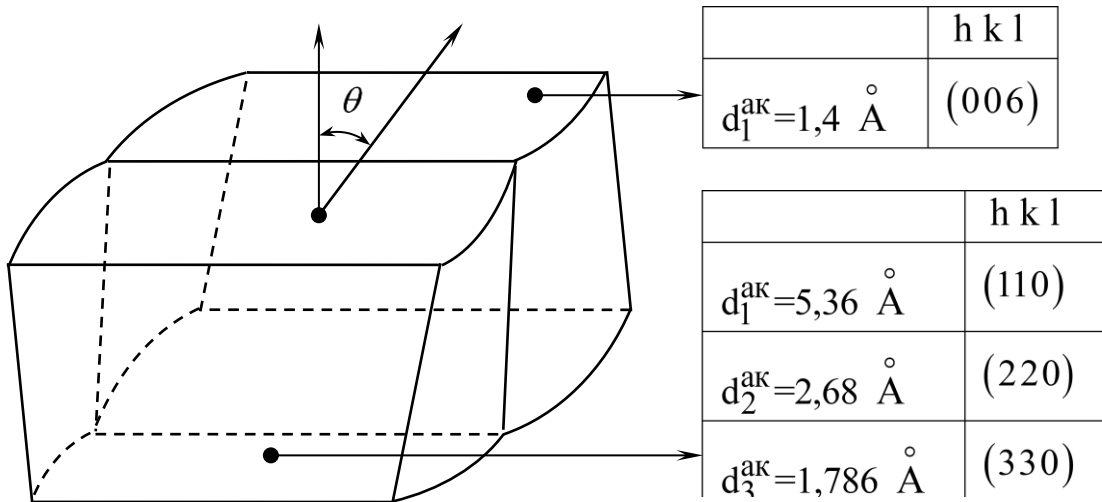
$$\vec{k}_3 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2. \quad (1.103)$$

Тип взаємодії був обраний $oo \Rightarrow e$. У такому випадку, дотримуючись вищезгаданої методики, розрахуємо нелінійний коефіцієнт в напрямку синхронізму:

$$d_{00e} = d_{36} \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(24^\circ), \quad (1.104)$$

де

$$d_{36} = 3,2 \cdot 10^{-8} \text{ см/дін}^{1/2}. \quad (1.105)$$



Параметри решітки: $\theta = 10,74-10,77$, $c = 8,64-8,67$ по різних площинах

Рисунок 1.24 – Орієнтація і відхилення кристала прустита

Формула для визначення кута θ між оптичною віссю і напрямком синхронізму аналогічна тій, що наведена в попередньому розділі, але в ній враховано, що перетворення сумарне, а не різницеве.

$$\theta = \frac{180}{\pi} \cdot \arcsin \left(\frac{\left(\frac{n_0^2(\lambda_3)}{n^2(\lambda_1, \lambda_2)} - 1 \right)^{1/2}}{\frac{n_0(\lambda_3)}{n_e(\lambda_3)} - 1} \right). \quad (1.106)$$

Розраховане значення кута θ складає 67° . Геометричне розташування граней кристала зображено на рис. 1.25.

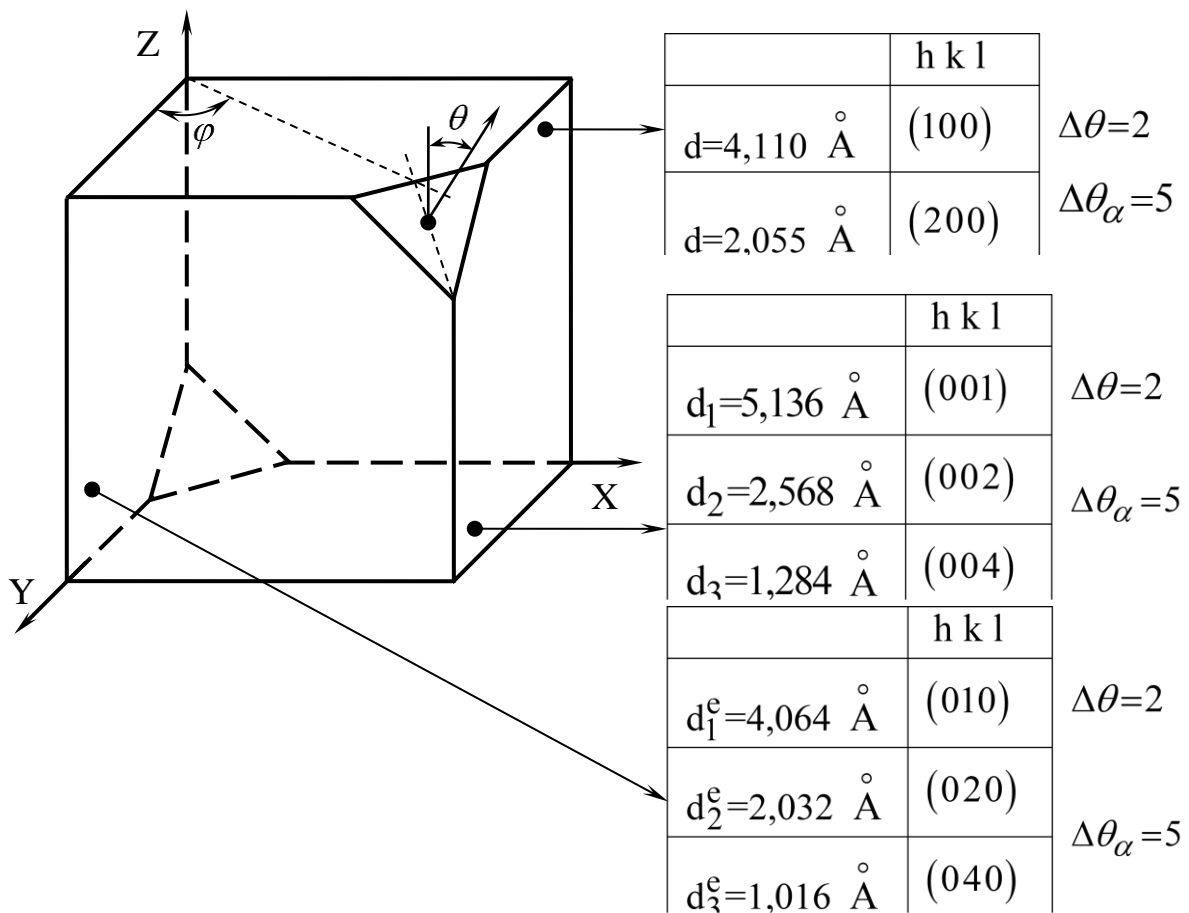


Рисунок 1.25 – Орієнтація і відхилення титаната срібла

1.9 Контрольні запитання і завдання

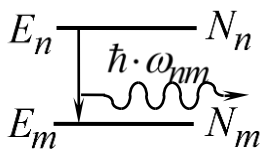
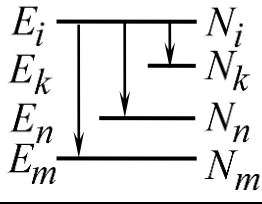
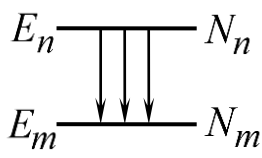
1. Які одиниці використовують для характеристики електромагнітного випромінювання?
2. Які стани квантової частинки називають стаціонарними, основними й збудженими?
3. Що таке енергетичний спектр квантової системи?
4. Які переходи називають спонтанними? Яку особливість вони мають?
5. Які переходи називають індукованими?

6. Які властивості мають індуковані переходи?
7. Які переходи називають безвипромінювальними?
8. Що таке коефіцієнти Ейнштейна?
9. Сформулюйте задачу взаємодії випромінювання з речовиною.
10. У чому полягає суть розв'язання задачі взаємодії випромінювання з речовиною?
11. Напишіть вираз для ймовірності переходу між станами у дворівневій системі. Проаналізуйте його.
12. Накресліть графік залежності ймовірності переходу між станами від частоти. Проаналізуйте графік.
13. Як пов'язані коефіцієнти Ейнштейна з квантовими характеристиками системи?
14. Який зміст має поняття «від'ємна температура»?
15. Як пов'язана величина поперечника з інтенсивністю випромінювання та імовірністю індукованого переходу?
16. За яких значень (позитивних чи від'ємних) коефіцієнта поглинання можливе підсилення в квантовій системі?
17. У чому полягає фізична суть ефекту насичення?
18. Що таке природна ширина лінії?
19. Напишіть вираз, який визначає форму лінії Лоренца.
20. Напишіть вираз, який визначає форму лінії Гаусса.
21. Які фактори визначають ширину спектральної лінії частинки речовини, що перебуває в газоподібному стані?
22. Які фактори визначають ширину спектральної лінії частинки в твердих квантових середовищах (кристали, стекла)?
23. У чому полягає відмінність між однорідно- та неоднорідно-розширеними лініями?
24. Які процеси називаються релаксаційними?
25. Перелічіть характеристики лазерного випромінювання.
26. Чим пояснити високий ступінь монохроматичності лазерного випромінювання?
27. Наведіть означення просторової й часової когерентності.
28. Як пов'язані між собою довжина й час когерентності?
29. Опишіть високонапрявлений лазерний пучок.
30. Наведіть означення яскравості.

1.10 Задачі для самостійного розв'язку

1. Хвиля, що її випромінює гелійово-неоновий лазер, має довжину $\lambda_{\text{He-Ne}} = 0,6328$ мкм; довжина хвилі, випромінювана мазером на пучку атомів водню, $\lambda_{\text{H}} = 21$ см. У скільки разів ймовірність спонтанного випромінювання лазера більша, ніж для мазера на атомах водню?
2. Заповнити табл. 1.3.

Таблиця 1.3

Тип переходу	Графічне зображення	Імовірність переходу	Середній час життя частинок
1	2	3	4
Спонтанний між двома рівнями		$\frac{dW_{nm}^{cn}}{dn} = A_{nm}$	$\tau_n = \frac{1}{A_{nm}}$
Спонтанний у багаторівневій системі			
Індукований з вбиранням кванта			
Індукований з випромінюванням енергії			
Безвипромінювальний			
Спонтанний, індуктований, безвипромінювальний			

3. Два збуджених рівні квантової системи перебувають у термодинамічній рівновазі. Визначити відносну населеність верхнього рівня в порівнянні з нижнім для енергетичних проміжків між рівнями, які відповідають частотам генерації квантових приладів: мазерів на пучку атомів водню ($\lambda = 21$ см), на пучку молекул аміаку ($\lambda = 1,25$ см), на парамагнітних іонах хрому ($Al_2O_3:Cr^{3+}$; $\lambda = 3,2$ см), вуглекислого газу (CO_2 ; $\lambda = 10,6$ мкм), рубінового ($Al_2O_3:Cr^{3+}$; $\lambda = 0,6943$ мкм) та аргонового (Ar ; $\lambda = 0,45$ мкм), лазерів при температурах $T = 300$ К, $T = 77$ К, $T = 4,2$ К, $T = 2$ К.

Вказівка. Результати розрахунку подати у вигляді табл. 1.4.

Таблиця 1.4

T, К	$\lambda = 21 \cdot 10^{-2}$, м	$3 \cdot 10^{-2}$	$1,25 \cdot 10^{-2}$	$10,6 \cdot 10^{-6}$	$0,6943 \cdot 10^{-6}$	$0,45 \cdot 10^{-6}$
300						
77						
4,2						
2						

4. Випромінювані хвилі мають довжини 43, 10, 3, 1,25, 0,3 см. Обчислити різницю енергій рівнів, між якими відбуваються ці переходи. Зазначити частоти відповідних випромінювань. Результати подати у вигляді табл. 1.5.

Таблиця 1.5

λ , м	$43 \cdot 10^{-2}$	$10 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$1,25 \cdot 10^{-2}$	$0,3 \cdot 10^{-2}$
$\nu = \frac{c}{\lambda}$, Гц					
$\Delta E = h \cdot \nu$, еВ					

5. Для обчислених у задачі 4 різниць енергій двох рівнів, між якими відбуваються переходи, визначити рівноважну різницю населеностей при $T = 300$ К і $T = 4,2$ К, віднесено до загальної кількості частинок у системі, припустивши, що $g_1 = g_2$.

Примітка. Результати подати у вигляді табл. 1.6.

Таблиця 1.6

ΔE , еВ	
$T = 300$, К	
$T = 4,2$, К	

6. У табл. 1.7 наведено робочі речовини твердотільних лазерів і значення енергій верхнього та нижнього рівнів. Обчислити довжину хвилі робочого переходу.

Таблиця 1.7

Робоча речовина лазера	Робочий перехід	Енергія нижнього лазерного рівня, см ⁻¹	Енергія верхнього лазерного рівня	Довжина хвилі, λ , мкм
$Al_2O_3 : Cr^{3+}$	$\bar{E} \rightarrow {}^4A_2$	0,38	14418	
$YAG : Nd^{3+}$	${}^4F_{3/2} \rightarrow {}^4I_{11/2}$	2002	143,6	
$CaWO_4 : Dy^{2+}$	${}^5I_7 \rightarrow {}^4I_{11/2}$	35	4272688	
$CaF_2 : Sm^{2+}$	${}^5D_0 \rightarrow {}^7F_1$	263	14548,714	
$NaLa(\dots) : H^{3+}$	${}^5I_7 \rightarrow {}^5I_8$	250	5128,05	
$LiF_4 : Pr^{3+}$	${}^3P_0 \rightarrow {}^3H_4$	0	20876,862	

7. Відношення населеностей N_2/N_1 двох рівнів, які перебувають у термодинамічній рівновазі при $T = 300$ К, становить $1/e$. Обчислити частоту випромінювання ν , яка відповідає переходові між цими рівнями. За діаграмою (рис. 1.1) визначити, в яку ділянку спектра електромагнітних коливань потрапляє випромінювання такої частоти. Припустити, що $g_1 = g_2 = 1$.

8. Розрахувати дипольні моменти лазерних переходів для довжин хвиль λ та імовірностей спонтанних переходів A_{nm} , заданих у табл. 1.8.

Таблиця 1.8

λ , мкм	1,6	1,36	1,06	0,694
A_{nm} , с ⁻¹	15	433	1940	300
d_{nm} , СГС				

Вказівка. Використати значення сталої Планка $h = 6,62 \cdot 10^{-27}$ ерг.с; довжини хвиль виразити у сантиметрах; результати подати у вигляді табл. 1.8.

9. Знайти швидкість переходу між станами в дворівневій системі:

$$W_{mn} = \frac{|a_n(t)|^2}{t} = 2 \cdot \pi \cdot |\vec{d}_{mn} \cdot \vec{E}_0 / (2 \cdot \hbar)|^2 \cdot \delta(\omega_{mn} - \omega).$$

10. Проаналізувати вираз для ймовірності переходу $|a_n(t)|^2$; побудувати графік залежності ймовірності вимушеного переходу в дворівневій системі від частоти.

11. У системі з двох енергетичних рівнів населеність верхнього та нижнього рівнів відповідно дорівнює $1 \cdot 10^{16}$ см⁻³ та $0,5 \cdot 10^{16}$ см⁻³. Кратність виродження верхнього рівня становить 2, нижній – невироджений. Чи можливе в цій системі підсилення? Поглинання?

12. Обчислити поперечник (переріз) переходу для лазерних переходів, параметри яких наведено в табл. 1.9.

Таблиця 1.9

Параметри	$Al_2O_3 : Cr^{3+}$	$Y_3Al_5O_{12} : Nd^{3+}$	CO_2	$He - Ne$
λ , мкм	0,6943	1,06	10,6	1,15
$\Delta\nu$, ГГц	330	195	1	0,9
τ^{cn} , с	4,8 мс	230 мкс	$3 \cdot 10^{-6}$ мкс	10^{-4}
n	1,76	1,82	1	1

13. Обчислити переріз поглинання іонів Cr^{3+} у рубіні з концентрацією $5 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$, коли на довжині хвилі 0,54 мкм інтенсивність світла, яке пройшло крізь пластину завтовшки 0,5 см, зменшується в $22 \cdot 10^3$ разів.

14. Обчислити час життя верхнього лазерного рівня рубінового лазера ($\lambda = 0,6943 \text{ мкм}$), якщо ефективний переріз генераційного переходу становить $2,5 \cdot 10^{-20} \text{ см}^2$, а інтенсивність насичення 2 кВт/см^2 .

15. Хвиля, що її випромінює $YAG:Nd^{3+}$ – лазер, має довжину 1,06 мкм; поперечний переріз цього переходу $\sigma = 3,5 \cdot 10^{-19} \text{ см}^2$, час життя $\tau = 0,23 \text{ мс}$. Обчислити інтенсивність насичення.

16. Побудувати графік зміни інтенсивності хвилі під час проходження її крізь середовище у випадку поглинання й підсилення.

17. Розрахувати природну ширину лінії для довжин хвиль, заданих у табл. 1.10.

Таблиця 1.10

Довжина хвилі – λ_{nm}	$\Delta \nu_{nm}$	
	$d_{nm} \approx 10^{-18} \text{ СГС}$	$d_{nm} \approx 10^{-20} \text{ СГС}$
21 см		
1,25 мм		
3 мм		
10,6 мкм		
1,06 мкм		
0,63 мкм		
0,3 мкм		

Примітка. Усі фізичні величини, що їх містить вираз для A_{nm} , треба подати в одній системі; результати подати у вигляді табл. 1.10.

18. Визначити, у скільки разів відрізняється доплерівськи розширена лінія в атомі неона ($\lambda_{Ne} \approx 0,63 \text{ мкм}$) і молекулі CO_2 ($\lambda_{CO_2} = 10,6 \text{ мкм}$ при $T = 400 \text{ К}$.)

19. Природна ширина лінії генераційного переходу CO_2 – лазера ($\lambda_{CO_2} = 10,6 \text{ мкм}$) становить 50 МГц. Чому дорівнює спонтанний час життя верхнього лазерного рівня?

20. Визначити величину матрицевого елемента дипольного моменту для лазерних переходів, наведених у таблиці 1.9.

Вказівка. Вважати перехід з верхнього лазерного рівня на нижній спонтанним; одержані значення занести в табл. 1.11.

21. Визначити повну ширину однорідно розширеної лінії, яка відповідає лазерному переходові в неоні з $\lambda = 0,633$ мкм, коли відомо, що $\Delta\nu_{\text{прир}} \approx 20$ МГц і $\Delta\nu_{\text{зітк}} \approx 0,64$ МГц. Яку форму має спільна лінія?

22. Перехід, який відповідає випромінюванню $He - Ne$ - лазера з $\lambda = 1,15$ мкм, має доплерівську ширину $\Delta\nu = 9 \cdot 10^8$ Гц. Час життя верхнього рівня $\tau \approx 10^{-7}$ с. Обчислити значення перерізу переходу, вважаючи, що час життя лазерного переходу дорівнює повному часові життя верхнього рівня ($n = 1$).

Таблиця 1.11

Лазерний перехід на довжинах хвиль λ , мкм	Агрегатний стан	Час життя верхнього лазерного рівня τ , с	$ d_{nm} $, СГС
$Ne - He$ (0,6328)	Газ	$22 \cdot 10^{-9}$	
Ar^+ (0,4880)	Газ	$9 \cdot 10^{-9}$	
CO_2 (10,6)	Газ	$2,4 \cdot 10^{-3}$	
$Al_2O_3 : Cr^{3+}$ (0,6943)	Кристал	$3 \cdot 10^{-3}$	
$YAG : Nd^{3+}$ (1,06448)	Кристал	$0,2 \cdot 10^{-3}$	
Скло Nd^{3+} (1,06)	Скло	$(0,06 - 0,8) \cdot 10^{-3}$	
F_A - центри у KCl (2,7)	Кристал	$8 \cdot 10^{-8}$	
Родамін 6G (0,6)	Розчин	$5 \cdot 10^{-9}$	

23. Знайти ширину лінії Лоренца, зображеної на рис. 1.9.

Примітка. Скористатися співвідношенням

$$g_L(\Delta\omega) = \frac{\gamma}{2\pi} \left[(\omega - \omega_{nm})^2 + \gamma^2/4 \right]^{-1}.$$

Знайти точку максимальної інтенсивності лінії Лоренца і точки, в яких вона спадає вдвічі.

24. Обчислити ступінь монохроматичності випромінювання $He - Ne$ - лазера, якщо $P = 1$ мВт, $\lambda = 0,63$ мкм, $\Delta\nu_P = 10^6$ Гц, $L = 1$ м.

25. Порівняти довжину когерентності натрійової лампи, що має ширину смуги випромінювання $\Delta\nu_{Na} = 10^{10}$ Гц, і лазера, в якому $\Delta\nu_{лаз} = 30$ МГц.

26. Обчислити ступінь когерентності світлового поля, що мав напруженість $E_1(t)$ і $E_2(t)$ в один і той самий момент часу в різних точках P_1 і P_2 (див. рис. 1.15).

Примітка. Світло – лінійно поляризоване.

27. Розв'язати задачу 26 для випадку квазімонохроматичного світла.

Примітка. Припустити, що

$$E_1 = E_{01} \cdot \exp(i \cdot (\omega_0 \cdot t + \varphi_1(t))),$$

$$E_2 = E_{02} \cdot \exp(L \cdot (\omega_0 \cdot t + \varphi_2(t))).$$

28. Обчислити яскравість випромінювання рубінового лазера, який випромінює на довжині хвилі $\lambda = 0,694$ мкм потужність 100 Вт з діаметром пучка на вихідному дзеркалі 10 мм.

Примітка. Використати для розрахунків співвідношення $\alpha = (\pi \cdot \theta^2) / 4$, яке пов'язує тілесний кут α (у ср) з плоским кутом θ (рад).

Перелік посилань до розділу 1

1. Бутиков Е.И. Оптика: учеб. пособие для студентов физических специальностей вузов. 2-е изд., перераб. и доп. СПб.: Невский Диалект; БХВ-Петербург, 2003. 480 с.
2. Дудкин В.И., Пахомов Л.Н. Квантовая электроника. Приборы и их применение: Учеб. пособие М.: Техносфера, 2006. 432 с.
3. Розеншер Э., Винтер Б. Оптоэлектроника. М.: Техносфера, 2004. 592 с.
4. Быков В.П., Силичев О.О. Лазерные резонаторы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 320 с.
5. Игнатов А.Н. Оптоэлектронные приборы и устройства: учеб. пособие. М.: Эко-Трендз, 2006. 272 с.
6. Цернике Ф., Мидвинтер Дж. Прикладная нелинейная оптика. Мир: М., 1976.
7. Ахманов С.А., Хохлов Р.В. Проблемы нелинейной оптики. М.: ВИНТИ, 1964.
8. Hulme K.F. Rept. Progr. Phys., 1973. V. 36. P. 497.
9. Никогосян Д.Н. Квантовая электроника. 1977. Т. 4. С. 5.
10. Warner J. Opto-Electrou, 1969, V. 1. P. 25.
11. Воронин Э.С. и др. ЖЭТФ. 1970. Т. 58. С. 51.
12. Ильинский Ю.А., Янайт Ю.А. Известие вузов. Сер. "Радиофизика", 1970. Т. 13. С. 37.
13. Бломберген Н. Нелинейная оптика. М.: Мир, 1966.
14. Boyd G.D., Klelnman D.A. J. Appl. Phys., 1968. V. 39. P. 3597.
15. Арумов Г.П., Воронин Э.С. Квантовая электроника. 1974. Т.1. С. 565.
16. Арумов Г.П., Воронин Э.С. Квантовая электроника. 1973. Мб 5. С. 95.

2 ОПТИЧНІ РЕЗОНАТОРИ

2.1 Основні властивості оптичних резонаторів

Для електромагнітних хвиль сантиметрового діапазону як коливальні системи широко застосовуються об'ємні резонатори. Якщо відповідно до зміни робочої довжини хвилі пропорційно змінювати всі розміри об'ємного резонатора, то при переході до більш довгих хвиль можуть виходити більш громіздкі системи. Це, зрештою, змушує переходити до звичайних коливальних контурів, які складаються з конденсаторів і котушок самоіндукції. При переході до більш коротких хвиль об'ємні резонатори стають усе більш мініатюрними, і їх добротність падає; тому ефективність об'ємних резонаторів у міліметровому і субміліметровому діапазонах тим нижче, чим коротше довжина хвилі.

Переходячи до більш коротких хвиль, можна, залишаючи розміри об'ємного резонатора постійними, використовувати коливання з більш високими індексами (коливання вищих типів), власні частоти яких вище, ніж у коливань з невеликими індексами, застосованих у сантиметровому діапазоні. Однак цим шляхом далеко просуватися не можна, тому що спектр власних частот замкнутих резонансних об'ємів при переході до більш високих частот згущається. Число коливань, які припадають на інтервал частот $\Delta\omega$:

$$\Delta N = \frac{V}{2 \cdot \pi^2 \cdot c^3} \cdot \omega^2 \cdot \Delta\omega, \quad (2.1)$$

де V – об'єм резонатора;
 c – швидкість світла.

Ця асимптотична формула (тим більш точна, чим вище кругова частота ω) у фізичній літературі зазвичай називається формулою Релея–Джинса, вона легко виводиться для об'єму V прямокутної форми і для інших об'ємів правильної форми (сфера, круговий циліндр). Для резонансних об'ємів довільної форми формула (2.1) разом з поправковими членами виведена Курантом, тому в математичній літературі її називають теоремою Куранта. Як порівняння, наведемо аналогічні формули:
для двовимірної області

$$\Delta N = \frac{S}{2 \cdot c^2} \cdot \omega \cdot \Delta\omega, \quad (2.2)$$

де S – площа області;
– і для одновимірної області

$$\Delta N = \frac{L}{2 \cdot c} \cdot \Delta\omega, \quad (2.3)$$

де L – довжина області, що є інтервалом довжиною L .

У цих формулах врахований векторний характер електромагнітних полів, тобто наявність двох незалежних поляризацій; для скалярних коливань праві частини цих формул мають бути помножені на $1/2$.

Як видно з формули (2.3), згущення спектра для одновимірних областей відсутнє; власні частоти одновимірної резонансної системи, наприклад струни, утворюють еквідистантний спектр, тобто, простіше кажучи, арифметичну прогресію. Для двовимірних і особливо тривимірних областей спектр при переході до більш високих частот згущається. Це перешкоджає застосуванню коливань вищих типів, тому що коефіцієнт загасання, викликаного Джоулевіми втратами в стінках резонатора, при їхній постійній провідності пропорційний $\sqrt{\omega}$, та резонансні криві резонатора фіксованих розмірів при досить високих частотах перекриваються і його резонансні властивості сходять нанівець. Як свідчить формула (2.1), для високих частот, за яких довжина хвилі мала порівняно з усіма розмірами резонатора, спектр взагалі не залежить від форми резонатора, а визначається тільки його об'ємом.

Ці загальні міркування змушують шукати нові коливальні системи, до яких формула (2.1) була б незастосовна і що мали б більш розріджений спектр власних частот, ніж об'ємні резонатори. Такі системи майже одночасно запропонували О.М. Прохоров, а також А. Шавлов і Ч. Таунс у вигляді двох паралельних і однакових дзеркал, розташованих одне проти одного.

Колівання у відкритих системах можуть реалізуватися завдяки одному з трьох фізичних явищ: 1) відбиттю від країв резонатора; 2) утворенню каустичних поверхонь; 3) повному внутрішньому відбиттю.

2.2 Розрахунок розподілу поля на дзеркалах відкритого резонатора

2.2.1 Метод інтегральних рівнянь

Цей метод дозволяє досліджувати електромагнітні коливання, їх амплітуди, частоти і втрати енергії коливань у відкритому резонаторі, утвореному двома площинами, оберненими відбиваючими поверхнями одна до одної, усередину резонатора. Коефіцієнт відбиття кожного дзеркала вважається досить великим (до 100 %).

Розглядатимемо хвилі, що поширюються між двома дзеркальними поверхнями, відбиваючись за чергою від кожної з них (рис. 2.1). Спочатку приймемо довільний початковий розподіл поля біля першого дзеркала й обчислимо поле, що виникло біля другого дзеркала в результаті першого проходу хвилі.

Ці обчислення мають бути повторені багаторазово для наступних проходів.

Нас цікавлять три такі запитання:

– Чи наближається після багатьох проходів відповідний розподіл поля до стаціонарного (тобто чи залишаються незмінними від проходу до проходу амплітуда і фаза поля на поверхні дзеркала)?

– Якщо встановлюється стаціонарний розподіл поля, то чи існують інші стаціонарні рішення?

– Які втрати пов'язані з цими рішеннями?

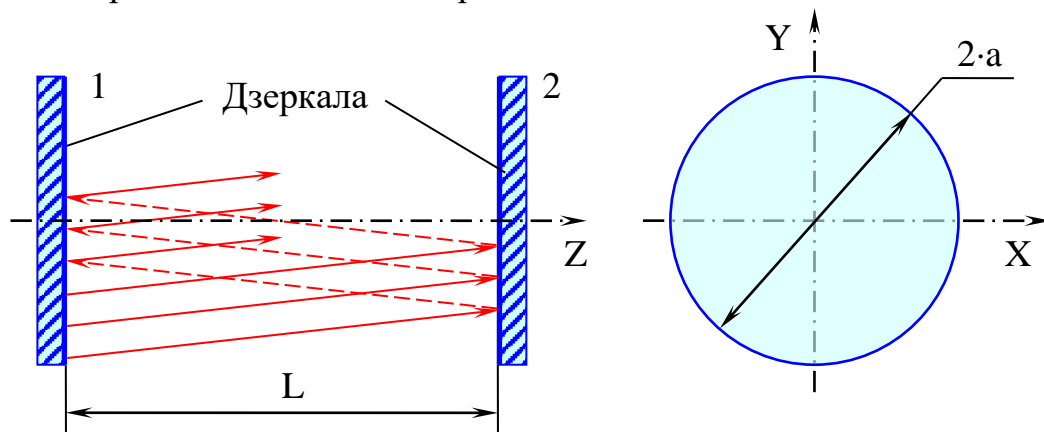


Рисунок 2.1 – Схема відкритого оптичного резонатора

Для розрахунку електромагнітного поля біля одного з дзеркал у вигляді інтеграла від поля біля іншого дзеркала скористаємося принципом Гюйгенса – Френеля, який формулюється наступним чином.

Кожна точка хвильового фронту може розглядатися як мале джерело нових хвиль. Хвилі, що утворюються цими малими джерелами, називаються вторинними, і передбачається, що положення основної (чи первинної) хвилі в більш пізній момент часу визначається обвідною вторинних хвиль.

Це припустимо, якщо розміри дзеркала великі в порівнянні з довжиною хвилі і якщо поле дуже близьке до поперечного електромагнітного поля й однорідно поляризоване в одному напрямку (тобто вектор напруженості електричного поля не змінює свого напрямку з часом).

Кількісне описання принципу Гюйгенса–Френеля дається інтегралом Кірхгофа:

$$u_P = \frac{i \cdot k}{4\pi} \cdot \int_{S_A} u_a \cdot \frac{e^{-i \cdot k \cdot r}}{r} \cdot (1 + \cos(\Theta)) dS, \quad (2.4)$$

де u_P – поле в зоні Френеля, обумовлене освітленим отвором А;

u_a – поле на отворі;

$k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda}$ – хвильове число або стала розповсюдження в середовищі;

r – відстань від точки на площині отвору до точки спостереження;

Θ – кут, який r утворює з нормаллю до поверхні отвору (аналог області, виділеної на поверхні будь-якого з дзеркал у випадку резонатора з плоскими паралельними дзеркалами з прямокутною або круглою апертурою).

Припустимо, що біля одного дзеркала резонатора (рис. 2.2) збуджується початкова хвиля з розподілом u_p і що вона може поширюватися, відбиваючись від кожного з них. Після q проходів розподіл поля біля одного з дзеркал подається виразом (2.4), де u_p необхідно замінити на u_{p+1} – поле розглянутого дзеркала, а u_a – на u_q – поле біля протилежного дзеркала, яке викликає появу u_{q+1} .

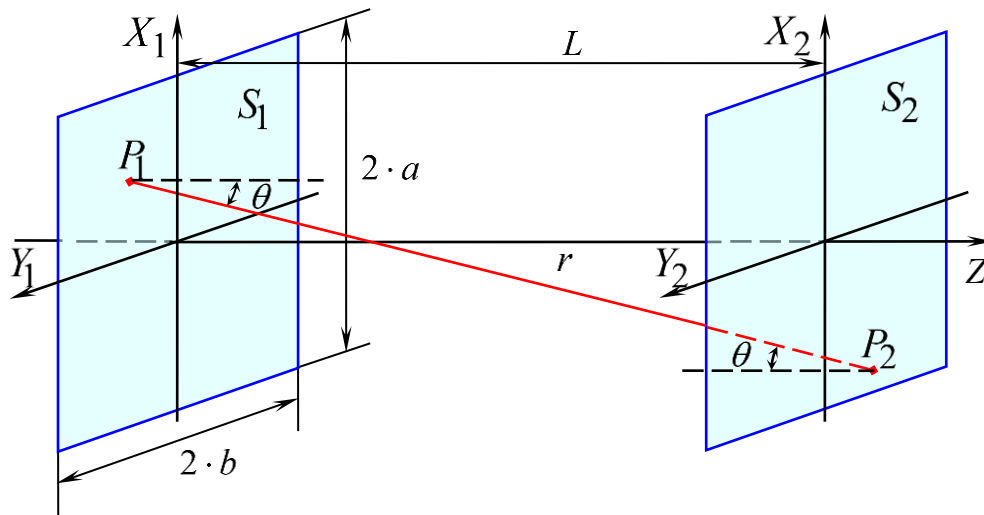


Рисунок 2.2 – Схема збудження початкового розподілу фронту хвилі між дзеркалами оптичного резонатора

Після численних проходів розподіл поля на дзеркалах піддаватиметься незначним змінам від відбиття до відбиття і згодом стає стаціонарним. Коли встановлюється стаціонарний режим, то:

$$u_p(x, y) = \left(\frac{1}{\gamma}\right)^P \cdot v(x, y), \quad (2.5)$$

де P – число відбиттів випромінювання від поверхні дзеркал;

$v(x, y)$ – функція, що описує розподіл поля на дзеркалах і відповідає нормальним типам коливань у резонаторі;

$$\gamma = e^{\alpha + i \cdot (\beta + k \cdot L)}, \quad (2.6)$$

де γ – комплексна стала загасання.

Натуральний логарифм $\ln(\gamma)$ – описує загасання і фазовий зсув випромінювання за один прохід.

$$\ln(\gamma) = \alpha + i \cdot (\beta + k \cdot L). \quad (2.7)$$

Дійсна частина $\ln(\gamma) - \text{Re}(\ln(\gamma)) = \alpha$ – описує дифракційні втрати в резонаторі, а уявна – $\text{Im}(\ln(\gamma)) = \beta + k \cdot L$ – фазовий зсув, який дорівнює сумарній зміні фази за рахунок відбиття від дзеркал (β) і шляху, який пройшло випромінювання між дзеркалами ($k \cdot L$).

В задачі розглядається стаціонарний режим, а $v(x, y)$ – функція сталого розподілу, тому вона не змінюється від відбиття до відбиття, тобто:

$$v_{P+1}(x, y) = v_P(x, y). \quad (2.8)$$

Підставляючи значення u_P з (2.5) у (2.4), отримає

$$\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{P+1} v_{P+1}(x_2, y_2) = \frac{i \cdot k}{4\pi} \cdot \left(\frac{1}{\gamma}\right)^P \cdot \int_{S_A} v_P(x_1, y_1) \cdot \frac{e^{-i \cdot k \cdot r}}{r} \cdot (1 + \cos(\Theta)) dS, \quad (2.9)$$

$$v_{P+1}(x_2, y_2) = \gamma \cdot \frac{i \cdot k}{4\pi} \cdot \int_{S_A} v_P(x_1, y_1) \cdot \frac{e^{-i \cdot k \cdot r}}{r} \cdot (1 + \cos(\Theta)) dS. \quad (2.10)$$

Розв'язуючи інтегральне рівняння (2.10) (невідомо функція знаходиться також і під знаком інтеграла), знаходимо його власні функції $v(x, y)$, що характеризують розподіл поля по поверхні дзеркал і відповідають стаціонарним коливанням, що можуть існувати в резонаторі.

У результаті розв'язання інтегрального рівняння (2.10) відшукуються і власні значення γ , що відповідають даним власним функціям, які визначають дифракційні втрати і фазові спотворення (а отже, і спектр випромінювання).

Таким чином, результатом розв'язання інтегрального рівняння (2.10) є знаходження його власних функцій $v(x, y)$ і відповідних їм власних значень γ .

Важливою властивістю власних функцій $v(x, y)$ є їхня ортогональність:

$$\iint_{x y} v_1(x_1, y_1) \cdot v_1(x_1, y_1) dx dy = 1, \quad \iint_{x y} v_1(x_1, y_1) \cdot v_2(x_1, y_1) dx dy = 0.$$

Фізично це означає, що коливання, які відповідають різним власним функціям $v(x, y)$, тобто різним розподілам амплітуди і фази поля по поверхні дзеркал, можуть існувати незалежно одне від одного.

Зі сказаного можна зробити наступні висновки.

Інтегральне рівняння (2.10) описує розподіл поля по дзеркалах і на будь-якій площині, перпендикулярній осі резонатора для всіх типів резонаторів.

Відмінність одного типу резонатора від іншого визначається формою поверхні дзеркал S , що, як правило, буває круглою або прямокутною.

Під час розв'язання інтегрального рівняння (2.10) зазвичай роблять наближення, що не вносять істотних похибок у результат розрахунку, спрощують його і в деяких випадках призводять до можливості отримання аналітичного розв'язку рівняння. Такими допущеннями є:

- величина r , що знаходиться в знаменнику підінтегрального виразу, всередині області інтегрування, змінюється дуже слабко і може бути замінена сталою $r = L$;

- Θ – кут, який r утворює з нормаллю до поверхні дзеркала, прагне до нуля, оскільки нормаль до площини дзеркала збігається (або наближається) з віссю резонатора, тобто $\cos(\Theta) \rightarrow 1$;

- у виразі $e^{-i \cdot k \cdot r}$, величину r не можна вважати постійною, тому що цей множник $(e^{-i \cdot k \cdot r})$ пробігає всі можливі значення по одиничному колу на комплексній площині вже при зміні r на величину довжини хвилі.

Особливістю реальних оптичних резонаторів є і та обставина, що поперечні розміри дзеркал значно менше довжини резонатора і радіусів кривизни відбиваючих поверхонь ($r \rightarrow \infty$).

Перетворимо інтегральне рівняння (2.10) з урахуванням прийнятих допущень.

Величину r , що визначає відстань між довільними точками першого і другого дзеркал, можна записати в такому вигляді:

$$r = \sqrt{(z_2 - z_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, \quad (2.11)$$

але $z_2 - z_1 = L$ – довжина резонатора.

Відповідно до прийнятих допущень:

$$L \gg x_2 - x_1 \text{ і } L \gg y_2 - y_1, \quad (2.12)$$

тому вираз (2.11) можна розкласти в ряд за малими параметрами x/L і y/L . В результаті розкладання отримає:

$$r = L + \left(\frac{1}{2 \cdot L} \right) \cdot \left((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \right) + \varepsilon. \quad (2.13)$$

Під час виконання умови $k \cdot \varepsilon \ll 2 \cdot \pi$ залишковим членом ряду ε можна знехтувати. Оскільки ε є знакозмінним рядом, що збігається, його величина не перевищує першого члена [0].

Звідси випливає, що для виконання умови $k \cdot \varepsilon \ll 2 \cdot \pi$ достатньо, щоб виконувалася нерівність $(k \cdot a^4) / L^3 \ll 2\pi$, ця умова виконується практично завжди для реальних резонаторів (це значить, що наступні члени ряду (2.13) дають надто малий фазовий набіг, щоб ним можна було знехтувати).

Отже, для плоскопаралельного резонатора

$$r = L + \left(\frac{1}{2 \cdot L} \right) \cdot \left((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \right). \quad (2.14)$$

Підставимо в інтегральне рівняння значення r :

$$v(x_2, y_2) = \gamma \cdot \frac{i \cdot k}{2 \cdot \pi \cdot L} \times \\ \times \int_x \int_y v(x_1, y_1) \cdot \exp \left[-i \cdot k \left\{ L + \left(\frac{1}{2 \cdot L} \right) \left[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \right] \right\} \right] dx_1 dy_1, \quad (2.15)$$

$$v(x_2, y_2) = \gamma \cdot \frac{i \cdot k}{2 \cdot \pi \cdot L} \cdot e^{-i \cdot k \cdot L} \times \\ \times \int_x \int_y v(x_1, y_1) \exp \left[-\frac{i \cdot k}{2 \cdot L} \cdot \left((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \right) \right] dx_1 dy_1, \quad (2.16)$$

З (2.16) видно, що ядро інтегрального рівняння можна подати у вигляді добутка двох функцій: $K_x(x_1, x_2)$ і $K_y(y_1, y_2)$, кожна з яких залежить тільки від однієї змінної інтегрування x_1 або y_1 . Отже, в інтегральному рівнянні (2.16) можна провести розділення змінних і звести його до двох одновимірних інтегральних рівнянь.

Подавимо $v(x_1, y_1)$, $v(x_2, y_2)$ і $\gamma(x_2, y_2)$ в такий спосіб:

$$v(x_1, y_1) = v_m(x_1) \cdot v_n(y_1), \quad (2.17)$$

$$v(x_2, y_2) = v_m(x_2) \cdot v_n(y_2), \quad (2.18)$$

$$\gamma(x_2, y_2) = \gamma_m(x_2) \cdot \gamma_n(y_2). \quad (2.19)$$

Підставимо ці значення в інтегральне рівняння (2.16) і отримаємо:

$$v_m(x_2) \cdot v_n(y_2) = \gamma_m(x_2) \cdot \gamma_n(y_2) \cdot \frac{i \cdot k}{2 \cdot \pi \cdot L} \times$$

$$x e^{-i \cdot k \cdot L} \cdot \iint_{xy} v_m(x_1) \cdot v_n(y_1) \cdot \exp\left[-\frac{i \cdot k}{2 \cdot L} \cdot \left((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\right)\right] dx_1 dy_1, \quad (2.20)$$

$$v_m(x_2) = \gamma_m(x_2) \cdot \sqrt{\frac{i \cdot k}{2 \cdot \pi \cdot L} \cdot e^{-i \cdot k \cdot L}} \cdot \int_x v_m(x_1) \cdot \exp\left[-\frac{i \cdot k}{2 \cdot L} \cdot (x_2 - x_1)^2\right] dx_1, \quad (2.21)$$

$$v_n(y_2) = \gamma_n(y_2) \cdot \sqrt{\frac{i \cdot k}{2 \cdot \pi \cdot L} \cdot e^{-i \cdot k \cdot L}} \cdot \int_x v_n(y_1) \cdot \exp\left[-\frac{i \cdot k}{2 \cdot L} \cdot (y_2 - y_1)^2\right] dy_1, \quad (2.22)$$

Позначимо:

$$K_x(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{i \cdot k}{2 \cdot \pi \cdot L}} \cdot \sqrt{e^{-i \cdot k \cdot L}} \cdot \exp\left[-\frac{i \cdot k}{2 \cdot L} \cdot (x_2 - x_1)^2\right], \quad (2.23)$$

$$K_y(y_1, y_2) = \sqrt{\frac{i \cdot k}{2 \cdot \pi \cdot L}} \cdot \sqrt{e^{-i \cdot k \cdot L}} \cdot \exp\left[-\frac{i \cdot k}{2 \cdot L} \cdot (y_2 - y_1)^2\right], \quad (2.24)$$

$K_x(x_1, x_2)$ і $K_y(y_1, y_2)$ є ядра однорідного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду:

$$v_m(x_2) = \gamma_m(x_2) \cdot \int_{x=-a}^{x=+a} K_x(x_1, x_2) \cdot v_m(x_1) dx_1, \quad (2.25)$$

$$v_n(y_2) = \gamma_n(y_2) \cdot \int_{y=-b}^{y=+b} K_y(y_1, y_2) \cdot v_n(y_1) dy_1, \quad (2.26)$$

Перетворимо (2.23) і (2.24). У цих виразах $k/(2 \cdot \pi) = 1/\lambda$, $\sqrt{i} = e^{\frac{i \cdot \pi}{4}}$, тому що $e^{\frac{i \cdot \pi}{2}} = e^{\left(\frac{i \cdot \pi}{4} + \frac{i \cdot \pi}{4}\right)}$, а $i = e^{\frac{i \cdot \pi}{2}} = \cos(\pi/2) + i \cdot \sin(\pi/2) = i$, у такий спосіб:

$$K_x(x_1, x_2) = \sqrt{\frac{1}{\lambda \cdot L}} \cdot e^{\frac{i \cdot \pi}{4}} \cdot \sqrt{e^{-ikL}} \cdot e^{-\frac{i \cdot k}{2 \cdot L} \cdot (x_2 - x_1)^2}, \quad (2.27)$$

$$K_y(y_1, y_2) = \sqrt{\frac{1}{\lambda \cdot L}} \cdot e^{\frac{i \cdot \pi}{4}} \cdot \sqrt{e^{-ikL}} \cdot e^{-\frac{i \cdot k}{2 \cdot L} \cdot (y_2 - y_1)^2}. \quad (2.28)$$

Отже, інтегральні рівняння (2.25) і (2.26) мають ядра, що є безперервними і симетричними, а власні функції $v_{mn} = v_m(x_2) \cdot v_n(y_2)$ інтегрального рівняння відповідають різним власним значенням $\gamma_{mn} = \gamma_m(x_2) \cdot \gamma_n(y_2)$. Ці функції ортогональні в інтервалі $[-a, +a]$ і $[-b, +b]$ [0, 0].

Власні функції $\gamma_{mn}(x, y)$, що характеризують розподіл поля по поверхні дзеркал, комплексні і визначені тільки на поверхні дзеркал. Отримати аналітичне розв'язання рівнянь (2.25) і (2.26) важко, тому ці рівняння можуть бути вирішені чисельно за допомогою комп'ютера методом послідовних наближень [0, 0].

2.2.2 Метод хвильового рівняння.

Цей метод був запропонований Л.А. Вайнштейном і заснований на розв'язанні хвильового рівняння Гельмгольца, що має вигляд [0]:

$$\nabla^2 \phi + k^2 \cdot \phi = 0, \quad (2.29)$$

за таких граничних умов:

$$-a < x < +a, \quad -b < y < +b, \quad z = \pm \frac{L}{2}, \quad (2.30)$$

і $\phi = 0$ на дзеркалах резонатора.

Розв'язок рівняння (2.29) можна записати у вигляді:

$$\phi = W(x, y, z)e^{ikz} - (-1)^q W(x, y, -z)e^{-ikz}. \quad (2.31)$$

Поставимо вимогу, щоб кожен доданок у правій частині (2.31) задовольняв рівняння (2.29).

Підставляючи розв'язок (2.31) у рівняння (2.29), отримаємо:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 W(x, y, z)}{\partial x^2} \cdot e^{ikz} + \frac{\partial^2 W(x, y, z)}{\partial y^2} \cdot e^{i \cdot k \cdot z} + \frac{\partial^2 W(x, y, z)}{\partial z^2} \cdot e^{i \cdot k \cdot z} + \\ & + i \cdot k \cdot e^{i \cdot k \cdot z} \cdot \frac{\partial W(x, y, z)}{\partial z} - k^2 \cdot e^{i \cdot k \cdot z} \cdot W(x, y, z) + \\ & + i \cdot k \cdot e^{i \cdot k \cdot z} \cdot \frac{\partial W(x, y, z)}{\partial z} + k^2 \cdot e^{i \cdot k \cdot z} \cdot W(x, y, z) = 0, \end{aligned}$$

оскільки $W(x, y, z)$ уздовж осі z змінюється повільно, то $\frac{\partial^2 W(x, y, z)}{\partial z^2}$ можна знехтувати. Зводячи подібні і скорочуючи на e^{ikz} , отримаємо:

$$\frac{\partial^2 W(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W(x, y, z)}{\partial z^2} + 2 \cdot i \cdot k \cdot \frac{\partial W(x, y, z)}{\partial z} = 0. \quad (2.32)$$

Рівняння (2.32) є параболічним, для нього граничні умови можна переписати так:

$$W(x, y, -l) = 0 \text{ при } |x| > a \text{ і } |y| > b,$$

$$W(x, y, -l) = e^{i(2 \cdot k \cdot l - \pi \cdot q)} \cdot W(x, y, l) \text{ при } |x| < a \text{ і } |y| < b, \quad (2.33)$$

Рівняння (2.32) допускає розв'язок у вигляді:

$$W(x, y, z) = W_a(x, z) \cdot W_b(y, z), \quad (2.34)$$

де $W_a(x, z)$ і $W_b(y, z)$ задовольняють рівняння:

$$\frac{\partial^2 W_a(x, z)}{\partial x^2} + 2 \cdot i \cdot k \cdot \frac{\partial W_a(x, z)}{\partial z} = 0, \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial^2 W_b(y, z)}{\partial y^2} + 2 \cdot i \cdot k \cdot \frac{\partial W_b(y, z)}{\partial z} = 0 \quad (2.36)$$

і граничні умови:

$$W_a(x, -l) = 0 \text{ при } |x| > a, \quad (2.37)$$

$$W_b(y, -l) = 0 \text{ при } |y| > b, \quad (2.38)$$

$$W_a(x, -l) = e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot P_a} \cdot W_a(x, l) \text{ при } |x| < a, \quad (2.39)$$

$$W_b(y, -l) = e^{i \cdot 2 \cdot \pi \cdot P_b} \cdot W_b(y, l) \text{ при } |y| < b. \quad (2.40)$$

Розв'язуючи рівняння (2.35) і (2.36) з граничними умовами (2.37 – 2.40) у плоскому резонаторі з прямокутною апертурою, отримаємо нормований розподіл густини потоку випромінювання на відбиваючих поверхнях, для моди TEM_{mn} у такому вигляді [0]:

– для прямокутного дзеркала

$$U_{mn}(x, y) = \left\{ \left[\begin{array}{c} \cos^2 \left[\frac{\pi \cdot (m+1) \cdot x}{2 \cdot a \cdot \left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{8 \cdot \pi \cdot N_a}} \right)} \right] \\ \sin^2 \left[\frac{\pi \cdot (m+1) \cdot x}{2 \cdot a \cdot \left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{8 \cdot \pi \cdot N_a}} \right)} \right] \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} \cos^2 \left[\frac{\pi \cdot (n+1) \cdot y}{2 \cdot b \cdot \left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{8 \cdot \pi \cdot N_b}} \right)} \right] \\ \sin^2 \left[\frac{\pi \cdot (n+1) \cdot y}{2 \cdot b \cdot \left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{8 \cdot \pi \cdot N_b}} \right)} \right] \end{array} \right] \right\}, (2.41)$$

де x і y – змінні прямокутні координати в площині дзеркала;

a і b – розміри апертури по осях x і y ;

N_a , N_b – числа Френеля, що відповідають характерним розмірам апертури;

$$N_a = \frac{a^2}{\lambda \cdot L}, \quad N_b = \frac{b^2}{\lambda \cdot L}, \quad (2.42)$$

де $\beta = 0,824$ – параметр Вайнштейна.

Функція $\cos()$ належить до парних значень індексів мод, а $\sin()$ – до непарних.

– для круглого дзеркала

$$M_{pl}(r, \varphi) = \left\{ J_p \left[\frac{V_{p(l+1)} \cdot r}{a \cdot \left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{8 \cdot \pi \cdot N}} \right)} \right] \right\}^2 \cdot (\cos(l \cdot \varphi))^2, \quad (2.43)$$

де p і l – радіальний і кутовий індекси моди;

r і φ – змінні полярні координати в перетяжці пучка;

a – радіус поперечного перерізу резонатора (перпендикулярно до осі);

J_p – функція Бесселя p -го порядку;

$V_{p(l+1)}$ – $(l+1)$ -й корінь функції Бесселя p -го порядку.

Розподіли (2.41) і (2.43) для кожної окремої моди залишаються постійними в будь-якому перерізі пучка. Однак між модами зміщення за фазою, що залежить від відстані. Тому, якщо лазер працює в багатомодовому режимі, картина розподілу може мінятися від перерізу до перерізу. Зі збільшенням відстані величина набігу фаз зменшується, і, починаючи з деякої відстані, картина розподілу інтенсивності в перерізі пучка практично не змінюється. На рис. 2.3 і 2.4 наведені картини нормованого розподілу густини потоку випромінювання для моди TEM_{00} на поверхні плоскопаралельного резонатора з прямокутними і круглими дзеркалами.

Картини нормованого розподілу густини потоку випромінювання для мод вищих типів на поверхні плоскопаралельного резонатора з прямокутними і круглими дзеркалами можуть бути розраховані за допомогою Mathcad програм, наведених в додатках А. 1 і А. 2.

Хвильовий фронт коливань, що встановлюються в плоскому резонаторі, приблизно збігається з поверхнями дзеркал резонатора і, отже, являє собою площину. Розбіжність променів у цьому випадку визначається дифракцією на апертурі резонатора. За величину розбіжності при дифракційному обмеженні приймається величина, відмічена по першому дифракційному мінімуму в один бік від осі:

$$\theta = \frac{k_d \cdot \lambda}{2 \cdot a}, \quad (2.44)$$

де $2 \cdot a$ – розмір апертури або ділянки апертури в даній меридіональній площині;

k_d – коефіцієнт, що залежить від виду розподілу густини потоку випромінювання у поперечному перерізі пучка і форми апертури.

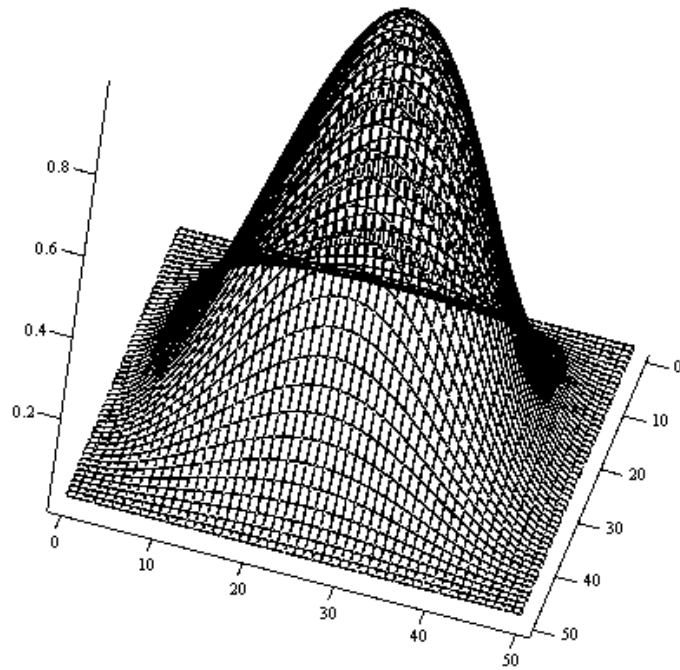
Розглянемо резонатор, складений із сферичних або із сферичного і плоского дзеркал. Відмінною особливістю розподілу густини потоку випромінювання є незалежність його поперечного розміру від розмірів поперечного перерізу резонатора. У випадку двовісної симетрії перетину резонатора вираз, який описує нормований розподіл густини потоку випромінювання у плямі для даної моди, має вигляд:

$$M_{mn}(x, y) = H_m^2\left(\sqrt{2} \cdot \frac{x}{w}\right) \cdot H_n^2\left(\sqrt{2} \cdot \frac{y}{w}\right) \cdot \exp\left(-2 \cdot \frac{x^2 + y^2}{w^2}\right), \quad (2.45)$$

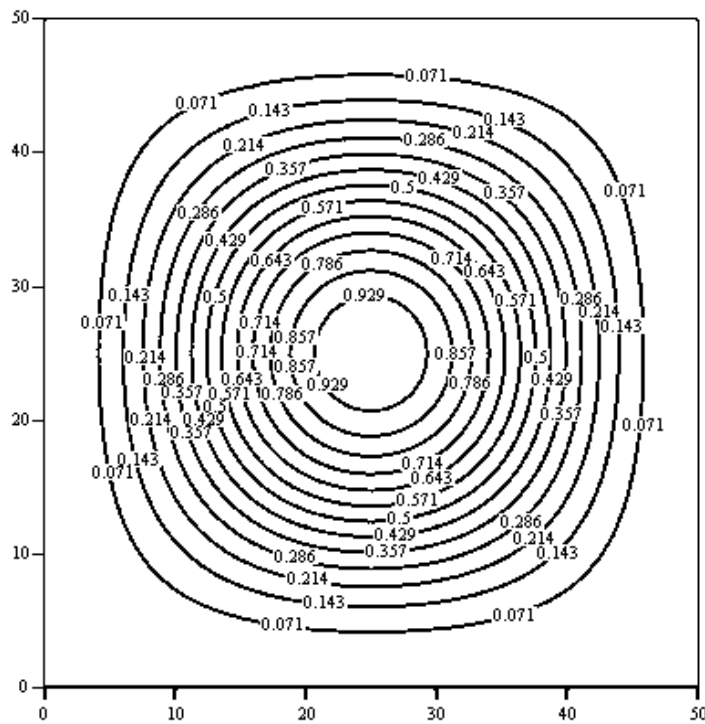
де x і y – змінні прямокутні координати в перерізі пучка;

w – параметр, що характеризує масштаб перерізу;

H_m і H_n – поліноми Ерміта, порядку, який відповідає індексу поперечної моди.

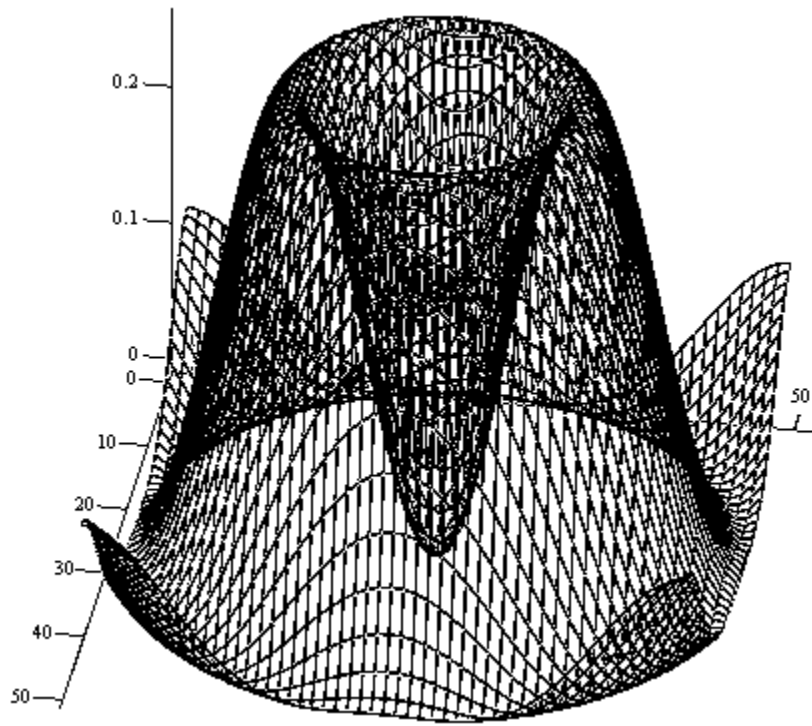


а

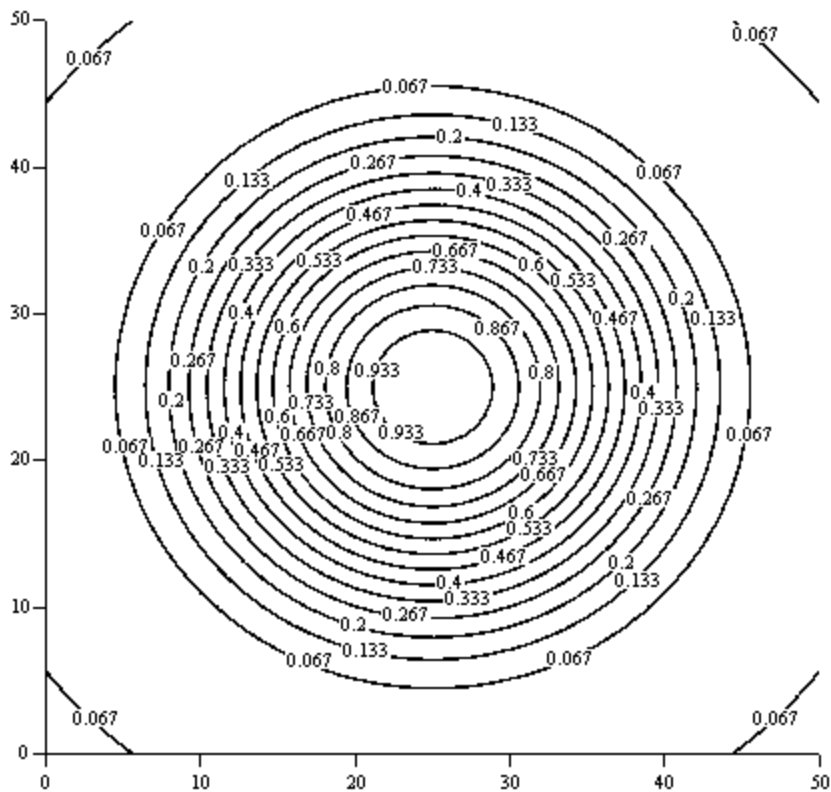


б

Рисунок 2.3 – Картина нормованого розподілу густини потоку випромінювання для моди TEM_{00} на поверхні плоскопаралельного резонатора з прямокутними дзеркалами – а, вигляд зверху – б



а



б

Рисунок 2.4 – Картина нормованого розподілу густини потоку випромінювання для моди TEM_{10} на поверхні плоскопаралельного резонатора з круглими дзеркалами – а, вигляд зверху – б

Розподіл інтенсивності при циліндричній симетрії резонатора можна записати, використовуючи циліндричну систему координат:

$$M_{pl}(r, \varphi) = \left(\sqrt{2} \cdot \frac{r}{w} \right)^{2l} \cdot \left[L_p^l \left(2 \cdot \frac{r^2}{w^2} \right) \right]^2 \cdot \exp \left(-2 \cdot \frac{r^2}{w^2} \right) \cdot (\cos(l \cdot \varphi))^2, \quad (2.46)$$

де p і l – радіальний і кутовий індекси моди;

L_p^l – поліноми Лагерра.

Як видно з виразу (2.46), розподіл густини випромінювання в основній моді при циліндричній симетрії резонатора описується функцією Гаусса і не відрізняється від випадку прямокутної симетрії. Для типів коливань вищих порядків розподіл інтенсивності має більш складний характер з періодичним чергуванням екстремумів.

Масштаб розподілу у разі як прямокутної, так і циліндричної симетрії резонатора, визначається параметром w . Величина w дорівнює відстані від осі пучка до точки, де інтенсивність в перерізі основної моди падає в e^2 разів (амплітуда в e разів). Параметр w називається розміром плями залежно від конфігурації резонатора і перерізу пучка.

Картини нормованого розподілу густини потоку випромінювання на поверхні сферичних дзеркал резонатора з циліндричною або двовісною симетрією, можна розрахувати за допомогою Mathcad програм, наведених у додатках А. 3 і А. 4.

2.3 Види оптичних резонаторів

Для того, щоб оптичний резонатор мав низькі втрати, тобто щоб в ньому існували моди з великими добротностями, необхідно виконання двох умов. По-перше, у системі має існувати сімейство променів, що, послідовно відбиваючись від обох дзеркал, не виходять за межі резонатора, не зробивши достатньо (50 ... 150) проходжень туди і назад.

Друга умова полягає в тому, що розміри резонатора мають задовольняти нерівності [0]:

$$a_1 \cdot a_2 / (\lambda \cdot L) \geq 1, \quad (2.47)$$

де a_1 , a_2 – радіуси дзеркал, обмірювані вздовж довільного напрямку, перпендикулярного осі резонатора;

L – відстань між дзеркалами.

Перша умова, що впливає з геометричної оптики, задовольняється у випадку оптичних резонаторів, тому що розміри відбиваючих поверхонь резонаторів, і радіуси кривизни дзеркал багато більше довжини хвилі

випромінювання. Друга вимога випливає із законів хвильової оптики. Її можна уявити собі так: кут, під яким один відбивач (дзеркало) видимий із точки розташування центра іншого (тобто $2 \cdot a_1/L$), має бути трохи більше кута дифракції плоскої хвилі, що пройшла через розкрив (отвір) другого дзеркала.

Крім оптичного резонатора з плоскими дзеркалами, в квантовій електроніці широко застосовують резонатори інших конструкцій.

На рис. 2.5 зображено схему загального сферичного резонатора, утвореного двома сферичними дзеркалами з радіусами кривизни R_1 та R_2 , розташованими на деякій відстані L одне від одного. Більшість резонаторів можна розглядати як окремі випадки узагальненого сферичного резонатора.

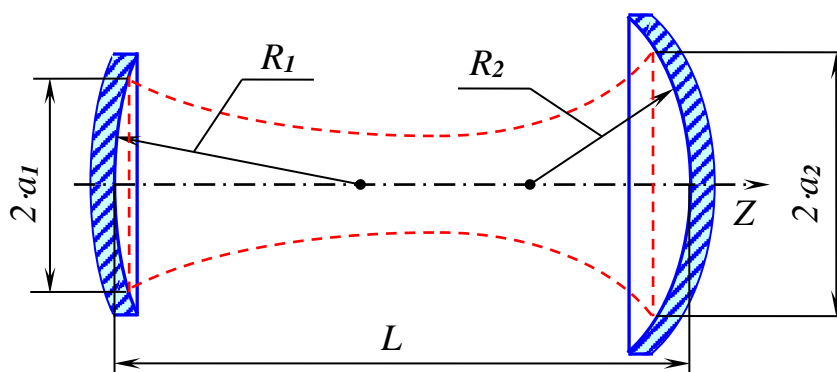


Рисунок 2.5 – Схема узагальненого сферичного резонатора

Характеристики оптичного резонатора визначають три комбінації параметрів: g_1 , g_2 , $2 \cdot \pi \cdot N_{F_1}/g_1$, $2 \cdot \pi \cdot N_{F_2}/g_2$, де g_1 і g_2 – узагальнені параметри резонатора, пов'язані з його довжиною L і радіусами кривизни дзеркал співвідношеннями:

$$g_1 = 1 - \frac{L}{R_1}; \quad g_2 = 1 - \frac{L}{R_2}.$$

Числа Френеля N_{F_1} , N_{F_2} дорівнюють $N_{F_i} = \frac{a_i^2}{L \cdot \lambda}$, $i=1,2,3,\dots$, де $2 \cdot a_i$ – апертурний розмір дзеркала.

Для плоскопаралельного резонатора, який використовують у твердотільних та напівпровідникових лазерах, $R_1 = R_2 = \infty$; $g_1 = g_2 = 1$. Такий резонатор донедавна використовували не досить часто, оскільки технічно дуже важко встановити дзеркала паралельно одне одному з дуже великою точністю (кілька кутових секунд), прийнятною для оптичних систем. Однак в останні роки, разом з бурхливим розвитком напівпровідникових лазерів, плоскопаралельний резонатор використовується найчастіше, тому що висока паралельність дзеркал напівпровідникового лазера досягається за рахунок сколювання напівпро-

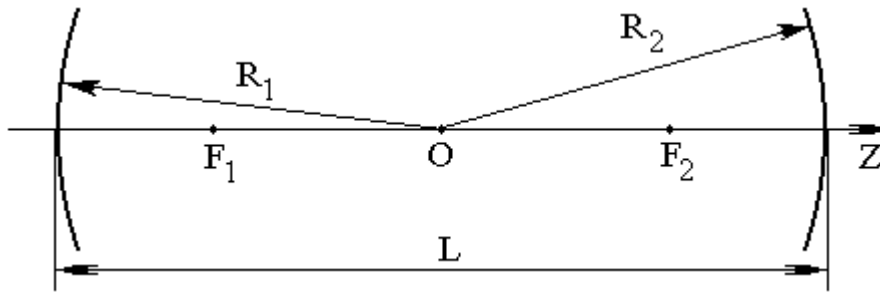


Рисунок 2.7 – Схема концентричного (сферичного) резонатора

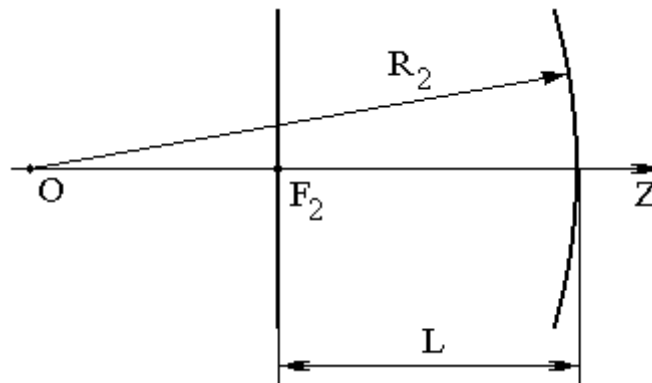


Рисунок 2.8 – Схема напівконфокального резонатора

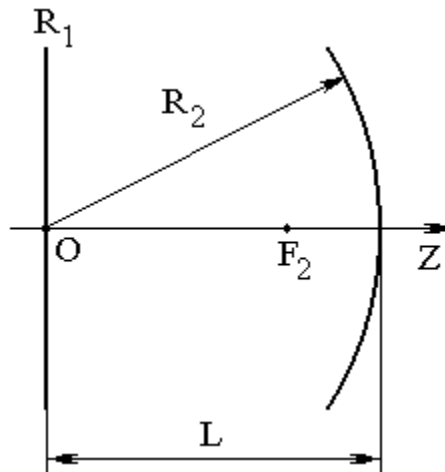


Рисунок 2.9 – Схема напівконцентричного резонатора

Відкриті резонатори можна поділити на два види – стійкі та нестійкі. Резонатор, в якому промінь після відбиття від дзеркал залишається в межах невеликої ділянки, називається стійким; резонатор, в якому промінь, послідовно відбиваючись від двох дзеркал, віддаляється на необмежено велику відстань від осі резонатора, називається нестійким.

2.4 Стійкі і нестійкі резонатори

Відкритий резонатор буде стійким, якщо виконується умова [0]:

$$0 \leq (1 - L/R_1) \cdot (1 - L/R_2) \leq 1, \quad (2.48)$$

тут R_1, R_2 – радіуси дзеркал резонатора.

Розглянемо умови стійкості деяких видів відкритих резонаторів, наведених на рис. 2.2, 2.5, 2.8, 2.9.

Якщо обидва дзеркала резонатора плоскі (рис. 2.2) $R_1 = R_2 = \infty$, то згідно з (2.48) система стійка в точці.

Якщо одне дзеркало плоске $R_1 = \infty$ або $R_2 = \infty$, а інше сферичне вигнуте (рис. 2.8, 2.9), то умова стійкості (2.48) матиме вигляд:

$$0 \leq (1 - L/R_{1,2}) \leq 1, \quad (2.49)$$

тобто система стійка в області значень $L/R_{1,2} < 1$. Оптимальний режим відповідає середині області $L = R_{1,2}/2$.

Якщо обидва дзеркала сферичні увігнуті (рис. 2.5), то згідно з (2.48) система стійка за умови:

$$1/R_1 < 1 \text{ і } 1/R_2 < 1. \quad (2.50)$$

У випадку, коли центри обох дзеркал лежать поза резонатором, система стійка при

$$1/R_1 > 1 \text{ і } L > R_2 > 1, \quad (2.51)$$

коли центри дзеркал лежать усередині резонатора система стійка при виконанні додаткової умови:

$$R_{1,2} \leq L \leq R_1 + R_2. \quad (2.52)$$

Система (рис. 2.5) нестійка, якщо

$$L/R_1 < 1, \text{ але } L/R_2 > 1, \quad (2.53)$$

або

$$L/R_1 > 1, \text{ але } L/R_2 < 1. \quad (2.54)$$

Якщо в резонаторі одне дзеркало R_1 увігнуте, а інше R_2 – опукле (рис. 2.10, а), то умова стійкості (2.48) перетвориться до вигляду:

$$0 \leq (1 - L/R_1) \cdot (1 + R_2) \leq 1, \quad (2.55)$$

для стійкості роботи системи необхідно, щоб

$$L < R_1 \text{ і } (1 + L/R_2) \leq 1/(1 - L/R_1), \quad (2.56)$$

або

$$R_1 - R_2 \leq L \leq R_1. \quad (2.57)$$

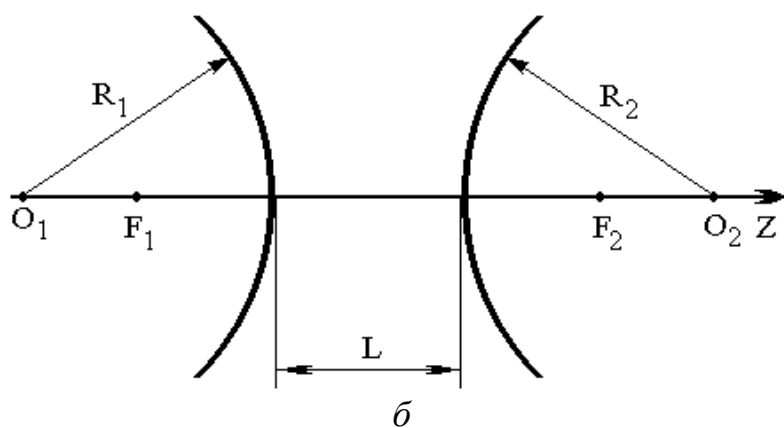
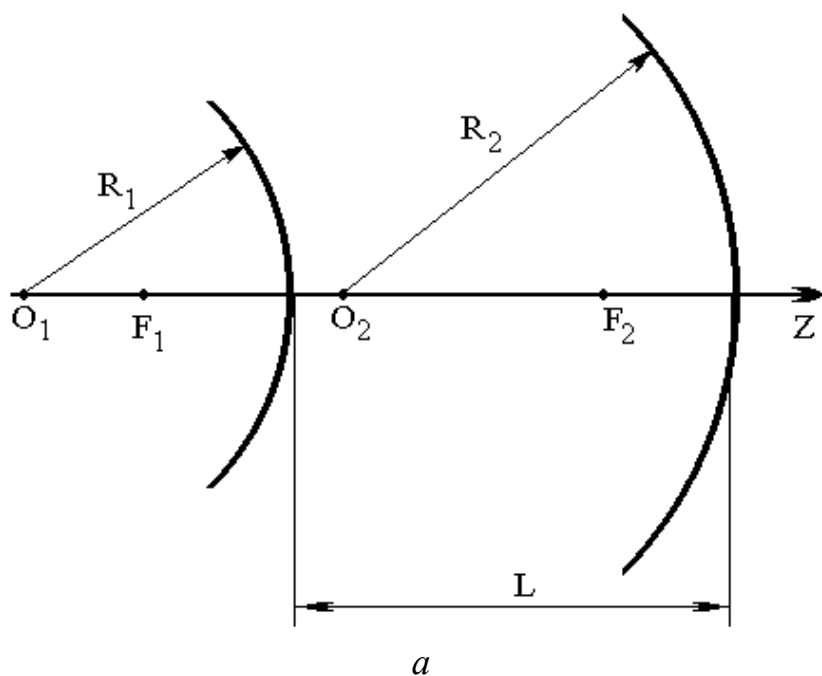


Рисунок 2.10 – Схеми нестійких резонаторів

Система (рис. 2.10, а) нестійка, якщо

$$L > R_1, \quad (2.58)$$

а також, якщо $L > R_1$ за умови

$$L < R_1 - R_2, \quad (2.59)$$

Якщо обидва дзеркала опуклі (рис. 2.10, б), то умова (2.48) не може бути виконана і система нестійка за будь-яких значень R_1 , R_2 і L .

На рис. 2.11 подана діаграма, що дозволяє оцінити стійкість відкритих резонаторів різних конфігурацій.

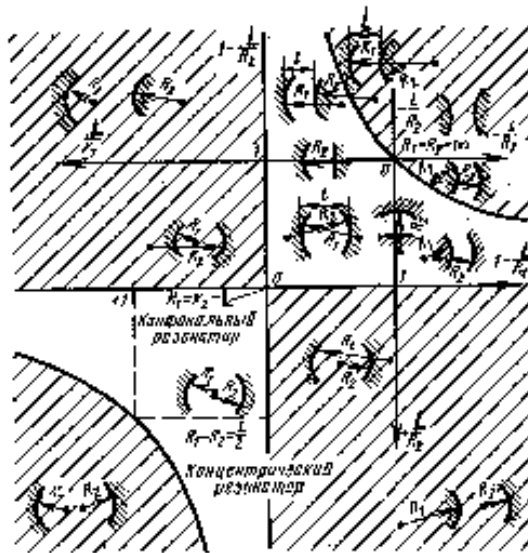


Рисунок 2.11 – Діаграма стійкості оптичних резонаторів

Вільна від штрихування область на діаграмі – це область значень $g_1 = 1 - L/R_1$ і $g_2 = 1 - L/R_2$, які відповідають резонатору стійкої конфігурації. Навпаки, коли координати g_1 і g_2 резонатора попадають у заштриховану область, то такий резонатор є нестійким. Слід зазначити, що при розрахунках значень g_1 і g_2 знак радіуса кривизни дзеркала береться позитивним, якщо дзеркало увігнуте, і негативним, якщо дзеркало опукле.

2.5 Визначення геометричних параметрів відкритого резонатора

Відкритий резонатор можна сконструювати за допомогою двох поверхонь, що відбивають, розташованих у просторі в деяких двох точках Z_1 і Z_2 , якщо підібрати радіуси кривизни так чином, щоб вони співпадали з

радіусами кривизни хвильових фронтів у місцях розташування дзеркал. При цьому хвильовий пучок поширюється між дзеркалами туди і назад без зміни розподілу поля в його поперечному перерізі, як показано на рис. 2.12.

Енергія випромінювання лазера з резонатором, утвореним двома сферичними або плоским і сферичним дзеркалами, поширюється у вільному просторі за криволінійними променями (за гіперболами) (рис. 2.12).

Ці промені співпадають з нормальними до хвильового фронту, що поблизу є сферою. Пучок має мінімальний поперечний розмір (перетяжку) у деякому перетині, де фронт хвилі плоский.

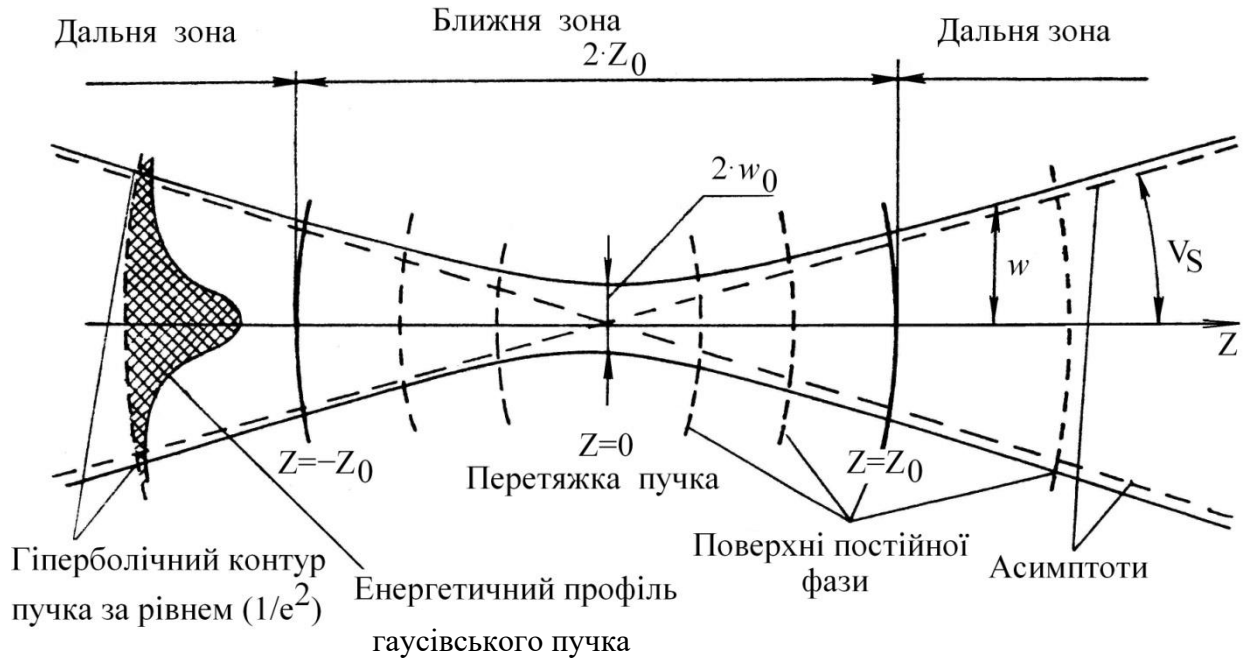


Рисунок 2.12 – Параметри пучка у відкритому резонаторі

В міру віддалення від цієї площини розміри пучка збільшуються, а кривизна фронту спочатку зростає, а потім зменшується. Положення перетяжки щодо дзеркал резонатора визначається так:

$$Z_1 = L \cdot g_2 \cdot (1 - g_1) / (g_1 + g_2 - 2 \cdot g_1 \cdot g_2), \quad (2.60)$$

$$Z_2 = L \cdot g_1 \cdot (1 - g_2) / (g_1 - g_2 - 2 \cdot g_1 \cdot g_2), \quad (2.61)$$

де $g_1 = 1 - L/R_1$, $g_2 = 1 - L/R_2$.

На практиці зазвичай задані радіуси кривизни дзеркал R_1 і R_2 і відстань між ними L , а знайти треба мінімальний розмір плями W_0 , положення цього мінімуму відносно дзеркал резонатора і розмір плям на дзеркалах $(W)_{1дзер}$, $(W)_{2дзер}$.

2.5.1 Конфокальний резонатор

У конфокальному резонаторі (рис. 2.6) розмір плями в перетяжці, розташованої у центрі резонатора,

$$W_0 = \sqrt{L \cdot \lambda / (2 \cdot \pi)}. \quad (2.62)$$

Розмір плями на дзеркалах

$$(W)_{1\text{дзер}} = (W)_{2\text{дзер}} = \sqrt{L \cdot \lambda / \pi}, \quad (2.63)$$

де λ – довжина генерованої хвилі.

2.5.2 Напівконфокальний резонатор.

Напівконфокальний резонатор (рис. 2.8) утворений плоским ($R_1 = \infty$) і сферичним ($R_2 = R$) дзеркалами. Довжина такого резонатора $L = R/2$. У цьому випадку перетяжка пучка лежать на плоскому дзеркалі, радіус плями в перетяжці дорівнює:

$$W_0 = (W)_{1\text{дзер}} = \sqrt{L \cdot \lambda / \pi} \cdot \sqrt[4]{(R - L) / L}, \quad (2.64)$$

радіус пучка на увігнутому дзеркалі досягає значення:

$$(W)_{2\text{дзер}} = \sqrt{R \cdot \lambda / \pi} \cdot \sqrt[4]{L / (R - L)}. \quad (2.65)$$

2.5.3 Неконфокальний резонатор

Розміри пучка в перетяжці і на дзеркалах неконфокального резонатора (рис. 2.5) визначаються з виразів:

$$W_0 = \sqrt{\lambda / \pi} \cdot \sqrt[4]{(L \cdot (R_1 - L) \cdot (R_2 - L) \cdot (R_1 + R_2 - L)) / (R_1 + R_2 - 2 \cdot L)^2}, \quad (2.66)$$

$$(W)_{1\text{дзер}} = \sqrt{R_1 \cdot \lambda / \pi} \cdot \sqrt[4]{(R_2 - L) \cdot L / ((R_1 - L) \cdot (R_1 + R_2 - L))}, \quad (2.67)$$

$$(W)_{2\text{дзер}} = \sqrt{R_2 \cdot \lambda / \pi} \cdot \sqrt[4]{(R_1 - L) \cdot L / ((R_2 - L) \cdot (R_1 + R_2 - L))}. \quad (2.68)$$

Відстань перетяжки від дзеркал можна визначити так:

$$(a)_{1\text{дзер}} = L \cdot (R_2 - L) / (R_1 + R_2 - L), \quad (2.69)$$

$$(a)_{2\text{дзер}} = L \cdot (R_1 - L) / (R_1 + R_2 - L). \quad (2.70)$$

Тепер перетяжка може знаходитися як усередині, так і поза резонатором, і зміщена вона убік дзеркала з меншою кривизною.

2.5.4 Нестійкий резонатор з конфокальною системою дзеркал.

Цей тип резонатора (рис. 2.10, а) має порівняно зі стійким резонатором переваги в тому випадку, якщо:

- активне середовище має високий коефіцієнт підсилення;
- активне середовище є високооднорідним;
- виведена велика потужність при великому діаметрі і малій довжині;
- стійка тільки одна мода;
- відсутні матеріали, придатні для вікон або напівпрозорих дзеркал для резонансної довжини хвилі.

Розміри резонатора визначаються шляхом задання довжини лазерного активного середовища L_a , радіуса активного середовища R_a і резонансної довжини хвилі λ (значення у формули необхідно підставляти в метрах). Передумовою для застосування резонатора цього типу є виконання умови:

$$2 \cdot R_a > \sqrt{48 \cdot \lambda}. \quad (2.71)$$

Для довжини резонатора маємо

$$L_a < L < R_a^2 / (12 \cdot \lambda). \quad (2.72)$$

Радіуси кривизни дзеркал визначаються з виразів:

$$R_1 = L \cdot (2 \cdot M / M - 1); R_2 = 2 \cdot L - R_1 = -2 \cdot L. \quad (2.73)$$

Тут $R_2 < 0$ є виразом конфокальності (при радіусах дзеркал $R_1 > R_a$ і $R_2 = R_a / M$); M – коефіцієнт лінійного збільшення,

$$M = \left(R_a^2 / (6 \cdot \lambda) \right) \cdot \left(1 + \sqrt{1 - 12 \cdot \lambda / R_a^2} \right). \quad (2.74)$$

Необхідно зазначити, що у нестійкому резонаторі випромінювання встановлюється всього за декілька проходів через резонатор, тому вплив неоднорідностей активного середовища на параметри випромінювання у нестійкому резонаторі менше, ніж у стійкому.

У нестійкому резонаторі лазерний пучок має великий поперечний розмір і поле генерації набагато краще заповнює активний елемент, що призводить до великого ККД. Збільшення поперечного розміру пучка дає можливість

зменшити розбіжність випромінювання.

Розрахунок вигляду гаусівського пучка та його елементів можна провести за допомогою Mathcad програми, наведеної у додатку А.5.

2.6 Втрати у відкритому резонаторі

Повні втрати в резонаторі складаються з дифракційних втрат, втрат на торцях активного середовища і дзеркалах. Усі втрати, крім дифракційних, майже не залежать від поперечної структури поля. Дифракційні ж втрати зростають зі збільшенням поперечних індексів мод m і n . Як показали дослідження, дифракційні втрати залежать від числа Френеля:

$$N_{\phi} = a^2 / (\lambda \cdot L), \quad (2.75)$$

де $2 \cdot a$ – апертурний розмір дзеркала;

L – довжина резонатора;

λ – довжина генерованої хвилі.

2.6.1 Резонатор із плоскими дзеркалами.

Дифракційні втрати для основної моди TEM_{00} можна оцінити за формулою

$$\alpha_{TEM_{00}} \cong 0,207 \cdot N_{\phi}^{-1,4}. \quad (2.76)$$

Для визначення дифракційних втрат зручно користуватися кривими, наведеними на рис. 2.13.

Якщо величина N_{ϕ} більше 10, то можна використовувати аналітичне співвідношення [0]:

$$\alpha_{TEM_{mn}} = 5,23 \cdot 10^{-2} \cdot \Lambda_{n(m+1)}^2 \cdot N^{-3/2}, \quad (2.77)$$

де $\Lambda_n(m+1)$ – $(m+1)$ -й корінь функції Бесселя першого роду n -го порядку.

У табл. 2.1 наведені корені функції Бесселя і значення коефіцієнтів при $N^{-3/2}$ у виразі (2.77) для деяких індексів мод m і n .

Таблиця 2.1

$5,23 \cdot 10^{-2} \Lambda_{n(m+1)}^2$				
m\n	0	1	2	3
0	0,3	0,767	1,38	2,13
1	1,59	2,57	3,70	4,96
2	3,92	5,40	7,05	8,86
3	7,28	9,30	11,40	13,70

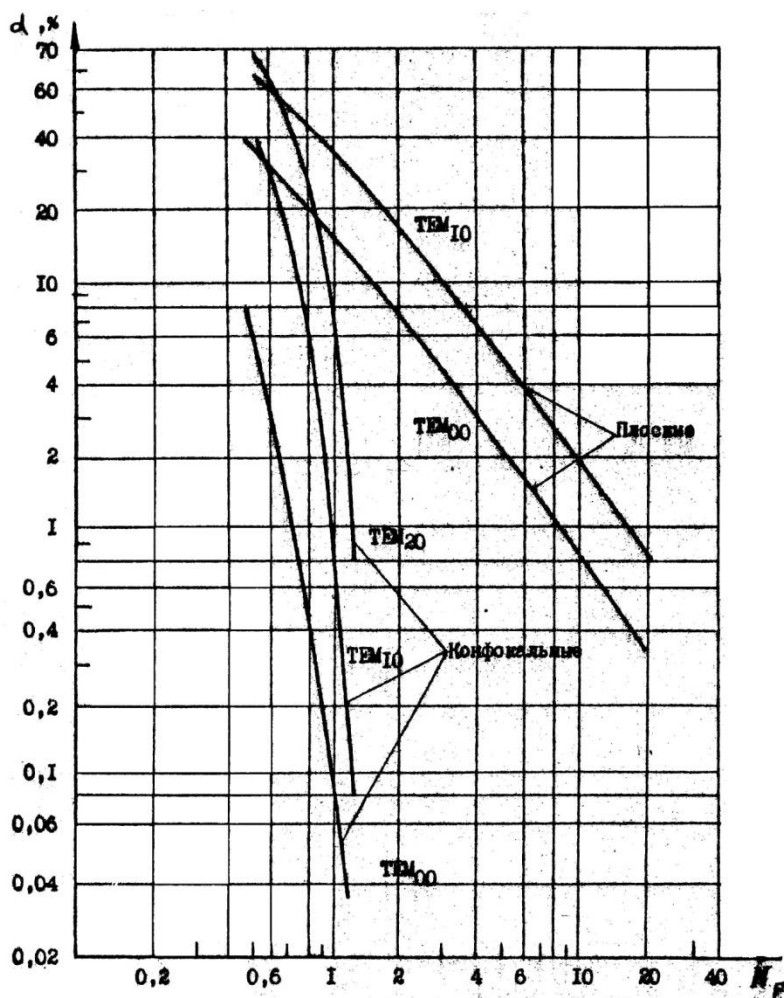


Рисунок 2.13 – Залежність втрат потужності за один прохід від числа Френеля

2.6.2 Конфокальний резонатор.

Дифракційні втрати для основної моди TEM_{00} становлять:

$$\alpha_{TEM_{00}} \cong 10,9 \cdot 10^{-4,94N_{\phi}}. \quad (2.78)$$

Для дифракційних втрат у випадку $N_{\phi} \gg 1$ за будь-яких значень m і n справедливе співвідношення [0]:

$$\alpha_{TEM_{mn}} = \frac{4 \cdot \pi \cdot (8 \cdot \pi \cdot N_{\phi})^{2n+m+1}}{n! \cdot (m+n+1)!} \cdot e^{-4 \cdot \pi \cdot N_{\phi}}. \quad (2.79)$$

2.6.3 Стійкий резонатор довільної форми. У цьому випадку спочатку знаходять числа Френеля еквівалентного конфокального резонатора [0]:

$$N_{\phi_1} = \left(a_1^2 / (L \cdot \lambda) \right) \cdot \sqrt{g_1 \cdot (1 - g_1 \cdot g_2) / g_2}, \quad (2.80)$$

$$N_{\phi_2} = \left(a_2^2 / (L \cdot \lambda) \right) \cdot \sqrt{g_2 \cdot (1 - g_1 \cdot g_2) / g_1}. \quad (2.81)$$

Дифракційні втрати $\alpha_1 = f(N_{\phi_1})$ і $\alpha_2 = f(N_{\phi_2})$ визначаються за графіками, наведеними на рис. 2.13. Сумарні втрати в резонаторі знаходяться так:

$$\alpha = (\alpha_1 + \alpha_2) / 2. \quad (2.82)$$

2.6.4 Нестійкий резонатор з конфокальною системою дзеркал
Дифракційні втрати в такому резонаторі [0]:

$$\alpha = \frac{40}{3} \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{10} \cdot (1 - 1/M)} \right), \quad (2.83)$$

тут M – визначається за виразом (2.74).

Втрати у відкритих резонаторах, спричинені недосконалістю виготовлення дзеркал (шорсткість, відхилення від потрібної геометрії тощо), можуть виникати під час проходження випромінювання через дзеркала. Необхідно врахувати втрати на роз'юстування резонаторів, оскільки внаслідок цього порушуються його резонансні властивості.

Вище було розглянуто так звані пасивні резонатори – незаповнені робочою речовиною. Якщо в резонатор вмістити квантову систему, то в ньому виникають дисипативні втрати, зумовлені вбиранням та розсіюванням енергії на різних дефектах в активному середовищі.

2.7 Розбіжність пучка

2.7.1. Розбіжність випромінювання конфокального резонатора

Конкретна розбіжність лазерного пучка залежить від поперечного індексу m і рівня, на якому вона вимірюється. Випромінювання, що відповідає основній моді TEM_{00} на рівні $1/e^2$ за інтенсивністю, має розбіжність:

$$\left(2 \cdot \Theta_{1/e^2} \right)_{00} = 2 \cdot \sqrt{2 \cdot \lambda / (\pi \cdot L)}, \quad (2.84)$$

де λ – довжина хвилі генерованих коливань;

L – довжина резонатора. Аналогічно для тієї ж моди розбіжність на рівні половинної потужності

$$(2 \cdot \Theta_{1/2})_{00} = 2 \cdot \sqrt{\ln(2)} \cdot \sqrt{\lambda/(\pi \cdot L)} \approx \sqrt{\lambda/L}. \quad (2.85)$$

Розбіжність вищих поперечних мод може бути розрахована за методикою, викладеною в [0].

2.7.2 Розбіжність випромінювання неконфокального резонатора

Кут розбіжності випромінювання основної моди TEM_{00} неконфокального резонатора можна визначити, використовуючи вираз (2.84), якщо замість L підставити L_E – довжину еквівалентного конфокального резонатора:

$$L_E^2 = 4 \cdot L \cdot (R_1 - L) \cdot (R_2 - L) \cdot (R_1 + R_2 - 2 \cdot L) / (R_1 + R_2 - 2 \cdot L)^2, \quad (2.86)$$

тут R_1, R_2 – радіуси кривизни; L – довжина неконфокального резонатора.

Вираз для розрахунку кута розбіжності неконфокального резонатора з урахуванням (2.38) і (2.40) записується так:

$$(2 \cdot \Theta_{1/e^2})_{00} = 2 \cdot \sqrt{2 \cdot \lambda / (\pi \cdot L_E)} = \frac{2 \cdot \sqrt{\lambda/\pi} \cdot \sqrt{R_1 + R_2 - 2 \cdot L}}{\sqrt[4]{L \cdot (R_1 - L) \cdot (R_2 - L) \cdot (R_1 + R_2 - L)}}. \quad (2.87)$$

Для практичних випадків вираз (2.86) спрощується. Так, для симетричного неконфокального резонатора при $R_1 = R_2 = R$

$$(2 \cdot \Theta_{1/e^2})_{00} = 2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \lambda}{2 \cdot \pi}} \cdot \sqrt[4]{L / (2 \cdot R - L)}. \quad (2.88)$$

Якщо $R_1 = R_2, R_2 = \infty$, то кут розбіжності

$$(2 \cdot \Theta_{1/e^2})_{00} = 2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \lambda}{\pi \cdot (2 \cdot L)}} \cdot \sqrt{\frac{L}{R - L}}. \quad (2.89)$$

2.7.3 Кут розбіжності нестійкого резонатора з конфокальною системою дзеркал

$$\Theta_{0,5} = \lambda / (M \cdot a_2), \quad (2.90)$$

де величини M і a_2 визначені співвідношеннями (2.74) і (2.72).

У реальних умовах розбіжність випромінювання лазерів може набагато перевищувати вищепозначену розбіжність через оптичну неоднорідність

активного середовища, недосконалість оптичних елементів резонатора та їх механічні вібрації, які спричиняють коливання осі останнього. Але, незважаючи на це, лазери мають велику напрямленість випромінювання, яку визначає розбіжність світлового пучка в просторі.

Велика напрямленість лазерного випромінювання зумовлює переваги лазерів перед звичайними джерелами: дуже малі втрати енергії; високе кутове розділення; можливість просторової фільтрації під час приймання сигналу. Вузконаправлене випромінювання можна ефективно використати:

- для передавання інформації на великі відстані;
- під час оптичної локації віддалених об'єктів активним методом, особливо для вирізнення об'єкта з-поміж інших цілей;
- для передавання енергії на великі відстані;
- у системах наведення за променем тощо.

2.8 Матричний метод розрахунку відкритого резонатора

Резонатор є оптичною системою, перетворення променів якої можна описати матричними методами. Оптична схема резонатора, заповненого активним середовищем, наведена на рис. 2.14.

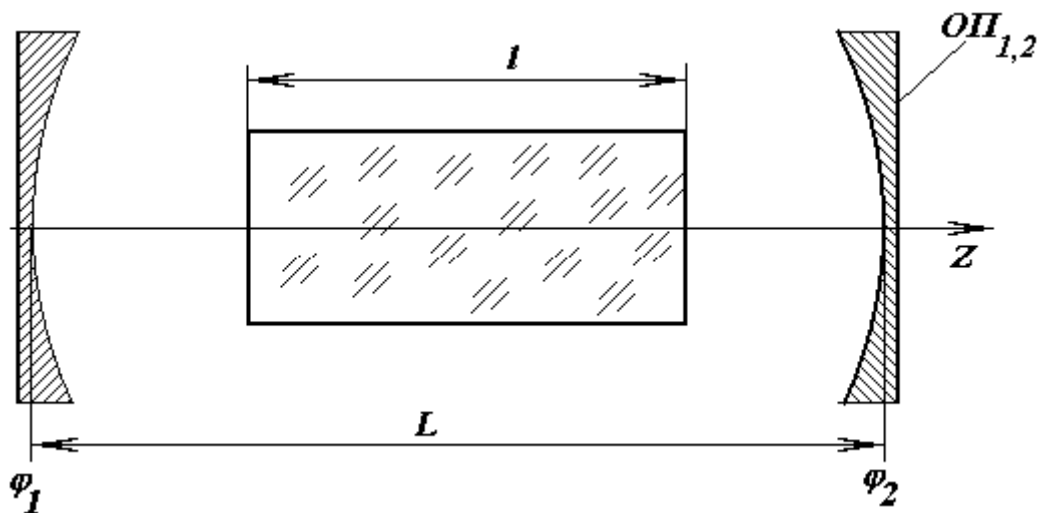


Рисунок 2.14 – Оптична схема відкритого резонатора

Матриця переміщення променя, що відповідає оптичному проміжку між дзеркалами резонатора, містить наведену довжину:

$$T = L - l \cdot (n - 1) / n, \quad (2.91)$$

де n – коефіцієнт заломлення робочої речовини;
 l – довжина робочої речовини.

Вхідну опорну площину OP_1 зручно розташувати на поверхні другого

(напівпрозорого) дзеркала і розглядати вихідний промінь $\begin{pmatrix} x_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$ падаючим на OP_1 у додатному напрямку осі z . Другу опорну площину OP_2 має сенс розташовувати там, де знаходиться площина OP_1 , тому що нас цікавить перетворення пучка, за повний прохід через резонатор. Позначивши оптичні сили першого і другого дзеркал через φ_1 і φ_2 , перетворення променя за один повний прохід резонатора можна записати у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi_1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi_2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \varphi_1 \cdot T - 2 \cdot \varphi_2 \cdot T + \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot T^2 & T \cdot (2 - \varphi_1 \cdot T) \\ -\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot T & 1 - \varphi_1 \cdot T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \\ &= (M) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Елементи A , B , C , D матриці резонатора однозначно визначають параметри лазерного випромінювання. Необхідні розрахункові співвідношення, наведені в табл. 2.2. $[0, 0]$.

Таблиця 2.2

Параметри гауссівського пучка	Стійкі резонатори
Радіус кривизни	$R = 2B / (D - A)$
Розбіжність хвильового фронту	$1 / R = (D - A) / 2B$
Радіус перетину	$r = (\lambda B / \pi \sin \Theta)^{1/2}$
Положення перетяжки	$Z = (A - B) / 2 \cdot C$
Радіус пучка в перетяжці	$W_0 = (\lambda \cdot \sin(\Theta / \pi \cdot C))^{1/2}$
Конфокальний параметр пучка	$Z_0 = W_0^2 \cdot \pi / \lambda = \sin(\Theta) / C$
Половина кута розбіжності в дальній зоні (у радіанах)	$\lambda / \pi W_p = W_0 / Z_0$
Θ змінюється в інтервалі $0 \dots \pi$	$\sin(\Theta) = \left[1 - \left(\frac{A + D}{2} \right)^2 \right]^{1/2}$

λ – довжина випромінюваної хвилі

В результаті розрахунку відкритого резонатора матричним методом за допомогою формул, наведених у табл. 2.2, можна досить швидко і з інженерним ступенем точності отримати: радіуси кривизни дзеркал і довжину

резонатора; діаметр кювети; кут розбіжності випромінювання; коефіцієнти відбиття дзеркал, які обумовлені вибраною схемою відкритого резонатора і розміри гауссівського пучка випромінювання.

2.9 Завдання для самостійної роботи

1. Резонатор утворений увігнутим і опуклим сферичними дзеркалами з радіусами відповідно $R_1 = 1,5$ м і $R_2 = 1$ м. На якій відстані одне від одного треба розташувати дзеркала, щоб резонатор був стійким?

2. Сферичний резонатор складається з двох дзеркал, які мають радіуси $R_1 = 0,85$ м і $R_2 = 0,15$ м. Яку максимальну довжину повинен мати резонатор, щоб бути стійким?

3. Обчислити розміри плями моди TEM_{00} у центрі резонатора і на дзеркалах, якщо він утворений двома увігнутими сферичними дзеркалами радіусом 4 м, розташованими на відстані 1 м одне від одного, $\lambda = 514,5$ нм. Як зміняться розміри плям на дзеркалах, коли одне з дзеркал замінити плоским?

4. Використовуючи Mathcad програми наведені в додатку Б.1, розрахувати розподіл інтенсивності поля випромінювання по поверхні плоского прямокутного дзеркала відкритого резонатора; дослідити розподіл інтенсивності і напруженості поля випромінювання по прямокутній апертурі плоских дзеркал з характерними розмірами, наведеними в табл. 2.3.

Таблиця 2.3

Номер варіанта	a , мм	b , мм	L , мм	λ , мкм	m, n	m, n
1	20	30	200	0,6943	0, 0	0, 1
2	30	40	210	1,06	0, 2	0, 3
3	40	50	220	0,85	1, 0	1, 1
4	50	60	320	0,9	1, 2	1, 3
5	55	55	340	1,32	2, 0	2, 1
6	60	60	420	10,6	2, 2	2, 3
7	25	35	200	0,6328	3, 0	3, 1
8	35	45	250	0,88	3, 2	3, 3
8	45	55	310	0,4545	0, 0	0, 1
8	15	20	100	0,442	0, 2	2, 0

За результатами розрахунків виконати такі завдання:

– пояснити залежність розподілу інтенсивності поля випромінювання від індексів моди;

– пояснити залежність розподілу інтенсивності поля випромінювання від поперечних розмірів апертури.

5. Використовуючи Mathcad програми, наведені в додатку Б.2, розрахувати розподіл інтенсивності поля випромінювання по поверхні плоского прямокутного дзеркала відкритого резонатора; дослідити розподіл інтенсивності та напруженості поля випромінювання по круглій апертурі плоских дзеркал з характерними розмірами, наведеними в табл. 2.4.

Таблиця 2.4

Номер варіанта	D , мм	L , мм	λ , мкм	m, n	m, n
1	20	200	0,6943	0, 0	0, 1
2	30	220	1,06	0, 2	0, 3
3	40	240	0,85	1, 0	1, 1
4	50	320	0,9	1, 2	1, 3
5	55	340	1,32	2, 0	2, 1
6	60	520	10,6	2, 2	2, 3
7	65	540	0,6328	3, 0	3, 1
8	35	250	0,88	3, 2	3, 3
9	45	310	0,4545	0, 0	0, 1
10	25	100	0,442	0, 2	2, 0

За результатами розрахунків виконати такі завдання:

- пояснити залежність розподілу інтенсивності поля випромінювання від індексів моди;
- пояснити залежність розподілу інтенсивності поля випромінювання від довжини хвилі випромінювання.

Перелік джерел посилань до розділу 2

1. Ищенко Е.Ф. Открытые оптические резонаторы: некоторые вопросы теории и расчёта. М.: Сов. радио., 1980. 208 с.
2. Пахомов И.И., Рожков О.В., Рождествин В.Н. Оптико-электронные квантовые приборы: учеб. пособие для вузов / Под ред. И.И. Пахомова. М.: Радио и связь, 1982. 456 с.
3. Фокс А., Ли Т. Резонансные типы колебаний в интерферометре квантового генератора // В кн.: Лазеры/ Пер. с англ.; Под ред. М.Е. Жаботинского и Т.А. Шмаонова. М.: ИЛ, 1963. С. 325 – 362.
4. Применение ЭВМ при разработке лазеров /Ю.А. Балашин, К.И. Крылов, С.Ф. Шарлай Л.: Машиностроение. 1989. 236 с.
5. Вайнштейн Л.А. Открытые резонаторы и открытые волноводы М.: Сов. радио 1966. 474 с.
6. Климков Ю.М. Основы расчёта оптико-электронных приборов с лазерами. М.: Сов. радио, 1978. 264 с.

7. Ярив А. Квантовая электроника и нелинейная оптика/ Пер с англ.; Под ред. О.Г. Вендика, Я. И. Ханина. М.: Сов. радио, 1973. 456 с.
8. Справочник по лазерной технике/ Пер. с нем. М.: Энергоатомиздат, 1991. 544 с.
9. Довгий Я.О. Оптические квантовые генераторы. Специальный практикум. К.: Выща шк., 1977. 232 с.
10. Быков М.М., Пащенко Ж.Ф. Квантовые и оптоэлектронные устройства. К.: НМКВО, 1993. Ч.2. 144 с.
11. Байбородин Ю.В. Основы лазерной техники: 2-е изд. перераб. и доп. К.: Выща шк. Голов. изд-во, 1988. 383 с.

3 НАПІВПРОВІДНИКОВІ ЛАЗЕРИ

3.1 Фізичні основи

Напівпровідникові лазери відрізняються від газових лазерів і лазерів на парамагнітних кристалах і стеклах тим, що випромінювальний перехід відбувається в напівпровідниковому матеріалі не між дискретними енергетичними станами електрона, а між парою широких енергетичних зон. Тому перехід електрона із зони провідності у валентну зону з наступною рекомбінацією призводить до випромінювання, що лежить у відносно широкому спектральному інтервалі і складає кілька десятків нанометрів, що набагато ширше газових лазерів або лазерів на парамагнітних кристалах і стеклах.

Для створення інверсної заселеності в напівпровіднику використовують такі методи: інжекцію носіїв заряду (інжекційні лазери), нагнітання кристала пучком швидких електронів, оптичне нагнітання.

3.1.1 Специфічні особливості інжекційних лазерів

Інжекційні лазери відрізняються від всіх інших типів лазерів такими характеристиками:

- високим ККД за потужністю (вище 10 %);
- простотою збудження (безпосереднє перетворення електричної енергії в когерентне випромінювання як у безперервному, так і в імпульсному режимах роботи);
- можливістю прямої модуляції електричним струмом до 10^{10} Гц;
- вкрай незначними розмірами (довжина менше 0,5 мм, ширина не більше 0,4 мм, висота не більше 0,1 мм);
- низькою напругою нагнітання, механічною надійністю, великим терміном служби (до 10^{10} год).

3.1.2 Активні середовища

Основними матеріалами, використовуваними в напівпровідникових лазерах, є:

- з'єднання типу: $A_{III}B_V$ (GaAs, $Ga_xIn_{1-x}As$, $Ga_xIn_{1-x}Al_xGa_{1-x}As_ySb_{1-y}$, ...);
- з'єднання типу: $A_{II}B_{VI}$ (CdSe, CdS_xSe_{1-x} , ...);
- з'єднання типу: $A_{IV}B_{VI}$ (Pb, PbSe, PbS_xSe_{1-x} , ...);
- напівпровідник типу: $A_{VI}(Te)$;
- напівпровідник типу $A_{III}B_{IV}$ (GaSe, InSe) і інші. Індекси I – VI позначають відповідні основні групи в Періодичній системі елементів Д.І. Менделєєва.

Концентрації легуючої домішки в області від 10^{10} до 10^{14} $см^{-3}$ – сильнолеговані напівпровідники. Для напівпровідникового інжекційного лазера необхідне сильне легування (від 10^{17} до одиниць 10^{18} $см^{-3}$).

3.1.3 Нагнітання.

Створення нерівноважних станів у напівпровіднику можна здійснити шляхом:

- інжекції носіїв заряду (найчастіше використовується форма нагнітання напівпровідникових лазерів, тому вони і називаються інжекційними лазерами), при

цьому під дією прикладеної зовнішньої напруги електрони і дірки рухаються до р-n – переходу, внаслідок чого там підвищується густина носіїв заряду;

- збудження електронним пучком;
- оптичного нагнітання за допомогою імпульсних ламп або лазерів.

3.1.4 Конструкція

Найбільш простим способом виготовлення діодів з р-n – переходом для інжекційних лазерів є дифузія швидкодіфундуючих акцепторів (Zn, Be) у підкладку з провідністю n-типу, чи епітаксіальне осадження матеріалу з провідністю р-типу на матеріал із провідністю n-типу (гомолазер). Електричний вивід припаюється до металізованих поверхонь р- і n-типів (рис. 3.1). Вимушене випромінювання відбувається паралельно до р-n – переходу. Типовими розмірами лазерного кристала є довжина 100 – 500 мкм, товщина області рекомбінації 1 – 3 мкм.

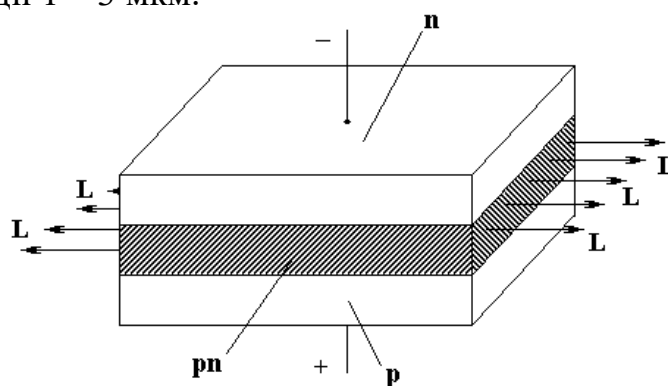


Рисунок 3.1 – Схематичне зображення конструкції інжекційного лазера

Дзеркалами резонатора, як правило, є чисті поверхні відколку, при цьому високий показник заломлення напівпровідникових матеріалів щодо повітря дає коефіцієнт відбиття від 30 до 40: (за інтенсивністю).

У гомолазері ширина області рекомбінації визначається дифузійною довжиною носіїв заряду (електронів, дірок). Дифузійна довжина зростає з підвищенням температури. Шляхом відповідного епітаксіального осадження шарів гетероструктури паралельно з обох сторін р - n – переходу можна:

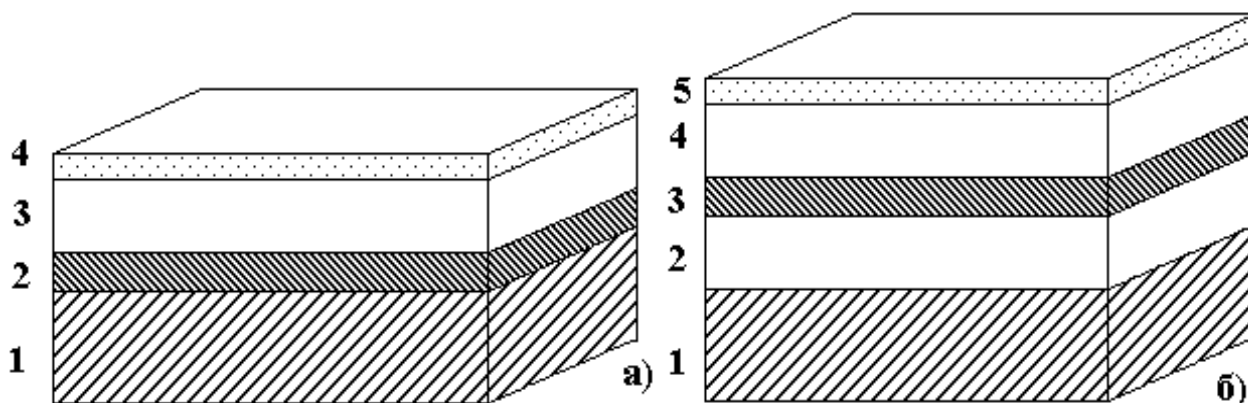
- обмежити область рекомбінації носіїв заряду за шириною менше, ніж дифузійна довжина носіїв заряду, якщо шар, що межує з гетероструктурою, має більш високе значення ширини забороненої зони E_g порівняно з активною областю і, отже, утворює потенційний бар'єр для носіїв заряду $\Delta E \approx 18\%$ («електронне» обмеження);

- утворити оптичний діелектричний хвилевід для поля випромінювання, що виникає в результаті рекомбінації носіїв заряду, якщо шар, що обмежує гетероструктуру, має більш низький показник заломлення n порівняно з показником заломлення активного шару $\Delta n \approx 5\%$ («оптичне» обмеження).

Необхідно, щоб окремі епітаксіальні шари багат шарової структури мали узгоджені сталі ґраток.

На рис. 3.2, а показана типова одностороння гетероструктура AlGaAs/GaAs, тут 1 – n-GaAs (підкладка); 2 – GaAs (активний шар); 3 – p-Al_{0,3}Ga_{0,7}As (бар'єр); 4 – p-GaAs (контактний шар).

На рис. 3.2, б наведена двостороння гетероструктура AlGaAs/GaAs, тут 1– n-GaAs (підкладина); 2– n-Al_{0,3}Ga_{0,7}As (бар'єр); 3– Al_{0,05}Ga_{0,95}As (активний шар); 4– p-Al_{0,3}Ga_{0,7}As (бар'єр); 5– p-GaAs (контактний шар); типові значення товщин цих шарів: d₁=70 мкм; d₂=1,5 мкм; d₃=0,1 мкм; d₄=1,5 мкм; d₅=0,5 мкм; типові ступені легування в цих шарах S₁ - Si: 2·10¹⁸ см⁻³; S₂ - Sn: 3·10¹⁷ см⁻³; S₃ – нелегований - <10¹⁷ см⁻³; S₄ – Ge: 4·10¹⁷ см⁻³; S₅ – Ge: 3·10¹⁸ см⁻³.



а – одностороння гетероструктура (ОГС) AlGaAs/GaAs;
б – двостороння гетероструктура (ДГС) AlGaAs/GaAs

Рисунок 3.2 – Схематичне зображення гетероструктур

У двосторонньої гетероструктури бар'єрні шари по обидва боки обумовлюють високу концентрацію носіїв заряду в активному шарі (товщина 0,1 – 0,2 мкм) і одночасно утворюють хвилевід і більш високу густину поля випромінювання, чим і досягається значне зменшення густини порогового струму ($J_s < 1$ кА/см²) і стає можливим безперервний режим роботи при кімнатній температурі.

3.2 Інжекційний лазер на основі GaAs

Лазер цього типу реалізований першим у сімействі напівпровідникових інжекційних лазерів, і сьогодні найчастіше використовуються, удосконалюються, реалізуються його ускладнені модифікації. Область застосування цього інжекційного лазера належать переважно до обробки інформації.

Напівпровідниковий матеріал GaAs легований Te (як донором), а також Zn (як акцептором). Концентрація Te $> 4 \cdot 10^{17}$ см⁻³, а Zn $> 1,5 \cdot 10^{19}$ см⁻³. Довжина хвилі, обумовлена шириною забороненої зони, досягає $\lambda = 0,89$ мкм.

Інжекційний лазер на основі GaAs у випадку гомолазера має відносно великий пороговий струм (більше 1 А), так що безперервний режим роботи

можливий тільки при низьких температурах або в імпульсному режимі (при кімнатній температурі).

Використання потрібних з'єднань призвело до розробки подвійної (або багат шарової) гетероструктури і тим самим до зменшення порогового струму і до можливості зміни ширини забороненої зони і довжини хвилі.

3.2.1 Інжекційний лазер на основі $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}/\text{GaAs}$. Ширина забороненої зони E_g і показник заломлення n $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ змінюється з відносним вмістом AlAs (значення x) за законом [1]:

$$E_g = 1,424 + 1,247 \cdot x \quad (E_g, \text{eV}); \quad (3.1)$$

$$n = 3,59 - 0,71 \cdot x. \quad (3.2)$$

AlGaAs при значенні x , що перевищує 0,46, стає напівпровідником з непрямыми переходами. Оскільки у подвійній гетероструктурі вимагаються відмінності $\Delta x \approx 0,3$ щодо частки AlAs в активному шарі й обмежуючих шарах змішаного кристала для стабільної роботи при кімнатній температурі, то для активного шару область зміни $x \in 0 \leq x \leq 0,16$ або діапазон зміни довжини хвиль лазерного випромінювання – $0,9 \text{ мкм} \leq \lambda \leq 0,78 \text{ мкм}$.

Лазери на односторонній гетероструктурі (SHS – single heterostructure) працюють в імпульсному режимі з високою імпульсною потужністю. Типові параметри лазерних діодів на односторонній гетероструктурі на основі $\text{AlGaAs}/\text{GaAs}$ наведені в табл. 3.1. За допомогою багатоканальних пристроїв (Stacks, Arrays – лінійки, матриці) можна досягти ще більш високої імпульсної потужності. Лінійки з виводом у світловід є компактними джерелами випромінювання для високоякісних оптичних систем.

Таблиця 3.1

Параметр	Значення
Тривалість імпульсу τ , нс	200
Коефіцієнт заповнення (періоду імпульсу), %	0,01
Довжина хвилі λ , нм	905
Вихідна потужність P , Вт	3 – 12
Робочий струм (максимальний) I_{FM} , А	20 – 60
Граничний струм I_s , А	6 – 18
Напруга V_{FM} , В	11 – 16
Поверхня, що випромінює, мкм:	
Довжина	120 – 350
Ширина	2
Спектральна ширина смуги $\Delta\lambda$, нм	4,5

DHS – лазерні діоди (на подвійній гетероструктурі) із широким контактом (без смугастої структури) працюють в імпульсному режимі з високою середньою потужністю і маленьким пороговим струмом. Типові параметри лазерних діодів на подвійній гетероструктурі із широким контактом наведені в табл. 3.2. Типові параметри безперервних лазерних діодів смужкової геометрії (GGL з оксидною смужковою структурою) при температурі 300 K із сімейства GGL наведені в табл. 3.3.

Таблиця 3.2

Параметр	Значення
Тривалість імпульсу τ , нс	350
Коефіцієнт заповнення (періоду імпульсу), %	6
Довжина хвилі $\lambda_{\text{реак}}$, нм	850
Вихідна потужність P , мВт	50 – 100
Робочий струм I_{FM} , А	1,3
Спектральна ширина смуги $\Delta\lambda$, нм	4,5
Граничний струм I_s , А	0,5
Напруга V_{FM} , В	3,5
Розбіжність пучка, град:	
Паралельно р-п - переходу $\Theta_{ }$	11
Перпендикулярно р-п – переходу Θ_{\perp}	50
Поверхня, що випромінює, мкм:	
Довжина	100
Ширина	0,2

Таблиця 3.3

Параметр	Значення
Вихідна потужність (на дзеркало) P_0 , мВт:	
У градієнтному світловоді з числовою апертурою $NA = 0,2$	5
Те ж з діаметром сердечника 50 мкм P_{LL}	2
Довжина хвилі λ , нм	850
Спектральна ширина смуги $\Delta\lambda$, нм	1 – 4
Розбіжність пучка (далека зона), град:	
Паралельно р-п – переходу $\Theta_{ }$	20 – 30
Перпендикулярно р-п – переходу Θ_{\perp}	30 – 50
Пороговий струм I_s , мА	80 – 120

DHS – лазерні діоди із сімейства IGL з $\lambda \approx 0,85$ мкм можна розділити на дві групи:

– безперервно працюючі одномодові лазери з малою вихідною потужністю (1 – 7 мВт на дзеркало);

– безперервно працюючі одномодові лазери з високою вихідною потужністю (15 – 30 мВт на дзеркало).

Перша група лазерів використовується у волоконно-оптичних лініях зв'язку, а також у науковому приладобудуванні. Друга група лазерів знаходить застосування в лазерних друкувальних пристроях, для запису на оптичних дисках, як джерела світла в далекомірах і в центрах розгалуження даних з одночасним виходом на декілька світловодів.

3.2.2 Інжекційний лазер на основі $\text{Ga}_x\text{In}_{1-x}\text{As}_{1-y}/\text{In}$

Ширина забороненої зони E_g і показник заломлення n $\text{Ga}_x\text{In}_{1-x}\text{As}_{1-y}/\text{In}$ змінюються відповідно за законами [1]:

$$E_g(x, y) = 1,35 - 0,72 \cdot y + 0,12 \cdot y^2 \quad (E_g, \text{ЕВ}); \quad (3.3)$$

$$n(x, y) = 3,4 + 0,265 \cdot y - 0,095 \cdot y^2; \quad (3.4)$$

$$y = 2,2 \cdot x / (1 + 0,063 \cdot x). \quad (3.5)$$

При цьому виконується вже необхідне узгодження сталої ґратки четверного розчину матеріалів із сталою ґратки підкладки з In. Таким чином, на основі цього складу компонентів можна реалізувати DHS – лазерні діоди з випромінюванням довжин хвиль $1,05 \text{ мкм} \leq \lambda \leq 1,67 \text{ мкм}$.

Для безперервного режиму роботи при температурі 300 К мінімальна довжина хвилі досягає приблизно 1,2 мкм. Через дуже мале загасання у світловоді, виготовленому з кварцевого скла, на довжині хвилі $\lambda = 1,3 \text{ мкм}$ ($x = 0,27$; $y = 0,58$) і $\lambda = 1,55 \text{ мкм}$ ($x = 0,42$; $y = 0,90$), лазери на цих довжинах хвиль становлять певний інтерес для волоконно-оптичних ліній зв'язку. Порівняно із системою AlGaAs/GaAs лазер на основі GaInAs/In поступається з так званої проблеми T_0 (збільшення безвипромінювальної рекомбінації із зростанням довжини хвилі), тобто високої чутливості порогового струму до температури, через що зменшується діапазон температур для безперервного режиму роботи. Тому через менші порогові струми лазери на основі IGL – структури мають деякі переваги. При великих швидкостях передачі максимальна відстань між ретрансляторами обмежується динамічним розширенням спектра (а не загасанням, як у діапазоні довжин хвиль близько 0,85 мкм). Це має особливе значення для $\lambda = 1,55 \text{ мкм}$ (загасання одномодового світловода $\alpha \approx 0,2 \text{ дБ/км}$), оскільки на довжині хвилі $\lambda = 1,3 \text{ мкм}$ $\alpha \approx 0,4 \text{ дБ/км}$) дисперсія кварцевого скла прагне до нуля. Динамічно стабільний (повздовжній) одномодовий режим роботи може бути досягнутий за допомогою:

- РЗЗ – лазера (лазера з розподіленим зворотним зв'язком);
- стабілізації модульованого лазера випромінюванням другого безперервного лазерного діода, що працює в безперервному режимі (injection locking);
- одержання динамічного одномодового спектра при використанні зовнішнього резонатора;
- зовнішньої модуляції оптичної потужності безперервного одномодового лазера.

У табл. 3.4 наведені типові параметри лазерних діодів з випромінюванням на довжині хвилі $\lambda = 1,3$ мкм.

Таблиця 3.4

Параметр	Значення
Довжина хвилі λ , мкм	1,3
Спектральна ширина смуги $\Delta\lambda$, нм	1 – 5
Вихідна потужність (на дзеркало), мВт:	
у градієнтному світловоді з числовою апертурою $NA=0,2$	2 – 3
з діаметром сердечника 50 мкм P_{LL} , мВт	1 – 2
Пороговий струм I_s , мА	
GGI	100 – 120
IGL	10 – 20

3.2.3 Інжекційний лазер на основі $Al_xGa_{1-x}As_ySb_{1-y}/GaSb$

Узгодження ґраток четверного змішаного кристала з ґратками GaSb відбувається при [1]

$$y = 0,09 \cdot x / (1 + 0,06 \cdot x). \quad (3.6)$$

Для $0 \leq x \leq 0,26$ довжина хвилі випромінювання змінюється в діапазоні $1,7 \text{ мкм} \leq \lambda \leq 1,8 \text{ мкм}$, причому пороговий струм різко зростає зі зменшенням довжини хвилі. У ПГС – діодах із плоскою мезасмушкою реалізований безперервний режим роботи при температурі 300 К (тривалість роботи протягом більш 2000 год без погіршення характеристик). Ці лазери становлять значний інтерес, тому що мінімум дисперсії світловодів на основі оксиду германія лежить на довжині хвилі $\lambda = 1,75$ мкм.

3.2.4. Лазер на основі PbSnTe

Цей лазер працює в середній ІЧ – області спектра (6,5 – 32 мкм). Переважними галузями застосування є ІЧ – спектроскопія і там, де потрібно джерело ІЧ – випромінювання. У табл. 3.5 наведено фізико-технічні параметри інжекційних лазерів на основі потрійних з'єднань $Pb_{1-x}Sn_xTe$. Напівпровідниковий матеріал PbSnTe застосовується з різною концентрацією Pb і Sn, записується у вигляді $Pb_{1-x}Sn_xTe$, де x – позначає частку олова, а $(1 - x)$ – частку свинцю.

Слід зазначити, що варіювання x обумовлює зміну ширини забороненої зони і призводить, таким чином, до великого діапазону довжин хвиль, охоплюваного цим напівпровідниковим матеріалом. При температурі 12 К для $x = 0 \div 0,35$ зміна довжини хвилі досягає $\lambda = 6,5 \div 30$ мкм.

Легування відбувається за допомогою Cd або Sb (донори), одночасно Pb як акцептор уже міститься в змішаному кристалі. р-п – перехід створюється за рахунок дифузії Cd (Sb) або за допомогою різних епітаксціальних технологій (у вигляді гомоструктури, односторонньої або двосторонньої гетероструктури).

Оскільки напівпровідниковий матеріал PbSn відносно м'який, то чисті поверхні зламу, які одночасно діють як дзеркала резонатора, отримати важко, тому в більшості випадків необхідна додаткова їх обробка шліфуванням і поліруванням.

Таблиця 3.5

Параметр	Структура					
	Гомоструктура		Одностороння гетероструктура		Двостороння гетероструктура	
X	0,12		0,17	0,17	0,13	0,18
Режим роботи	безперервний		безперервний		безперервний	
Температура, К	10	77	10	77	10	77
Густина порогового струму, kA/cm^2	0,05-2	3-10	0,1	16	0,1-0,4	1-3
Вихідна потужність, мВт	0,5-10		-			

При зміні зовнішнього резонатора на противагу GaAs – лазеру необхідно зменшувати відбиття торцевих поверхонь.

Лазери на основі PbSnTe працюють переважно у безперервному режимі (потужність не більше 10 мВт) і винятково при низьких температурах ($T \leq 77 \text{ K}$), оскільки густина порогового струму дуже сильно збільшується з підвищенням температури.

Довжина хвилі випромінювання визначається складом (x) змішаного кристала і перестроюється при зміні температури в широких межах ($8 \text{ мкм} < \lambda < 16 \text{ мкм}$ для $20 \text{ K} < T < 120 \text{ K}$).

Ширина лінії $\delta\nu$ випромінювання дуже мала: $\delta\nu < 3 \cdot 10^6 \text{ Гц}$. Відповідно цьому лазер даного типу в основному знаходить застосування в спектроскопії високого розділення. Розділення спектрометрів, що містять інжекційний лазер як активний елемент, через малу ширину лінії на порядок вище, ніж у звичайних приладах.

За властивостями, а також за технологією виготовлення, лазери на основі PbSnTe аналогічні інжекційним лазерам на основі $\text{Pb}_{1-x}\text{Se}_x$ і $\text{Pb}_{1-x}\text{Sn}_x\text{Se}$.

3.3 Активний шар інжекційних гомо- і гетеролазерів

3.3.1 Електронні характеристики лазерних p-n – переходів [2]

Активне середовище в інжекційних лазерах створюється при інжекції електронів і дірок через p-n – перехід або гетероперехід. У вузькому розумінні слова p-n – переходом називається умовна межа розподілу двох областей кристала, одна з яких має дірковий тип провідності, а друга – електронний.

Якщо в лазерах на p-n – переходах використовується один напівпровідник, то вони називаються гомолазерами на відміну від гетеролазерів, для виготовлення яких потрібно не менш двох напівпровідників з різним типом провідності.

Лазерні p-n – переходи створюються двома способами: або шляхом дифузії

домішки в заздалегідь вирощений кристал (дифузійні р-п – переходи), або нарощуванням на поверхню напівпровідника із заданим типом провідності шару того ж напівпровідника з іншим типом провідності (епітаксціальні р-п – переходи). В ході створення гетеролазерів напівпровідникові шари легуються в процесі зростання.

Коефіцієнт відбиття на границі напівпровідниковий кристал – повітря досить високий (0,2 ... 0,6), тому для створення оптичного резонатора в інжекційному лазері не потрібно спеціальних дзеркал. Достатньо зробити два торці діода паралельними один одному і перпендикулярними до р-п – переходу або гетеропереходу. У кубічних кристалах резонатор зазвичай створюють сколюванням пластинки з р-п – переходом по кристалографічних площинах. Щоб площина р-п – переходу була перпендикулярна до дзеркал резонатора, перед проведенням дифузії або нарощуванням епітаксціального шару пластинка орієнтується, шліфується і полірується так, щоб поверхня фронту дифузії (епітаксціального зростання) була перпендикулярною до поверхні зколу.

Лазерний діод на р-п – переході (гомолазер) зазвичай має форму прямокутного паралелепіпеда, довжина граней якого складає від десятків мікронів до 1 ... 2 мм. Отримано генерацію і на більш довгих діодах – до 11 мм.

Грані паралелепіпеда, паралельні площини р-п – переходу, металізуються, і до них підводяться притискні або стоплені електричні контакти. Бічні грані діода роблять матовими. Якщо їх зробити плоскопаралельними, то утвориться чотирибічний резонатор. Хоча однорідний напівпровідник при будь-якому рівні легування залишається електрично нейтральним, у шарах, із двох сторін, що примикають до р-п – переходу, електронейтральність відсутня (рис. 3.3).

У результаті дифузії дірок з р – області в п – область і електронів у зворотному напрямку біля р-п – переходу створюється область об'ємного заряду $q_{об}$, а нейтральними будуть тільки більш віддалені ділянки діода (I і II). Об'ємний заряд у р– області негативний, а в п– області – позитивний.

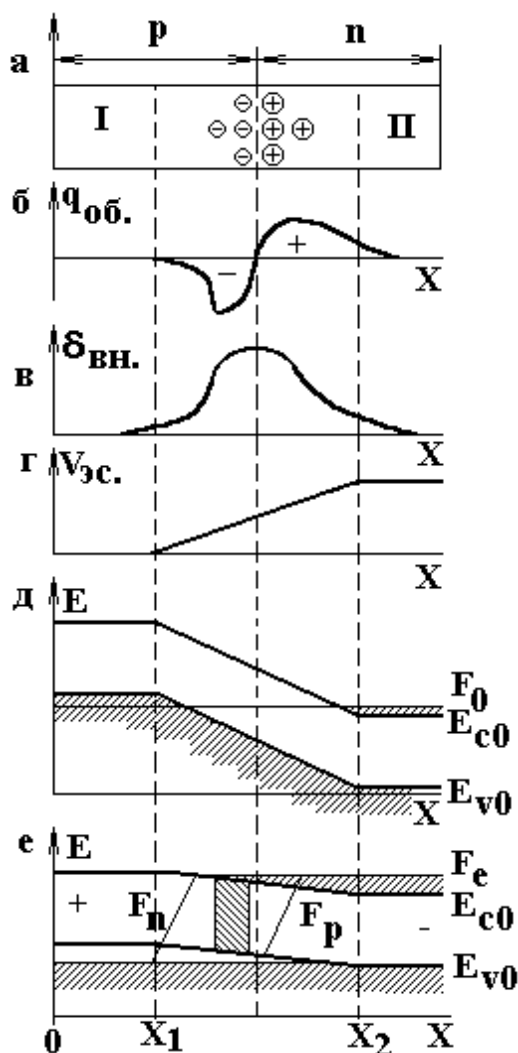
Він створює внутрішнє електричне поле $E_{вн}$ (рис. 3.3), спрямоване з п– області в р– область. У цьому полі електрон здобуває додаткову потенційну енергію $U(x)$, яку можна подати у вигляді:

$$U(x) = U_0 - \int_0^{\infty} E_{вн}(x) dx. \quad (3.7)$$

В інтервалі значень x від нуля до x_1 $U(x)$ практично постійна і дорівнює своєму максимальному значенню U_0 . При $x > x_2$ $U(x)$ дорівнює нулю. Це означає, що з переходом з р– у п– область електростатичний потенціал електрона $V_{ес}$ зростає (рис. 3.3, г), у нейтральних областях діода він постійний.

Зміна потенційної енергії електрона поблизу р-п – переходу призводить до скривлення енергетичних зон напівпровідника (рис. 3.3, б). Між р– і п– областями діода за відсутності зовнішнього впливу встановлюється термодинамічна рівновага і розподіл електронів і дірок характеризується одним рівнем Фермі F_0 , причому в

p- області F_0 розташовано в межах валентної зони, а в n- області рівень Фермі заходить у зону провідності.



- а – нейтральні області діода (I і II), між ними – область об’ємного заряду;
- б, в, г – просторовий розподіл об’ємного заряду, внутрішнього електричного поля і електростатичного потенціалу відповідно;
- д – скривлення енергетичних зон під дією внутрішнього електричного поля;
- е – утворення шару з інверсною заселеністю (заштрихований) при інжекції струму, що проходить через p-n –переходи.

Рисунок 3.3 – Електронні характеристики лазерного p-n –переходу

Якщо до діода прикласти електричну напругу в прямому напрямку (плюс до p- області), то викривлення зон зменшується, оскільки зовнішнє електричне поле спрямоване проти E_{vn} , і знижується потенційний бар’єр, створений внутрішнім полем (рис. 3.3, е). Електрони і дірки рухатимуться назустріч один одному. Їхній квазірівноважний розподіл за енергіями характеризується двома квазірівнями Фермі

F_e і F_h . При цьому в деякому шарі напівпровідника може виявитися, що $F_e - F_h > E_g$, тобто виконується умова інверсійної заселеності.

При однаковій концентрації електронів і дірок квазірівень Фермі в n- області заходить глибше в зону провідності, ніж у валентну зону в p- області, тому що густина станів у зоні провідності зазвичай менше, ніж у валентній зоні. У результаті цього активний шар, як видно з рис. 3.3, е, зміщений у p- область діода.

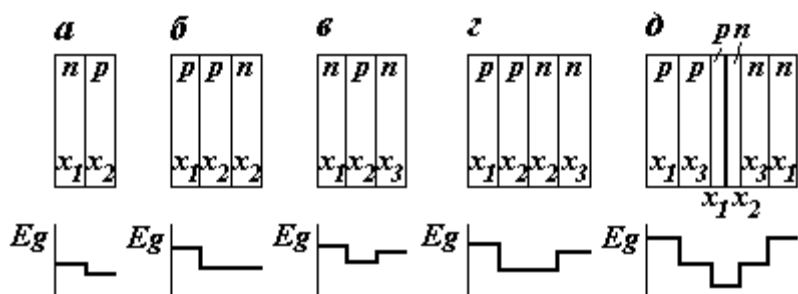
3.3.2 Гетероструктури

Межа розподілу між двома різними напівпровідниками, що утворюють єдиний кристал, називається гетеропереходом. Залежно від типу провідності напівпровідників можуть бути p-p-, p-n- чи n-n- гетеропереходи.

Найважливіша відмінність гетеропереходів від простих p-n- переходів пов'язана зі стрибкоподібною зміною ширини забороненої зони на межі розподілу двох напівпровідників. Величина стрибка забороненої зони ΔE_g дорівнює сумі розривів дна зони провідності ΔE_{c0} і стелі валентної зони ΔE_{v0} :

$$\Delta E_g = \Delta E_{c0} + \Delta E_{v0}. \quad (3.8)$$

Для гетеропереходів GaAs–Ga встановлено: $\Delta E_{c0} = 0,65$ еВ, $\Delta E_{v0} = 0,15$ еВ, $\Delta E_g = 0,80$ еВ.



а – простий p-n –гетероперехід; б – однобічна гетероструктура з p-n –переходом у матеріалі x_2 і p-p –гетеропереходом, що створює потенційний бар'єр для електронів, які інжектуються; в – двостороння гетероструктура з p-p – і p-n –гетеропереходами; г – двостороння гетероструктура з p-n –переходом у матеріалі x_2 і двома гетеропереходами; д – гетероструктура з роздільними електронним і оптичним обмеженнями. Під гетероструктурами наведені спрощені графіки просторової зміни ширини забороненої зони.

Рисунок 3.4 – Схема лазерних гетероструктур на основі твердих розчинів AlAs–GaAs (x_1, x_2, x_3 – значення молярної або атомної дії алюмінію у формулі $Al_xGa_{1-x}As, x_1 > x_2 < x_3$)

У гетеропереходах $Al_xGa_{1-x}As$ –GaAs розрив валентної зони практично відсутній, тому $\Delta E_g = \Delta E_c \leq 0,76$ еВ.

Як показано Ж.І.Алфьоровим зі співробітниками, для створення лазерних гетеропереходів найбільш придатною виявилася пара напівпровідників AlAs — GaAs, тому що постійні кристалічної ґратки цих матеріалів ($a_1=0,565$ нм для GaAs і $a_2=0,566$ нм для AlAs) дуже близькі.

В інжекційних лазерах використовується кілька типів гетероструктур на основі $Al_xGa_{1-x}As$ –GaAs. Найпростішою з них є гетероструктура з одним р-п – гетеропереходом (рис. 3.4, а), в якій р– область характеризується більшою шириною забороненої зони, ніж п– область, оскільки для неї береться $x_1 > x_2$ (E_g – зростає зі збільшенням значення x у формулі $Al_xGa_{1-x}As$). Одностороння гетероструктура складається з р-р –гетеропереходу ($x_1 > x_2$) і р-п –переходу у вузькозонному матеріалі (рис. 3.4, б). У двосторонній гетероструктурі два гетеропереходи, причому $x_1 \approx x_3 > x_2$ (рис. 3.4, в). У модифікованій подвійній гетероструктурі між р-р – і п-п – гетеропереходами створюється вузькозонний р-п –перехід (рис. 3.4, г).

У гетероструктурах з розділними оптичним і електронним обмеженнями випромінювання поширюється в шарах x_3 x_2 x_3 , а носії заряду рекомбінують у більш тонкому шарі x_2 .

Порівняно з простими р-п –переходами гетероструктури, особливо двосторонні, мають дві важливі переваги, що забезпечують більш низький поріг генерації при кімнатній температурі. По-перше, ширина забороненої зони в активній області двосторонньої гетероструктури менше, ніж E_g у пасивних областях. Тому інжектовані в активну область носії знаходяться в потенційній ямі. Потенційні бар'єри гетеропереходів перешкоджають розтіканню області рекомбінації за межі активного шару (електронне обмеження). Водночас у гомолазерах область рекомбінації, тобто обсяг кристала, де $p \neq 0$ і $n \neq 0$, може бути значно більше активного шару (рис. 3.3, е). По-друге, гетероструктури мають значно кращі хвилевідні властивості, ніж активний шар р-п –переходу (оптичне обмеження).

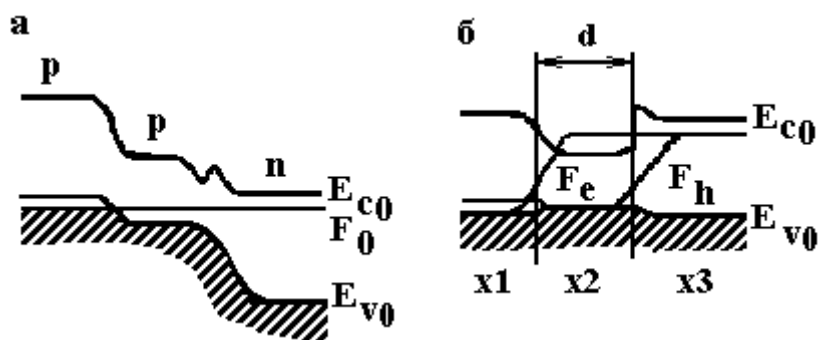
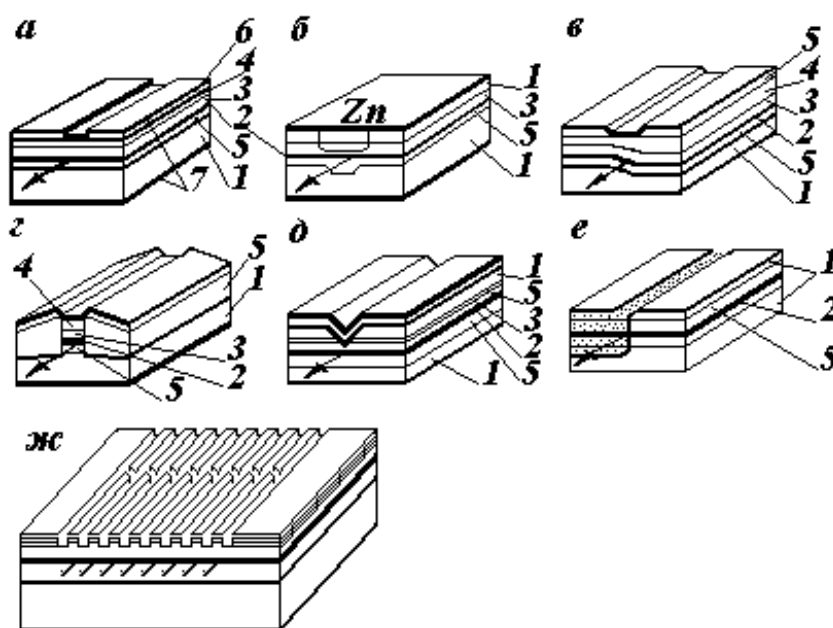


Рисунок 3.5 – Зонна діаграма лазерної двосторонньої гетероструктури (рис. 3.4, в) при термодинамічній рівновазі (а), в режимі генерації (б)

Внаслідок обмеження активної області потенційними бар'єрами в гетеролазерах стало можливим явище суперінжекції, що полягає в створенні в активній області концентрації носіїв більш високої, ніж рівноважна концентрація цих же носіїв в емітері.

На рис. 3.5 показано, як квазірівень Фермі, що знаходився при термодинамічній рівновазі нижче дна зони провідності, у результаті суперінжекції заходить у зону провідності. Тому в гетеролазерах відпадає необхідність застосування сильного легування, що супроводжується появою в активній області великої концентрації дефектів. Активна зона гомолазера неоднорідна (рис. 3.3). Вона характеризується градієнтами концентрацій електронів і дірок і залежністю коефіцієнта підсилення від координати x . У гетеролазерах активний шар більш однорідний.

Широке розповсюдження одержали гетеролазери із смужковим контактом, у яких активне середовище створюється у вигляді окремої нитки діаметром до 1 мкм, що забезпечує стабільну одномодову генерацію при дуже низькому порозі, порядку міліампера. Типові конструкції кристалів смужкових гетеролазерів наведені на рис. 3.6.



а – планарна структура; б – підкладка з канавкою; в – терасова підкладка; г – зарощена мезосмугаста структура; д – V-подібна структура; е – структура з поперечним р-п –переходом; ж – багатоелементний фазований лазер (фазована лазерна ґратка); 1 – n- GaAs; 2 – р- GaAs (активний шар); 3 – р- AlGaAs; 4 – р- GaAs; 5 – n- AlGaAs; 6 – Si; 7 – контакти. Стрілками позначені напрямки поширення генерованого випромінювання, точками – області дифузії Zn

Рисунок 3.6 – Гетеролазери на основі AlGaAs із смужковим контактом

У найпростішому випадку для виготовлення смужкового лазера на вирощену гетероструктуру наноситься шар ізолюючого матеріалу, наприклад, діоксиду кремнію SiO_2 . У цьому шарі протравлюється смужка і наноситься омичний контакт (рис. 3.6, а). Другий контакт залишається широким, тому відбувається деяке розтікання струму за межі активної області, розташованої під смужковим контактом.

Замість ізолюючого матеріалу використовуються також запірні властивості р-п – переходів при подачі на них напруги в зворотному напрямку (плюс біля n- типу). У цьому випадку проводиться дифузія акцепторної домішки, зокрема цинку, через маску в n– шар для одержання смужки напівпровідника р– типу і ліквідації в цьому місці зворотнозмщеного р-п – переходу (рис. 3.6, б). Щоб поліпшити хвилевідні властивості гетероструктури в підкладинці з GaAs, під активною областю робиться канавка, що зарощується потім більш широкозонним матеріалом AlGaAs. Для обмеження електромагнітної хвилі в площині р-п –переходу і зменшення внутрішніх оптичних втрат створюються гетероструктури з терасовою підкладкою (рис. 3.6, в).

Розтікання струму в бічному напрямку можна практично виключити, якщо частину гетероструктури за межами смужки стравити і нанести ізолююче покриття не тільки зверху, але і з боків активної області (мезосмужкова структура). Використовується також зарощена мезосмужкова структура, в якій активний вузькозонний шар з усіх боків оточений широкозонними шарами AlGaAs, що зменшує внутрішні втрати генерованого випромінювання (рис. 3.6, г).

Найбільш вузьку смужку активної області можна отримати за допомогою V–подібної гетероструктури (рис. 3.6, д).

Якщо одну частину гетероструктури легувати цинком, то отримаємо звичайний р-п –перехід у поперечному напрямку в GaAs (рис. 3.6, е). Ширина р-п –переходу визначається товщиною шару GaAs.

Смужковий лазер можна також виготовити нанесенням на поверхню гетероструктури смужкового металевого контакту і наступної обробки всієї поверхні потоком протонів. Незахищені металом ділянки стають високоомними із-за утворення радіаційних дефектів.

Для збільшення потужності генерації створені багатоелементні фазовані інжекційні лазери або фазовані лазерні ґратки (рис. 3.6, ж).

У межах єдиної гетероструктури інтегрується кілька десятків смужкових лазерів, потоки випромінювання яких взаємодіють між собою, що призводить до когерентного додавання інтенсивностей. Одночасно зменшується кут розбіжності випромінювання в площині гетеропереходу. Жорсткі фазові співвідношення між окремими променями встановлюються або за рахунок перекриття електромагнітних полів сусідніх лазерів, або, як показано на рис. 3.6, ж, у результаті розгалуження в лазерних хвилеводах.

3.3.3 Квантово-розмірні структури (КРС)

Шари, товщина яких не перевищує довжину хвилі де Бройля для електронів дірок або значно менше її, називаються квантово-розмірними.

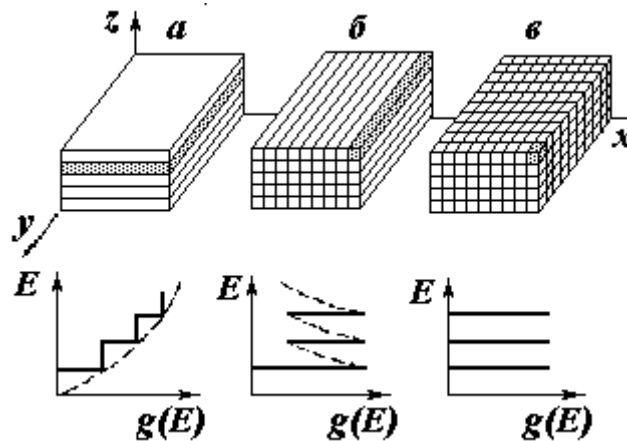
У звичайних гетероструктурах товщина шарів не менше 0,05 мкм (500 Å), що значно більше довжини хвилі де Бройля:

$$\lambda_B = \frac{h}{p}, \quad (3.9)$$

де p – імпульс електрона. Тому їхні властивості збігаються з властивостями об'ємних кристалів.

У 80-х рр. розроблені витончені методи молекулярної, газової і рідинної епітаксії, що дозволяють отримувати високодосконалі структури з товщиною шарів менше 10 нм. У таких шарах виникають обмеження для руху електронів і дірок у напрямку, перпендикулярному до поверхні шару, що супроводжується зміною квантовомеханічних властивостей шару. Зокрема, якщо в масивному зразку функція густини станів електрона має вигляд параболи (рис. 3.7, а), то в квантово-розмірному шарі вона виражається східчастою кривою.

Виготовленням ниток і кубиків субмікронної товщини (рис. 3.7, б, в) можна створити обмеження руху електронів у двох і трьох вимірах. Тоді функція густини станів взагалі втрачає подібність з цією характеристикою для масивного зразка. Квантово-розмірні структури призводять до квантування станів електрона, подібно до того, як вони квантуються періодичним потенціалом кристала. У випадку одновимірного обмеження в одному шарі виникає набір дискретних станів проекції хвильового вектора на напрямок нормалі до шару (k_z квантується, рис. 3.7, а).



а – надтонкі шари (одновимірне обмеження вздовж осі z); б – субмікронні нитки (обмеження вздовж осей x і z); в – субмікронні кубики (тривимірне обмеження).

Рисунок 3.7 – Квантово-розмірні структури

Власні значення енергії носія в одному квантово-розмірному шарі виражаються формулою

$$E(n, k_x, k_y) = E_n + \frac{\hbar^2}{2 \cdot m^* \cdot (k_x^2 + k_y^2)}, \quad (3.10)$$

де E_n – власні значення енергії, нормальної складової (вздовж осі y) гамільтоніану;

m^* – ефективна маса носія;

k_x і k_y – компоненти хвильового вектора.

Якщо таких шарів багато (суперґратка), то утворюються зони розв'язаних станів для k_z . У квантоворозмірному кубу-краплі квантуються всі проекції хвильового вектора, а функція густини станів перетворюється в набір δ – функцій (рис. 3.7, в).

Таким чином, чисто кількісне зменшення розмірів речовини призводить до якісної зміни його квантовомеханічних, а також оптичних і електричних властивостей. Збільшується ширина забороненої зони, знімається виродження зон для дірок, зменшується ширина спектра випромінювання. Поріг генерації квантоворозмірних структур значно нижче, ніж у масивних зразках, збільшується із зростанням температури.

Внизу рис. 3.7 наведені графіки густини станів у зоні провідності відповідні до показаних вище квантоворозмірних структур, штрихова парабола – графік $g(E_c)$ масивного зразка.

Розробка технології виготовлення і вивчення властивостей квантоворозмірних структур відкривають принципово нові можливості створення різних інтегральних пристроїв для оптоелектроніки і напівпровідникової квантової електроніки.

3.4 Основні канали втрат енергії в інжекційних лазерах

Внутрішні лазерні параметри. Зниження порога і підвищення потужності генерації – одна з основних задач квантової електроніки. Пошуки шляхів розв'язання цієї задачі пов'язані з вивченням каналів втрат енергії в лазерах [2]. Оскільки поріг, потужність і ККД генерації є узагальненими характеристиками приладу в цілому, тобто залежать від спектроскопічних властивостей активного середовища, якості хвильової структури, неоднорідності речовини і характеристик резонатора, то їх вивчення недостатнє для цілеспрямованої роботи з удосконалення лазерів.

Нові можливості в цьому напрямку відкриває експериментальне визначення і дослідження внутрішніх лазерних параметрів: ρ , β , η_{Γ} і J_0 . Кожний з них характеризує визначені канали втрат енергії. Параметри β і J_0 пов'язані з товщиною активного шару, зі спектроскопічними властивостями речовини і визначаються функцією густини станів, між якими відбуваються квантові переходи, імовірностями оптичної і неоптичної рекомбінації. Коефіцієнт внутрішніх оптичних втрат ρ визначає втрати випромінювання, генерованого в активному середовищі під час його проходження між дзеркалами резонатора. Внутрішній квантовий вихід генерації η_{Γ} корелює з плямистою структурою ближнього поля випромінювання.

Типові значення порогової густини струму і внутрішніх лазерних параметрів для дифузійних гомолазерів на основі GaAs і гетеролазерів на основі $Al_xGa_{1-x}As$ наведені в табл. 3.6.

Визначення чисельних значень внутрішніх лазерних параметрів дозволяє зробити висновок про наявність резервів подальшого удосконалення лазерів або про характер змін, що відбуваються в процесі деградації. Деякий час, наприклад, фахівці,

що ототожнювали параметр $\alpha = \rho + \beta \cdot j_0$ із внутрішніми оптичними втратами, вважали головною причиною високого порога гомолазерів, особливо при кімнатних температурах, неоднорідність активного середовища, тому що для α отримували значення 100 і більше зворотних сантиметрів. Фактично в цих діодах внутрішні оптичні втрати були порядку 5 см^{-1} , що свідчило про високу досконалість монокристалів, а такі значення ρ обумовлені непереборним поглинанням вільними носіями.

Таблиця 3.6

Тип лазера	T, K	$j_n, \text{A/cm}^2$	$j_0, \text{A/cm}^2$	ρ, cm^{-1}	$\beta \cdot 10^2, \text{cm/A}$	r
Гомолазер	80	350	150	6	3	0,46
Гомолазер	300	25000	43000	6,5	0,05	0,06
Гетеролазер	300	2340	2100	4,8	5	0,43

Як видно з табл. 3.6, із зростанням температури від азотної (80 K) до кімнатної поріг генерації гомолазера збільшився більш ніж у 70 разів і досягає таких великих значень, за яких діод не може працювати в безперервному режимі через швидке нагрівання. Характерно, що внутрішні оптичні втрати при цьому залишаються практично постійними. Зате різко падає ефективність збудження: j_0 збільшується, ρ зменшується майже на два порядки. Одночасно сильно знижується внутрішній квантовий вихід генерації.

У гетеролазерах при кімнатній температурі поріг генерації на порядок менше, ніж у гомолазерах. Відповідно менше і параметр ρ . Основний вигравш досягається за рахунок великих значень параметрів β і η_i . Внутрішні оптичні втрати такі ж, як і в гомолазерах. Очевидно, що вирішальну роль відіграє мала товщина активного шару, його однорідність і двостороннє обмеження носіїв у гетероструктурі.

3.5 Спектральні і просторові характеристики генерованого випромінювання [2]

3.5.1 Одномодовий і багатомодовий режими генерації

Теорія ідеальних резонаторів встановлює, які типи електромагнітних коливань у принципі можуть існувати в резонаторі. Питання про те, які хвилі реально генеруватиметься і яке буде співвідношення між амплітудами різних типів коливань, виходить за рамки цієї теорії. Щоб визначити модовий склад генерованого випромінювання, необхідно в ході розв'язку рівнянь Максвелла врахувати нелінійні оптичні властивості активного середовища і вихід випромінювання за межі резонатора. Задача ця надто складна і розв'язується приблизно.

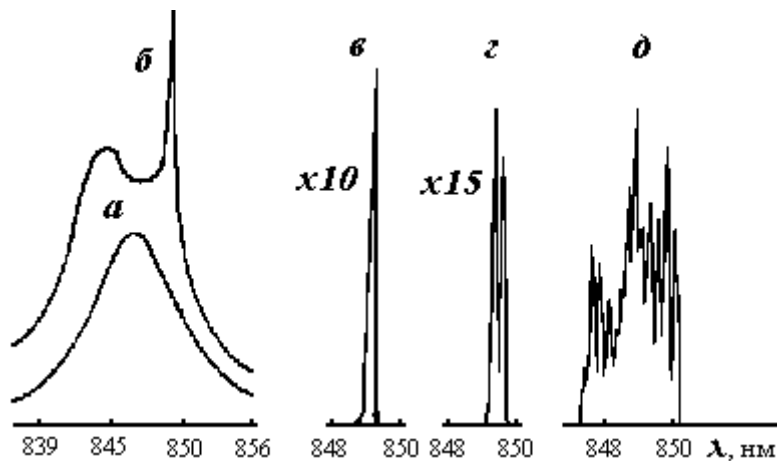
У двох вкрай ідеалізованих випадках картина генерації подається в такому вигляді. Припустимо, що генероване випромінювання не справляє зворотної дії на активне середовище. Коефіцієнт підсилення цілком визначається спектроскопічними

властивостями речовини і нагнітанням. Тоді моди генеруються незалежно одна від одної. Із зростанням нагнітання процес генерації поширюється на все нові і нові моди. Генеруватимуть всі моди, для яких коефіцієнт втрат менше або дорівнює коефіцієнту підсилення.

В іншому крайньому випадку після виникнення генерації на одній або декількох модах вся надлишкова над порогом енергія збудження трансформується в енергію випромінювання мод. Генероване випромінювання викликає інтенсивні вимушені переходи і перешкоджає збільшенню рівня інверсної заселеності. Після початку генерації коефіцієнт підсилення залишається постійним при всіх інтенсивностях збудження, що перевищують поріг, а число генерованих мод не змінюється.

Досліди свідчать, що реальна картина генерації укладена між цими крайніми випадками. Дійсно, часто генерація спочатку виникає на одній моді. Із зростанням нагнітання інтенсивність ліній випромінювання цієї моди швидко зростає. До деякого часу вона придушує генерацію інших мод, але придушує не повністю. При подальшому збільшенні нагнітання в спектрі генерації з'являється друга мода, потім третя і т.д.

Спектри спонтанного і стимульованого випромінювання інжекційних гомолазерів на основі GaAs при різних значеннях струму інжекції наведені на рис. 3.8. Якщо $j < j_n$, то спостерігається тільки широка смуга люмінесценції (рис. 3.8, а). При $j \approx j_n$ на тлі цієї смуги виникає перший пучок стимульованого випромінювання (рис. 3.8, б). Із зростанням нагнітання його інтенсивність швидко збільшується. Висота пучка стає на кілька порядків більше максимуму смуги люмінесценції. Тому на рис. 3.8, в, де масштаб по осі ординат зменшений у багато разів порівняно з масштабом рис. 3.8, а, б, контур смуги люмінесценції зливається з віссю абсцис.



$$T = 80 \text{ K}; l = 0,45 \text{ мм}; \omega = 0,32 \text{ мм}; a - I = 2 \text{ A}; б - I = 3,2 \text{ A};$$

$$в - I = 3,3 \text{ A}; г - I = 3,5 \text{ A}; д - I = 7 \text{ A}$$

Рисунок 3.8 – Спектри люмінесценції і генерації лазерного діода на основі GaAs

Коли густина струму перевищує поріг у 1,1 рази, спектр генерації складається вже з трьох мод. Насправді генерація стає багатомодовою. Основні причини

багатомодового характеру генерації зводяться до такого. По-перше, кожна мода має властиві тільки їй просторову неоднорідність і стаціонарну локалізацію в активному середовищі. Жодна з мод не може знімати енергію з всього активного середовища. Навіть якщо який-небудь тип коливань охоплює все активне середовище, усередині резонатора встановлюються стоячі хвилі з вузлами і пучностями. Ділянки активного середовища, розташовані у вузлах хвилі, практично не віддають своєї енергії генеруючій моді. Рівень інверсної заселеності таких ділянок із зростанням нагнітання підвищується. Тому створюються сприятливі умови для генерації інших типів хвиль, пучності і вузли яких інакше локалізовані в просторі. В інжекційних лазерах часто генерують окремі лінії активного середовища. Ясно, що в цьому випадку мода, що генерує в одній нитці, не може придушити генерацію мод в інших нитках.

По-друге, генеруюча мода може хоча б незначно «пропалити дірку» у спектрі підсилення, так що коефіцієнт підсилення для сусідніх у спектрі мод стане більше, ніж для генеруючої моди.

По-третє, у силу ряду причин, процес генерації в часі завжди має пічковий характер. Навіть в умовах безперервної генерації в цілому час генерації окремої моди порівняно незначний. Зрив генерації на одній моді сприяє появі генерації на інших модах.

Після подолання порога потужність люмінесценції інжекційних лазерів продовжує зростати зі збільшенням струму інжекції. Отже, не тільки одна мода, але навіть усі генеруючі моди, у цілому не можуть цілком стабілізувати рівень інверсної заселеності. Коефіцієнт підсилення активного середовища, хоча і значно повільніше, ніж до порога генерації, зі збільшенням нагнітання неухильно продовжує зростати, що неминуче призводить до появи нових мод, що генерують.

Якщо генерація виникла спочатку на частоті ν_1 , то для цієї частоти $K_{yc}(\nu_1) = K_n(\nu_1)$. Для всіх інших мод з частотами ν_i , справедлива нерівність

$$K_{nid}(\nu_i)/K_n(\nu_i) < 1. \quad (3.11)$$

Чим менше відношення (3.11), тим складніше отримати генерацію на другій моді, якщо перша мода вже генерує.

У системах з дискретними рівнями енергії (газові і твердотільні лазери) коефіцієнт підсилення є функцією від ν з досить гострим максимумом. Тому простіше здійснити одномодову генерацію в резонаторі з неселективними втратами, тобто при $K_n(\nu)$, практично постійному для всіх частот у межах смуги підсилення.

У напівпровідникових лазерах і в лазерах на розчинах складних молекул коефіцієнт підсилення виражається плавною функцією. Щоб відношення (3.11) було значно менше одиниці, необхідно використовувати резонатори із селективними втратами, тобто штучно збільшувати добротність для вузького інтервалу частот. Це досягається, наприклад, нанесенням на дзеркала інтерференційних відбиваючих покриттів. Коефіцієнт відбиття таких покриттів на заданій частоті значно більше, ніж на сусідніх частотах.

Для одержання одномодової генерації широко застосовуються дифракційні

ґратки, що використовуються як одне з дзеркал резонатора. При цьому, якщо постійні ґратки дорівнюють b , а нормаль до ґратки розташована під кутом ϑ до осі резонатора, то генеруватиме мода, довжина хвилі якої задовольняє умову

$$\lambda = 2 \cdot b \cdot \sin(\vartheta). \quad (3.12)$$

Зміною кута ϑ легко здійснити плавне перестроювання частоти генерації.

У лазерах з виносними дзеркалами застосовується також просторова селекція мод, коли за допомогою вузьких діафрагм ліквідуються бічні пелюстки індикатриси випромінювання.

Якщо спеціально не проводити селекції мод, то в інжекційних лазерах друга мода часто з'являється вже при струмі збудження, що перевищує поріг усього на 5 ... 20 %, у рідкісних випадках одна мода генерує до дворазового перевищення порога. Кращі результати виходять у лазерах з малою (десятки мікронів) шириною активної області, у межах якої генерує тільки одна нитка (смужкові лазери).

Зменшенням довжини резонатора можна збільшити відстань між модами $\Delta\lambda$ і створити більш сприятливі умови для одномодової генерації. У лазерах на основі арсеніду галію з чотирибічним резонатором, де досягається більш рівномірний розподіл випромінювання в межах активного шару, зменшення площі р-п - переходу до 10^{-5} см^2 дозволило отримати одномодову генерацію при десятиразово перевищенні порога генерації. У лазерах з більшою довжиною хвилі випромінювання одномодова генерація реалізується при ще більшому числі порогів нагнітання.

Найменша ширина лінії випромінювання при одномодовій генерації визначається коефіцієнтом втрат резонатора, густиною випромінювання, яке генерується в резонаторі, і флуктуаціями фази й амплітуди хвилі, тобто ступенем її когерентності.

Як було показано раніше, зі збільшенням рівня інверсної заселеності максимум коефіцієнта підсилення зміщується в спектрі у бік великих частот. Тому що частота генерації звичайно відповідає максимальному коефіцієнту підсилення, а поріг генерації є функцією коефіцієнта втрат $K_{\vartheta} = K_{nid}(\nu)$, тому частоту генерації можна представити як функцію порога:

$$\nu_r = \nu_r(j). \quad (3.13)$$

Функція (3.13) і відповідні їй графіки називаються спектрально-пороговою характеристикою лазера. Простою зміною неселективного коефіцієнта втрат вдається змінити енергію генерованих квантів на десятки міліелектронвольт.

Частота генерації напівпровідникових лазерів легко перестроюється не тільки за допомогою селективних елементів, що вводяться в резонатор, зміни коефіцієнта втрат у цілому, але і шляхом усіляких зовнішніх впливів на активне середовище: гідростатичного й одновісьового тиску, магнітного поля, зміни температури тощо. Зсув лінії генерації відбувається і при зміні концентрації легуючих домішок. Варіації концентрацій компонентів потрійних і четверних з'єднань дозволяють перекрити

лазерним випромінюванням широкий діапазон частот.

Розробка технології виготовлення КРС відкрила нові шляхи для поліпшення спектральних характеристик випромінювання напівпровідникових лазерів. Насамперед, зменшенням товщини шарів можна збільшувати ефективну ширину забороненої зони і зменшувати ефективну масу носіїв. У результаті спектри люмінесценції і генерації переміщуються в короткохвильову область. Наприклад, зменшення товщини квантоворозмірного шару з 11,5 до 7 нм у гетеролазері на основі AlGaAs зміщує максимум смуги люмінесценції з 0,780 до 0,747 мкм, тобто на 33 нм. Зменшення ефективної маси носіїв підвищує рівень інверсної заселеності (значення ΔF) і забезпечує більш високий, ніж у товстих шарах, коефіцієнт підсилення при одній і тій самій густині струму нагнітання. Це є ще однією причиною (крім малої товщини активної області і високої однорідності шарів) низького порога генерації в лазерах на КРС.

Далі, лінія випромінювання лазерів на КРС стабільна в спектрі і характеризується надзвичайно малою шириною ($\nu_r \sim$ кГц). Одномодова генерація отримана при багаторазовому перевищенні нагнітання над порогом.

3.5.2 Кут розбіжності лазерного променя

Часто підкреслюється гостра спрямованість лазерного променя. При цьому не враховується, що малий кут розбіжності не є невід'ємною властивістю генерованого випромінювання. При багатомодовій генерації тілесний кут, у якому поширюється випромінювання, може бути досить великим. Лазери з чотиристороннім резонатором генерують практично у всіх напрямках. Малим кутом розбіжності характеризується, як правило, тільки одномодовий режим генерації або сукупність аксіальних мод. На жаль, така цінна властивість відсутня у інжекційних лазерів навіть при одномодовій генерації. Це пов'язано з малими розмірами активного шару.

Нижньою межею кута розбіжності є дифракційний кут, що обумовлений хвильовою природою світла і не залежить від джерела випромінювання. Наприклад, при дифракції плоскої хвилі на круглomu отворі діаметром d перше темне кільце, що відповідає мінімуму випромінювання і обмежує центральний промінь, задовольняє умову:

$$\sin(\vartheta_\delta) = 1,22/(\lambda \cdot d), \quad (3.14)$$

де ϑ_δ – кут, під яким видно з отвору радіус першого кільця. Для малих значень ϑ_δ кут розбіжності центрального променя (на половині його інтенсивності) приблизно дорівнює ($1 \text{ рад} = 57,296^\circ$):

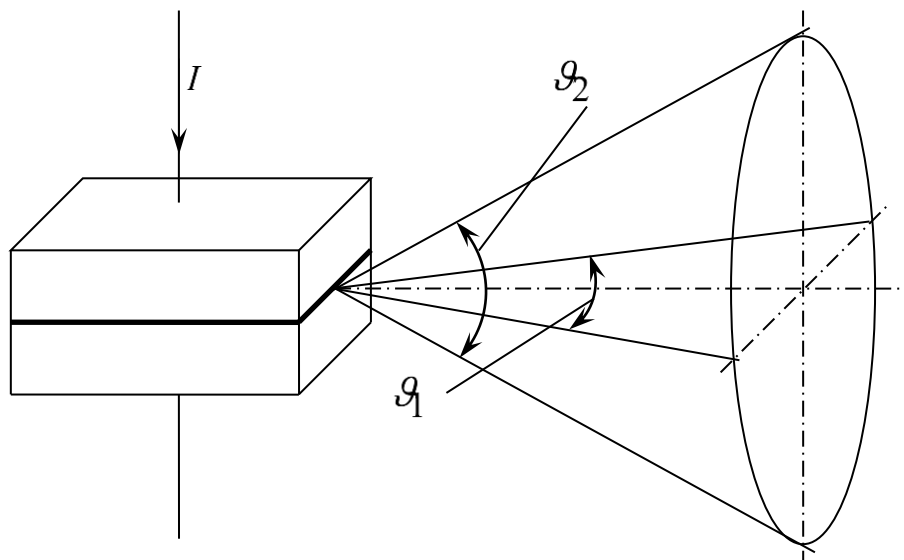
$$\Delta\vartheta_\delta = 1,22/\lambda d \text{ рад} = 69,9/\lambda d'. \quad (3.15)$$

Для гелій-неонового газового лазера з $\lambda = 0,628$ мкм і внутрішнім діаметром трубки 7 мм із (3.15) знаходимо $\Delta\vartheta = 0,38'$. Приблизно таким же малим дифракційним кутом розбіжності характеризується рубіновий лазер. Однак, якщо в газових лазерів, активне середовище яких має високий ступінь оптичної однорідності, реальний кут

розбіжності променя ($1 \dots 2'$) наближається до дифракційного кута розбіжності, то у рубінового лазера розбіжність генерованого випромінювання значно більше $\Delta\vartheta_d$. У твердотільних і рідинних оптичних квантових генераторах ширина лазерного променя визначається не дифракцією світла, а оптичними неоднорідностями активного середовища, які виникають головним чином в процесі нагнітання і генерації (термічні лінзи тощо).

В інжекційних лазерах спостерігається зворотна ситуація: основна причина великої розбіжності генерованого випромінювання – це його дифракція при виході з активного шару. Для довжини хвилі випромінювання лазерного діода на основі GaAs $\lambda = 0,85$ мкм і $d = 2, 3, 4, 5$ мкм із (3.14) впливає $\vartheta_d \approx 31, 20, 15, 12^\circ$ відповідно. Неоднорідності активного шару спричиняє додаткове розширення променя, однак в цілому вони відіграють другорядну роль порівняно з дифракцією світла.

Ширина активного шару лазерного діода звичайно складає десятки або сотні мікронів, тому кут дифракції випромінювання в площині р-п –переходу ϑ_1 на один – два порядки менше, ніж ϑ_2 у площині, перпендикулярній до неї (рис. 3.9). Дослідження свідчать, що для високоякісних лазерних діодів, працюючих в одномодовому режимі, ϑ_1 становить порядку 1° .



ϑ_1 – кут розбіжності в площині р-п –переходу; ϑ_2 – кут розбіжності в площині перпендикулярній до р-п –переходу

Рисунок 3.9 – Розбіжність випромінювання інжекційного лазера

При багатомодовій генерації, природно, промінь стає широким і в цій площині. Індикатриса випромінювання складається з багатьох пелюстків. У площині перпендикулярній до площини р-п–переходу, кут розбіжності ϑ_2 складає приблизно 10° і більше. У деяких діодах індикатриса випромінювання відхилена від площини

p-n-переходу у бік області n-типу. Це пов'язано з асиметрією хвилеводу, що утвориться в лазерному діоді: пасивна область n-типу характеризується меншим коефіцієнтом поглинання генерованого випромінювання, ніж область p-типу.

Теоретичні і експериментальні дослідження картини ближніх і далеких полів випромінювання гетеролазерів свідчать, що з достатнім ступенем точності активний шар можна моделювати плоским металевим хвилеводом, заповненим діелектриком, а кутовий розподіл випромінювання у вертикальній площині, як і в гомолазерів, визначається дифракцією хвилевідної хвилі на відкритому кінці хвилеводу.

Інжекційні лазери за своїми розмірами близькі до точкових джерел випромінювання. Тому кут розбіжності лазерного променя за допомогою оптичних систем можна різко зменшити або сфокусувати промінь на малу площину.

3.6 Методика розрахунку основних параметрів і характеристик напівпровідникового інжекційного лазера [3]

Вихідними даними для розрахунку є:

- матеріал активного елемента (зазвичай монокристали GaAs або гетероструктури на основі GaAs з ізоперіодичним заміщенням Al і P);
- тип резонатора – Фабрі-Перо;
- напруга на кристалі U_0 і температурний діапазон $\Delta T = \pm 50^\circ \text{C}$ роботи приладу.

3.6.1 Конструктивні параметри. Довжина активного шару

$$l = \frac{z_1}{\gamma_e} \cdot \left(\frac{\ell \cdot U_{pn}}{\mu_e} \right)^{3/2},$$

де $z_1 = \left[\frac{m_d^*}{m_e^*} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{\bar{m}^*}{m_e^*} \right) \right]^{3/2} + \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{\bar{m}^*}{m_d^*} \right)^{3/2} - 2 \cdot \left(\frac{\bar{m}^*}{3m_d^*} \right)^{3/2}$ – параметр маси;

$m_e^* \approx 0,08\bar{m}^*$ і $m_d^* \approx 0,5\bar{m}^*$ – ефективна маса носіїв зарядів – електрона і дірки;

\bar{m}^* – маса вільного електрона;

$\gamma_e = 1 - \exp(-l_0 / l)$ – частка надлишкових електронів, що рекомбінують в активному шарі;

$U_{pn} = -\frac{\Delta E}{\ell}$ напруга на p-n-переході;

ΔE – ширина забороненої зони;

U_0 – напруга, В;

μ_e – рівень Фермі для електронів, еВ.

Ефективна ширина випромінювальної області р-п –переходу $d \cong (10^{-4}-10^{-3})$ см і товщина активного шару р-п переходу $l_0 = \sqrt{D\tau} \cong (10^{-6} \dots 10^{-4})$ см, де $D \cong 10^{-1}$ см²/с – коефіцієнт дифузії; $\tau \approx (10^{-8} \dots 10^{-9})$ с – час життя носіїв.

Ефективна площа р-п –переходу $S = l \times l_0$ см². Довжина резонатора $l = h$, см; типові значення $l \approx (10^{-2} \dots 10^{-3})$ см.

Показник заломлення активної речовини залежить від температури і довжини хвилі випромінювання:

$$\left(\frac{\partial n}{\partial T}\right)_\lambda = \frac{1}{2l} \cdot \left(\frac{\lambda}{\Delta\lambda}\right) \cdot \left(\frac{\partial \lambda}{\partial T}\right).$$

Для GaAs при $T = 77$ К і $\lambda_0 = 0,84$ мкм; $\left(\frac{\partial n}{\partial T}\right)_\lambda = 2,9 \times 10^{-4}$ град⁻¹; $n = 3,6$.

Ефективний коефіцієнт відбиття дзеркал резонатора $r = \sqrt{\eta_1 \cdot r_2}$. Для $\eta_1 = (0,2 \dots 0,4)$; $r_2 = 1,0$; $r = \sqrt{1 \times 0,4} \cong 0,63$.

Концентрація донорів N_d і акцепторів N_a у кристалі

$$N_d \approx N_a \approx \frac{1}{3 \cdot \pi^2 \cdot \hbar^3} \left(\frac{2}{3} \cdot \ell \cdot \Delta U \cdot \bar{m}^*\right)^{3/2} \approx (10^{17} \dots 10^{19}) \text{ см}^{-3}.$$

Концентрація електронів і дірок в активному шарі (середнє значення кількості електронів і дірок в одиниці об'єму):

$$\bar{N}_e = \frac{1}{2} N_d \left(\frac{\ell \Delta U}{\mu_e}\right)^{3/2} \cdot \left[\left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{\bar{m}^*}{m_d^*}\right)^{3/2} + \left(\frac{\bar{m}^*}{3m_e^*}\right) \right];$$

$$P_d = \frac{1}{2} N_a \cdot \left(\frac{\ell \Delta U}{\mu_e}\right)^{3/2} \cdot \left[\left(\frac{m_d^*}{m_e^*}\right) \left(1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{\bar{m}^*}{m_e^*}\right)^{3/2} + \left(\frac{\bar{m}^*}{3m_e^*}\right)^{3/2} \right].$$

3.6.2. Енергетичні характеристики

Передбачається, що напівпровідник можна розглядати як чотирирівневу квантову систему, в якій енергетичні проміжки між сусідніми рівнями дуже малі, а верхні стани є метастабільними.

Потужність випромінювання інжекційного лазерного діода

$$P_{вих} = \eta_{cn}^e \cdot i_{nor} \cdot U + \eta_e \cdot (i - i_{nor}) \cdot U_0,$$

де $\eta_{cn}^e = \frac{\eta_{0cn}}{1 + 4 \cdot \beta_{\Sigma} \cdot V / st_{nop}} \approx 0,001$ – зовнішній квантовий вихід спонтанного

випромінювання;

$\eta_e = \frac{\ell}{h \cdot c} \cdot \frac{P_{вих}}{i} \cdot \lambda \approx 0,08$ – зовнішній квантовий вихід GaAs лазера;

V, s – об'єм і поверхня кристала при $T = 77$ К. У GaAs критична потужність руйнування складає близько 50 Вт на 1 мм ширини шару кристала;

$t_{nop} \approx \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cdot \left[1 - \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2\right] \approx 0,1$ – коефіцієнт пропускання;

n_1, n_2 – показники заломлення шарів напівпровідників р- і n- типу.

Пороговий струм нагнітання визначається за густиною струму j і площею s поверхні активного шару кристала:

$$i_{nop} = j_{nop}s, \text{ А},$$

де $j_{nop} = \left(\beta_{\Sigma} + \frac{1}{L} \cdot \ln \frac{1}{r}\right) / G_{nop}, \text{ А/см}^2$ – порогова густина струму;

$E_0 = \frac{2\gamma_n}{3z_1} \cdot \left(\frac{\mu_e}{\ell \cdot \Delta U}\right)^{3/2}, U$ – середня напруженість поля в р-n –переході.

Наприклад, при $\gamma_n = 2 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}; z_1 = 11,07; \mu_e = 3,3 \cdot 10^{-2} \text{ еВ}; \Delta U = 25,5 \text{ В}; E_0 = 1,4 \text{ В/см}$.

Енергія електронів і дірок, що беруть участь у генерації індукованого випромінювання

$$E_e = \frac{1}{3} \cdot \frac{\ell \cdot \Delta U}{m_e^*} \bar{m}^*; \quad E_D = \frac{1}{3} \cdot \frac{\ell \cdot \Delta U}{m_D^*} \bar{m}^*.$$

Якщо $\Delta U = 25,5 \text{ В}; \bar{m}^* / m_e^* = 0,06$, то $E_e \cong 6,38 \text{ еВ}, E_D \cong 1,02 \text{ еВ}$.

Енергія фотона індукованого випромінювання

$$\hbar\omega = \Delta E + E_e + E_D.$$

Якщо ширина забороненої зони $\Delta E = 1,4 \text{ еВ}$, то $\hbar\omega = 8,8 \text{ еВ}$.

Ширина енергетичного спектра, що відповідає ширині спектральної лінії випромінювання лазера

$$\Delta\varepsilon = A \cdot \left(\frac{i - i_{nop}}{i_{nop}} \right)^{1/3} ; A = 2 \cdot \Re \cdot T \cdot \left(\frac{\ell \cdot \Delta U}{\Re \cdot T} \right)^{1/6} \cdot \left(\frac{\omega_0 \cdot \bar{\tau}}{\eta_\omega} \right)^{1/3} ,$$

$\bar{\tau} = 1,5 \cdot 10^{-3}$ с – середній час рекомбінації;

$\eta_\omega = (\hbar \cdot \omega / \ell \cdot \Delta U) \cdot f(\beta_\Sigma; L; r) \cdot \eta_p \cong 0,7 \dots 0,8$ – диференціальна ефективність інжекційного лазера.

Повний ККД лазерного інжекційного діода

$$\eta_{повн} = \frac{P_{вих}}{i \cdot U} \approx \frac{P_{вих}}{iU_0 + i^2 \cdot R} ,$$

де R – опір навантаження. Ом;

$U_0 \approx \hbar \cdot \omega / \ell$ – напруга, прикладена до р-п –переходу.

Диференційний ККД

$$\eta_{диф} = \frac{\partial P_{вих}}{\partial (iU_0)} = \hbar \cdot \omega / \ell \cdot U_0 \cdot f(\beta_\Sigma; L; r) \cdot \eta_n \approx (0,7 \dots 0,8) .$$

Коефіцієнт підсилення, необхідний для підтримки генерації

$$G_{nop} = \beta_\Sigma + \frac{1}{L} \cdot \ln r ,$$

де β_Σ – коефіцієнт розподілених оптичних втрат у резонаторі, що складаються з втрат на поглинання і дифракційних втрат

$$\beta_\Sigma = \beta_{вн} + \beta_{диф} .$$

У гомоструктурах $\beta_\Sigma = 5 \cdot 10$ см⁻¹ при 77 К і $\beta_\Sigma = (50 \dots 100)$ см⁻¹ при 300 К.

Максимальне значення коефіцієнта підсилення в піку спектральної смуги підсилення

$$G_{max} = j(\pi^2 \cdot \hbar \cdot c^2 \cdot \eta_0) / [n^2 \cdot \ell \cdot \gamma_T \cdot (\hbar \cdot \omega)^2 \cdot (\Delta\omega_l) \cdot l_0] ,$$

або при $T = 300$ К

$$G_{max} \approx g_y \cdot j ,$$

де $\eta_0 \approx 1$ – внутрішній квантовий вихід (відношення числа випромінених фотонів до числа актів рекомбінації в одиницю часу);

l_0 – товщина активного шару;

$\gamma_T = 1$ при $T = 0$ К – температурний коефіцієнт, що враховує ступінь виродження носіїв заряду;

$(\Delta\omega_l)$ – ширина спектральної смуги люмінесценції;

$g_y \cong 1$ – питоме підсилення при сильному легуванні при $T = 0$ К.

Коефіцієнт поглинання

$$\beta_{\text{вн}} = \frac{1}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\ell^2 \cdot (2m^*)^{1/2} \cdot \sqrt{\hbar \cdot \omega - \Delta E}}{c \cdot n \cdot \hbar^2},$$

де $\varepsilon, \varepsilon_0$ – діелектрична проникність кристала і повітря.

Коефіцієнт дифракційних втрат

$$\beta_{\text{диф}} \approx 0,35 \cdot l^{1/2} \cdot \left(\frac{\lambda_0}{n \cdot l_0} \right)^{3/2}.$$

Спектральні та просторові характеристики. Ймовірна частота спонтанного випромінювання

$$\omega_0 = \frac{\ell^2 \cdot n \cdot \omega_g^2}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot m^* \cdot c^3},$$

де $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл – заряд електрона;

$n = 3,3$ – показник заломлення для GaAs при $T = 300$ К;

$\varepsilon = 12,5$ при $T = 300$ К – діелектрична проникність GaAs;

$\varepsilon_0 = 1,0059$ – діелектрична проникність повітря.

Частота індукованого випромінювання

$$\nu_0 = \frac{\Delta E + E_e + E_D}{h},$$

де $\Delta E = 1,4$ еВ – ширина забороненої зони (при $T = 300$ К),

E_e, E_D – енергія електронів і дірок, що беруть участь у генерації індукованого випромінювання.

Довжина хвилі випромінювання $\lambda_0 = \frac{c}{\nu_0}$, де $c = 2,9979 \cdot 10^8$ – швидкість

світла, см/с.

Відстань між сусідніми повздовжніми типами коливань

$$\Delta\lambda_q = \lambda_0^2 / 2n^*l,$$

де $n^* = n - \lambda_0 \cdot \left(\frac{dn}{d\lambda}\right)$ – ефективний показник заломлення;

$\frac{dn}{d\lambda}$ – градієнт показника заломлення.

Максимальна частота проходження імпульсів, на якій може працювати напівпровідниковий лазер,

$$f_{\max} = \frac{T_{xl} \cdot m \cdot c_t}{R \cdot \tau_u \cdot n_u \cdot \tau_p},$$

де T_{xl} – температура теплопроводу, К;

τ_p – теплова стала.

Вибраний лазер може працювати при кімнатній температурі у квазібезперервному режимі.

Розбіжність випромінювання інжекційного напівпровідникового лазера оцінюється наближеною формулою: $\gamma = \frac{\lambda_0}{l_0}$; $\gamma_{\perp} = \frac{\lambda_0}{d}$. Оскільки активна область

p-n – переходу має пластинчастоподібну форму, то для визначення розбіжності випромінювання важливі два розміри – ширина і товщина p-n – переходу ($d; l_0$).

3.7 Енергетичні стани частинок у квантоворозмірних структурах

3.7.1 Стаціонарне рівняння Шредінгера для частинок у прямокутній квантовій ямі.

Рівняння Шредінгера для стаціонарних станів частинок у квантовій ямі будь-якої форми записується у вигляді:

$$\hat{H}^0 \psi^0 = E^0 \cdot \psi^0; \quad (3.16)$$

де \hat{H}^0 – оператор Гамільтона, що складається з операторів кінетичної і потенціальної енергії;

ψ^0 – хвильова функція (власна функція оператора \hat{H}^0);

E^0 – енергія стаціонарного стану частинки (власне значення оператора \hat{H}^0).

Розв'язання рівняння Шредінгера полягає у визначенні власних значень і власних функцій.

Зазначимо, що стаціонарний стан з найменшим із усіх можливих значенням енергії називається нормальним або основним станом системи.

Розглянемо декілька прикладів визначення енергетичних станів частинок і квазічастинок в одношаровій квантоворозмірній структурі.

3.7.2 Частинки і квазічастинки в потенціальній ямі з нескінченно високими непроникними бар'єрами

Енергетична схема такої ями наведена на рис. 3.10, а. Актуальність постановки цієї задачі ґрунтується на тому, що тільки на її основі можливе проведення моделювання таких параметрів квантоворозмірних приладів, як спектри поглинання, випромінювання і відбиття, частоти і енергії випромінювальних переходів, імовірності випромінювальних і безвипромінювальних переходів, їх залежність від хімічного складу матеріалів КРС і впливу зовнішніх факторів – електричного, магнітного і акустичного полів, освітленості та ін.

Рівняння Шредінгера для будь-якої частинки в потенціальній ямі, що показана на рис. 3.10, а, може бути записано в такий спосіб:

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*(z)} \cdot \frac{\partial^2 \psi^0}{\partial z^2} = E^0 \cdot \psi^0, \quad (3.17)$$

де \hbar – стала Дірака (стала Планка поділена на 2π);

$m^*(z)$ – ефективна маса частинки (у загальному випадку залежить від координати [4], але, оскільки ширина ями за умовою задачі не повинна перевищувати довжини хвилі деБройля електронів у даному матеріалі, то на такій відстані ефективну масу будь-якої частинки можна вважати незмінною [4, 5], у такий спосіб у подальших викладках замість $m^*(z)$ можна записати m^*).

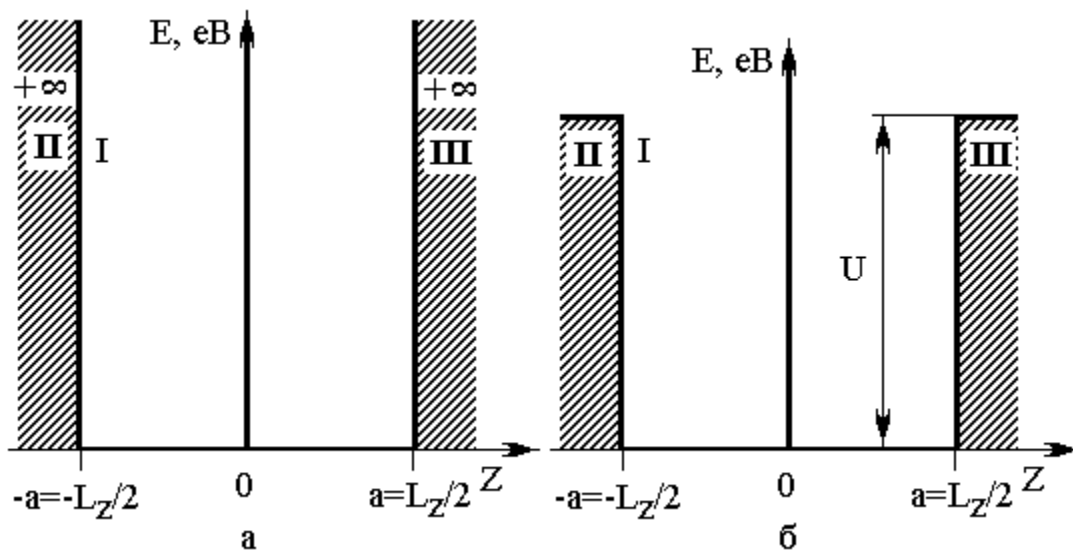


Рисунок 3.10 – Енергетична схема прямокутної потенціальної ями

Для визначення власних значень енергії E^0 і хвильових функцій частинки Ψ^0 зведемо усі фізичні і матеріальні сталі, а також шукану величину енергії під один коефіцієнт:

$$k^2 = \frac{2m^*}{\hbar^2} E^0, \quad (3.18)$$

з урахуванням (3.18), (3.17) можна переписати у вигляді:

$$\frac{\partial^2 \psi^0}{\partial z^2} + k^2 \cdot \psi^0 = 0. \quad (3.19)$$

Рішення для хвильової функції в ямі відшукується у вигляді стоячої хвилі, рівняння якої записується як суперпозиція гармонічних функцій:

$$\psi^0 = A \cdot \sin(k \cdot z) + B \cdot \cos(kz). \quad (3.20)$$

Якщо бар'єр непроникний, то хвильова функція повинна починатися і закінчуватися на бар'єрі, тобто:

$$\psi^0(a) = 0; \quad \psi^0(-a) = 0 \text{ – граничні умови.}$$

Для подальшого розгляду загальне розв'язання виразу (3.20) може бути подано як сума парного і непарного рішень [6, 7, 8]:

$$\psi^{0+}(z) = a^{1/2} \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{2a} \cdot z\right), \quad (3.21)$$

$$\psi^{0-}(z) = a^{1/2} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2a} \cdot z\right). \quad (3.22)$$

Спектр значень енергії частинок або квазічастинок має вигляд:

$$E_n^0 = \frac{h^2 \cdot n^2}{8 \cdot m^* \cdot L_Z^2} = \frac{\pi^2 \cdot \hbar^2 \cdot n^2}{2 \cdot m^* \cdot L_Z^2},$$

де n – номер енергетичного рівня частинки.

3.7.3 Частинки і квазічастинки в потенціальній ямі кінцевої глибини. У тому випадку, якщо бар'єр має кінцеву висоту і відмінну від нуля проникність, (рис. 3.10, б) рівняння Шредінгера для такої структури можна переписати у вигляді:

для області ями:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1^*} \cdot \frac{\partial^2 \psi_1^0}{\partial z^2} = E \psi_1^0, \quad (3.23)$$

для бар'єрів:

$$-\frac{\hbar^2}{2m_2^*} \cdot \frac{\partial^2 \psi_2^0}{\partial z^2} + V \psi_2^0 = E^0 \psi_2^0, \quad (3.24, a)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m_2^*} \cdot \frac{\partial^2 \psi_3^0}{\partial z^2} + V \psi_3^0 = E^0 \psi_3^0, \quad (3.24, б)$$

де індекси 1, 2 і 3 позначають приналежність власних функцій і власних значень, а також ефективних мас частинок до області ями і бар'єрів відповідно до рис. 3.10, б, а V – висота потенціального бар'єра.

Аналогічно випадку нескінченно високого бар'єра (3.17), (3.18):

$$k_1^2 = \frac{2m_1^*}{\hbar^2} E^0, \quad (3.25)$$

$$k_2^2 = \frac{2m_2^*}{\hbar^2} (V - E^0). \quad (3.26)$$

З урахуванням співвідношень (3.25) і (3.26) система рівнянь (3.23) – (3.24) матиме вигляд:

$$\frac{\partial^2 \psi_1^0}{\partial z^2} + k_1^2 \psi_1^0 = 0, \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_2^0}{\partial z^2} + k_2^2 \psi_2^0 = 0, \quad (3.28, a)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_3^0}{\partial z^2} + k_2^2 \psi_3^0 = 0. \quad (3.28, б)$$

Таким чином, щоб знайти власні значення енергії частинок в області ями і власні функції по всій структурі, необхідно розв'язати рівняння Шредінгера для областей 1, 2 і 3 – ями і бар'єрів відповідно, зшиваючи рішення на границі яма – бар'єр з урахуванням відповідних граничних умов.

Розв'язок в області ями відшукується у вигляді:

$$\Psi_1 = A_1 \exp(ik_1 z) + B_1 \exp(-ik_1 z), \quad -a \leq z \leq a, \quad (3.29)$$

а в області бар'єрів у вигляді відбитої хвилі і хвилі, що поширюється:

$$\psi_2 = A_2 e^{k_2 z} + B_2 e^{-k_2 z}; \quad -\infty < z \leq -a. \quad (3.30, a)$$

$$\psi_3 = A_3 e^{k_2 z} + B_3 e^{-k_2 z}; \quad a < z \leq \infty. \quad (3.30, б)$$

Відповідно до вимоги безперервності хвильової функції і її першої похідної на межі розподілу середовищ, граничні умови виглядатимуть у такий спосіб:

$$\Psi_1(-a) = \Psi_2(-a), \quad (3.31 a)$$

$$\Psi_1(a) = \Psi_3(a), \quad (3.31 б)$$

$$\frac{1}{m_1^*} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \Big|_{z=-a} = \frac{1}{m_2^*} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial z} \Big|_{z=-a}, \quad (3.31 в)$$

$$\frac{1}{m_1^*} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \Big|_{z=a} = \frac{1}{m_2^*} \cdot \frac{\partial \psi_3}{\partial z} \Big|_{z=a}. \quad (3.31 \text{ г})$$

Відповідно до вимоги скінченності хвильової функції у випадку «лівого» бар'єра маємо тільки відбиту хвилю, тобто $B_2 = 0$. А у випадку «правого» бар'єра тільки хвилю, що поширюється, тобто $A_3 = 0$.

$$\psi_2 = A_2 e^{k_2 z}; \quad \{-\infty < z \leq -a\}, \quad (3.32)$$

$$\psi_3 = B_3 e^{-k_2 z}; \quad \{a < z \leq \infty\}. \quad (3.33)$$

Використовуючи граничні умови (3.31, а) – (3.31, г) в точках $z = a$ і $z = -a$, отримаємо таку систему із чотирьох рівнянь:

$$A_1 \exp(-ik_1 a) + B_1 \exp(ik_1 a) = A_2 \exp(-k_2 a), \quad (3.34)$$

$$\frac{-ik_1}{m_1^*} \cdot [A_1 \exp(-ik_1 a) - B_1 \exp(ik_1 a)] = \frac{k_2}{m_2^*} \cdot A_2 \exp(-k_2 a), \quad (3.35)$$

$$A_1 \exp(ik_1 a) + B_1 \exp(-ik_1 a) = B_3 \exp(-k_2 a), \quad (3.36)$$

$$\frac{ik_1}{m_1^*} \cdot [A_1 \exp(ik_1 a) - B_1 \exp(-ik_1 a)] = \frac{-k_2}{m_2^*} \cdot B_3 \exp(-k_2 a). \quad (3.37)$$

Із рівнянь (3.34) і (3.35) маємо:

$$\frac{A_1 \exp(-ik_1 a) + B_1 \exp(ik_1 a)}{A_1 \exp(-ik_1 a) - B_1 \exp(ik_1 a)} = \frac{ik_1 \cdot m_2^*}{m_1^* \cdot k_2},$$

або

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{-ik_1 m_2^* + k_2 m_1^*}{-ik_1 m_2^* - k_2 m_1^*} \cdot \exp(2ik_1 a). \quad (3.38)$$

Із рівнянь (3.36) і (3.37) отримаємо:

$$\frac{A_1 \exp(ik_1 a) + B_1 \exp(-ik_1 a)}{A_1 \exp(ik_1 a) - B_1 \exp(-ik_1 a)} = -\frac{ik_1 \cdot m_2^*}{m_1^* \cdot k_2},$$

або

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{ik_1 m_2^* - k_2 m_1^*}{ik_1 m_2^* + k_2 m_1^*} \cdot \exp(-2ik_1 a). \quad (3.39)$$

Після того як помножимо рівняння (3.38) на (3.39), отримаємо $(A_1/B_1)^2$. Отже, $A_1 = \pm B_1$.

За умовою $A_1 = B_1$ з рівнянь (3.34) і (3.36) маємо:

$$A_2 = B_3 = 2A_1 \cos(k_1 a) \cdot \exp(k_2 a). \quad (3.40)$$

При цьому хвильові функції (3.29), (3.32) і (3.33) набувають вигляду:

$$\Psi_1 = 2A_1 \cos(k_1 z), \quad (3.41)$$

$$\Psi_2 = 2A_1 \cos(k_1 a) \cdot \exp(k_2(z + a)), \quad (3.42)$$

$$\Psi_3 = 2A_1 \cos(k_1 a) \cdot \exp(-k_2(z - a)). \quad (3.43)$$

За умовою $A_1 = -B_1$ з рівнянь (3.34) і (3.36) маємо:

$$A_2 = B_3 = 2iA_1 \sin(k_1 a) \cdot \exp(k_2 a). \quad (3.44)$$

Позначимо $A_1 = iA_1'$, тоді:

$$A_2 = B_3 = 2A_1' \sin(k_1 a) \cdot \exp(k_2 a). \quad (3.45)$$

При цьому хвильові функції (3.29), (3.32) і (3.33) набувають вигляду:

$$\Psi_1 = 2A_1' \sin(k_1 z), \quad (3.46)$$

$$\Psi_2 = 2A_1' \sin(k_1 a) \cdot \exp(k_2(z + a)), \quad (3.47)$$

$$\Psi_3 = 2A_1' \sin(k_1 a) \cdot \exp(-k_2(z - a)). \quad (3.48)$$

Таким чином, хвильові функції частинок і квазічастинок у потенціальной ямі, яка обмежена рівновисокими скінченними бар'єрами (рис. 3.10, б), є парними (симетричними) або непарними (несиметричними) функції координати z .

Нормуюча стала A_1 може бути отримана з умови:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dz = 1. \quad (3.49)$$

У розгорнутому вигляді рівняння (3.49) має вигляд:

$$\int_{-\infty}^{-a} |\Psi_2|^2 dz + \int_{-a}^a |\Psi_1|^2 dz + \int_a^{\infty} |\Psi_3|^2 dz = 1. \quad (3.50)$$

Позначимо парні функції (+), а непарні (-), тоді:
для парних функцій:

$$\frac{1}{(A_1^+)^2} = \frac{1}{k_1} \cdot [k_1 a + \sin(k_1 a) \cos(k_1 a)] + \frac{1}{k_2} (\cos(k_1 a))^2, \quad (3.51)$$

аналогічно для непарних функцій

$$\frac{1}{(A_1^-)^2} = \frac{1}{k_1} \cdot [k_1 a - \sin(k_1 a) \cos(k_1 a)] + \frac{1}{k_2} (\sin(k_1 a))^2. \quad (3.52)$$

Квантоворозмірна система, зображена на рис. 3.10, б, є симетричною відносно початку координат. Врахуємо це і далі використовуватимемо граничні умови тільки з однієї сторони ями, наприклад, при $z = a$. Тоді з рівнянь (3.29) і (3.33) маємо для парних функцій:

$$\psi_1(-a) = \psi_3(-a); \quad 2A_1 \cos(k_1 a) = B_3 \exp(-k_2 a) \quad (3.53)$$

$$\frac{1}{m_1^*} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \Big|_{z=a} = \frac{1}{m_2^*} \cdot \frac{\partial \psi_3}{\partial z} \Big|_{z=a}; \quad -2A_1 \frac{k_1}{m_1^*} \sin(k_1 a) = -\frac{k_2}{m_2^*} B_3 \exp(-k_2 a), \quad (3.54)$$

Розділивши (3.54) на (3.53), отримаємо:

$$\frac{-2A_1 k_1 \sin(k_1 a)}{2A_1 m_1^* \cos(k_1 a)} = \frac{-k_2 B_3 \exp(-k_2 a)}{B_3 m_2^* \exp(-k_2 a)},$$

$$\operatorname{tg}(k_1 a) = \frac{k_2 m_1^*}{k_1 m_2^*}, \quad (3.55)$$

аналогічно для непарних функцій:

$$\psi_1(-a) = \psi_3(-a); \quad 2A_1 \sin(k_1 a) = B_3 \exp(-k_2 a) \quad (3.56)$$

$$\frac{1}{m_1^*} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \Big|_{z=a} = \frac{1}{m_2^*} \cdot \frac{\partial \psi_3}{\partial z} \Big|_{z=a}; \quad 2A_1 \frac{k_1}{m_1^*} \cos(k_1 a) = -\frac{k_2}{m_2^*} B_3 \exp(-k_2 a), \quad (3.57)$$

Розділивши (3.57) на (3.56), матимемо:

$$\frac{2A_1 k_1 \cos(k_1 a)}{2A_1 m_1^* \sin(k_1 a)} = \frac{-k_2 B_3 \exp(-k_2 a)}{B_3 m_2^* \exp(-k_2 a)},$$

$$\operatorname{ctg}(k_1 a) = -\frac{k_2 m_1^*}{k_1 m_2^*}. \quad (3.58)$$

Функції тангенса і котангенса мають особливі точки: $n\pi$ для tg і $n\pi + \frac{\pi}{2}$ для ctg , тому для зручності наступних викладок і розв'язання трансцендентних рівнянь (3.55) і (3.58) відносно E на комп'ютері, корисно скористатися формулами зведення:

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha)}}, \quad \sin(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2(\alpha)}}, \quad (3.59)$$

Згідно з (3.59) маємо [9]:

$$\cos(k_1 a) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(k_1 a)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(k_2 m_1^*)^2}{(k_1 m_2^*)^2}}} = \sqrt{\frac{(k_1 m_2^*)^2}{(k_1 m_2^*)^2 + (k_2 m_1^*)^2}}, \quad (3.60)$$

$$\cos(k_1 a) = \sqrt{\frac{2 \cdot m_1^* \cdot E \cdot (m_2^*)^2 / \hbar^2}{2 \cdot m_1^* \cdot E \cdot (m_2^*)^2 / \hbar^2 + 2 \cdot m_2^* \cdot (V - E) \cdot (m_1^*)^2 / \hbar^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{m_2^* \cdot E}{m_1^* \cdot (V - E) + m_2^* \cdot E}}. \quad (3.61)$$

Аналогічно

$$\sin(k_1 a) = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2(k_1 a)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(k_2 m_1^*)^2}{(k_1 m_2^*)^2}}} = \sqrt{\frac{(k_1 m_2^*)^2}{(k_1 m_2^*)^2 + (k_2 m_1^*)^2}}, \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} \sin(k_1 a) &= \sqrt{\frac{2 \cdot m_1^* \cdot E \cdot (m_2^*)^2 / \hbar^2}{2 \cdot m_1^* \cdot E \cdot (m_2^*)^2 / \hbar^2 + 2 \cdot m_2^* \cdot (V - E) \cdot (m_1^*)^2 / \hbar^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{m_2^* \cdot E}{m_1^* \cdot (V - E) + m_2^* \cdot E}}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Для парних функцій (n – непарне):

$$k_1 a = n\pi - \arccos\left(\sqrt{\frac{m_2^* \cdot E}{m_1^* \cdot (V - E) + m_2^* \cdot E}}\right). \quad (3.64)$$

Для непарних функцій (n – парне):

$$k_1 a = n\pi - \arcsin\left(\sqrt{\frac{m_2^* \cdot E}{m_1^* \cdot (V - E) + m_2^* \cdot E}}\right). \quad (3.65)$$

Остаточно для власних значень енергії E отримаємо:
для парних функцій (n – непарне)

$$E(n) = \frac{\hbar^2}{2 \cdot m_1^* \cdot a^2} \cdot \left[n\pi - \arccos\left(\sqrt{\frac{m_2^* \cdot E}{m_1^* \cdot (V - E) + m_2^* \cdot E}}\right) \right]^2, \quad (3.66)$$

для непарних функцій (n – парне)

$$E(n) = \frac{\hbar^2}{2 \cdot m_1^* \cdot a^2} \cdot \left[n\pi - \arcsin \left(\sqrt{\frac{m_2^* \cdot E}{m_1^* \cdot (V - E) + m_2^* \cdot E}} \right) \right]^2. \quad (3.67)$$

Щоб отримати хвильові функції (3.41) – (3.43) і (3.45) – (3.48) у явному вигляді, необхідно підставити власні значення енергії (3.66) і (3.67) в названі вирази для парних і непарних хвильових функцій і нормуючих коефіцієнтів відповідно.

В додатку Б.1 наведена Mathcad програма для розрахунку власних значень енергії, власних функцій і функцій розподілу ймовірностей частинок і квазічастинок.

На рис. 3.11 показано власні значення енергії і хвильові функції електронів для квантово-обмеженого шару шириною 30 А, розраховані за допомогою співвідношень (3.66), (3.67) і (3.41) – (3.43), (3.46) – (3.48).

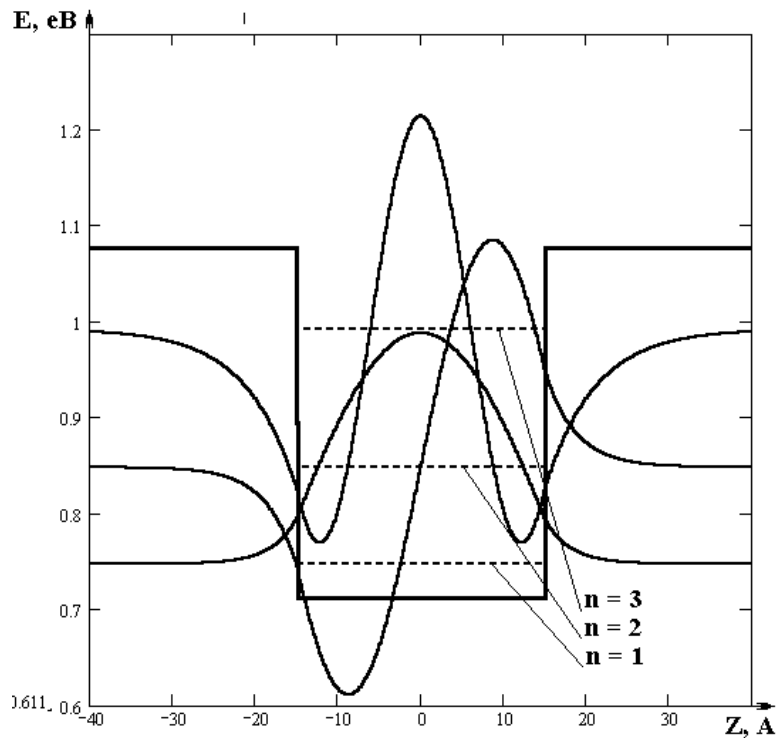


Рисунок 3.11 – Власні значення енергії і власні функції електронів у потенціальній ямі шириною 30 А

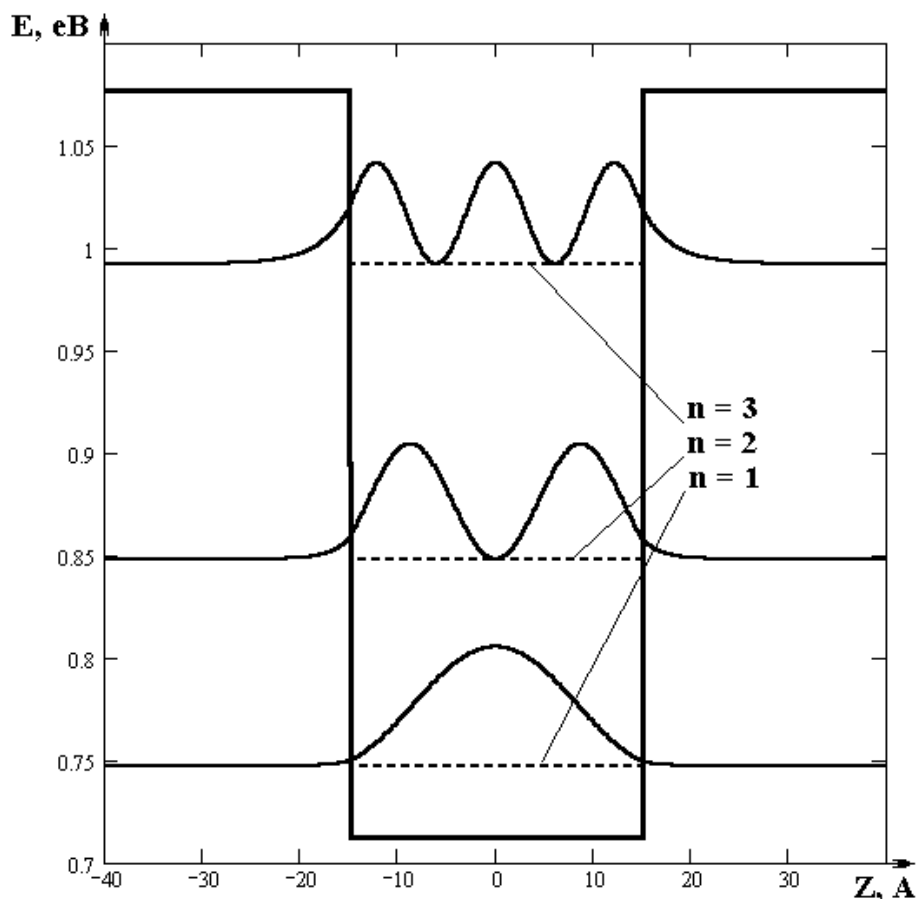


Рисунок 3.12 – Функція розподілу імовірності електронів у потенціальній ямі шириною 30 Å

Власні значення енергії і власні функції важких і легких дірок, а також їхньої функції розподілу ймовірності для потенціальної ями шириною 30 Å, наведені на рис 3.12 і в додатку Б.2. У тому ж додатку показано результати розрахунків для квантових ям іншої ширини і висоти бар'єрів, що обмежують яму.

3.8 Квантоворозмірна структура у зовнішніх електричних полях

3.8.1 Вплив зовнішнього стаціонарного електричного поля на енергетичні стани частинок і квазічастинок

Сучасний рівень розвитку технології виробництва квантово-розмірних структур на основі напівпровідникових матеріалів і їхніх твердих розчинів вимагає адекватного описання фізичних процесів, що відбуваються у таких структурах. Це необхідно для розрахунку робочих режимів приладів наноелектроніки, більшість робочих областей яких є квантово-розмірними структурами. Характеристики приладів цього класу визначаються різного роду взаємодіями частинок і квазічастинок у КРС із зовнішніми впливами, у тому числі з зовнішніми електричними і магнітними полями. Дослідженню впливу стаціонарних електричних полів на процеси, що відбуваються у КРС, присвячений цілий ряд робіт, зокрема [10 – 13].

Вплив зовнішнього електричного поля на стани частинки в квантовій ямі досліджувався у фундаментальних роботах квантової теорії, таких як [8, 14, 15]. У цих роботах була розвинута теорія збурень, на підставі якої розроблені методи розв'язання рівняння Шредінгера з урахуванням оператора збурення, що описує зовнішній вплив на квантову систему. Однак можливості обчислювальної техніки в той період часу були такі, що дозволяли використовувати цю теорію лише для обмеженого кола задач. Для урахування впливу зовнішнього стаціонарного електричного поля на енергетичні стани частинок і квазічастинок в одновимірній КРС можна також запропонувати використовувати теорію збурень [16].

Розглянемо одновимірну квантово-розмірну структуру на основі з'єднання GaAs/Al_xGa_{1-x}As, енергетична діаграма якої подана на рис. 3.13.

Хвильові функції і власні значення енергії електронів і дірок у цій структурі визначаються під час розв'язання рівняння Шредінгера у відсутності зовнішнього електричного поля (див. підрозд. 3.7.).

Розглянемо рух частинок і квазічастинок (електронів і дірок) в одновимірній потенціальній ямі, обмеженій рівновисокими, напівнескінченними за шириною, симетричними прямокутними потенціальними бар'єрами висотою V_0 (для електронів $V_0 = V_e$, для дірок $V_0 = V_h$).

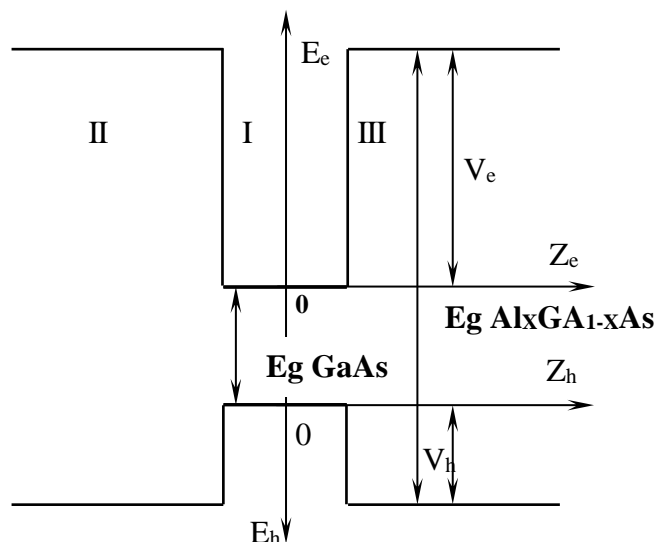


Рисунок 3.13 – Енергетична діаграма КРС на основі GaAs/Al_xGa_{1-x}As

Припускається, що на частинки, які знаходяться в такій ямі, діє збурення у вигляді зовнішнього стаціонарного електричного поля напруженістю \vec{E} , спрямоване вздовж осі z . У цьому випадку оператор Гамільтона, що входить у рівняння Шредінгера (3.16), записується так:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}_0 + \hat{V}', \quad (3.68)$$

де \hat{V}' – оператор збурення.

Для даного випадку оператор \hat{V}' становить:

$$\hat{V}' = -e\vec{E}\vec{z}, \quad (3.69)$$

тут e – заряд електрона; \vec{E} – напруженість зовнішнього електричного поля.
З урахуванням (3.68) і (3.69) рівняння Шредінгера запишеться так:

$$\left(\hat{H}_0 + \hat{V}_0 + \hat{V}' \right) \Psi = E \Psi, \quad (3.70)$$

або

$$\left(\hat{H}_0 + \hat{V}_0 - e\vec{E}\vec{z} \right) \Psi = E \Psi. \quad (3.71)$$

Позначимо:

$$\hat{H}_0 + \hat{V}_0 = \hat{H}^0, \quad (3.72)$$

де \hat{H}^0 – гамільтоніан, власні значення енергії якого E^0 і власні функції Ψ^0 задовольняють стаціонарне рівняння Шредінгера для ями і бар'єра – (3.23), (3.24) під час відсутності зовнішнього електричного поля.

З урахуванням (3.72) рівняння (3.71) перепишеться так:

$$\left(\hat{H}^0 - e\vec{E}\vec{z} \right) \Psi = E \Psi. \quad (3.73)$$

Відповідно до теорії збурень [8, 15] розв'язки для E і Ψ знаходять у вигляді рядів:

$$E = E^0 + E^{(1)} + E^{(2)} + E^{(3)} + \dots, \quad (3.74)$$

$$\Psi = \Psi^0 + \Psi^{(1)} + \Psi^{(2)} + \Psi^{(3)} + \dots, \quad (3.75)$$

де $E^{(1)}$, $\Psi^{(1)}$ – величини першого порядку малості стосовно E^0 і Ψ^0 ;
 $E^{(2)}$, $\Psi^{(2)}$ – величини другого порядку малості стосовно E^0 і Ψ^0 і т.д.

Підставляючи (3.74) і (3.75) у (3.73), отримаємо для хвильової функції Ψ_k з урахуванням першого наближення теорії збурень такий вираз:

$$\Psi_k = \Psi_k^0 + \Psi_k^{(1)}, \quad (3.76)$$

де

$$\Psi_k^{(1)} = \sum_{\substack{l \\ l \neq k}} \left(\frac{V'_{lk}}{E_l^0 - E_k^0} \Psi_l^0 \right). \quad (3.77)$$

Для власного значення енергії E_k :

$$E_k = E_k^0 + E_k^{(1)}. \quad (3.78)$$

Тут

$$E_k^{(1)} = V'_{kk}, \quad (3.79)$$

$$V'_{kk} = \int \Psi_k^{0*} \hat{V}' \Psi_k^0 dz, \quad (3.80)$$

де Ψ_k^0 і Ψ_l^0 – хвильові функції незбуреного гамільтоніана з рівнянь (3.23), (3.24), що визначаються за формулами (3.41) – (3.43) і (3.46) – (3.48);

E_l^0 і E_k^0 – власні значення енергії незбуреного гамільтоніана з рівняння (3.23), (3.24), що визначаються за формулами (3.66), (3.67).

Для визначення впливу зовнішнього стаціонарного електричного поля на енергетичні стани електронів, важких і легких дірок у квантово-розмірній структурі, показаній на рис. 3.13, необхідно, насамперед, знайти власні значення енергії і власні функції цих частинок у стаціонарному стані, тобто у відсутності зовнішнього електричного поля.

Власні значення енергії і власні функції частинок, що знаходяться в квантово-обмеженому шарі, отримані в результаті розв'язання рівняння Шредінгера для областей ями і бар'єра, показаних на рис. 3.13.

Для випадку квантово-розмірної структури, показаної на рис. 3.13, з шириною квантово-обмеженого шару $2a=100\text{Å}$ і висотами бар'єрів для електронів $V_e=0,365$ еВ і для дірок $V_h=0,196$ еВ, рівняння (3.41) – (3.43) і (3.46) – (3.48) можуть бути записані таким чином:

парні розв'язки

$$\Psi^{0+}(z) = \begin{cases} A^+ \cos(k_1 \cdot z), & -50 \leq z \leq 50, \\ A^+ \cos(k_1 \cdot a) \cdot e^{k_2 \cdot (z+a)}, & z \leq -50, \\ A^+ \cos(k_1 \cdot a) \cdot e^{-k_2 \cdot (z-a)}, & 50 \leq z; n=1,3,5, \dots, \end{cases} \quad (3.81)$$

непарні розв'язки

$$\Psi^{0-}(z) = \begin{cases} A^- \sin(k_1 \cdot z), & -50 \leq z \leq 50, \\ A^- \sin(k_1 \cdot a) \cdot e^{k_2 \cdot (z+a)}, & z \leq -50, \\ A^- \sin(k_1 \cdot a) \cdot e^{-k_2 \cdot (z-a)}, & 50 \leq z; n = 2, 4, 6, \dots, \end{cases} \quad (3.82)$$

де z – поточна координата в області розв'язання;

a – напівширина квантово-обмеженого шару (квантової ями);

A^+ A^- – коефіцієнти, які визначаються з умови нормування хвильової функції на одиницю (3.51), (3.52).

Величини k_1 і k_2 знаходять за формулами (3.25), (3.26). Необхідно нагадати, що для кожного виду частинок і квазічастинок ефективні маси для областей квантової ями і бар'єрів, які обмежують яму, обчислюються окремо залежно від хімічного складу матеріалів ями та бар'єрів. Фізичні параметри матеріалів гетероструктури GaAs/Al_xGa_{1-x}As, наведено в табл. 3.7.

Таблиця 3.7

Параметр	GaAs	AlAs	$Al_xGa_{1-x}As$
$E_g, \text{Ев}$	1,424	3,018	$1,424+1,247 \cdot X, 0 < X < 0,45$ $1,424+1,247 \cdot X+1,147 \cdot (X-0,45), 0,45 < X < 1,0$
m_c/m_0	0,067	0,124	$0,067+0,057 \cdot X$
γ_1	6,85	3,45	$6,85-3,4 \cdot X$
γ_2	2,1	0,68	$2,1-1,42 \cdot X$

Ефективні маси легких і важких дірок обчислюються згідно з формулами:

$$m_{hh} = \frac{m_0}{(\gamma_1 - 2 \cdot \gamma_2)}, \quad (3.83)$$

$$m_{lh} = \frac{m_0}{(\gamma_1 + 2 \cdot \gamma_2)}, \quad (3.84)$$

де m_{hh} – маса важкої дірки;

m_{lh} – маса легкої дірки;

m_0 – маса спокою електрона;

γ_1 і γ_2 – матеріальні сталі Латтінгера.

Залежності хвильових функцій Ψ^{0+} і Ψ^{0-} , а також функцій розподілу ймовірності $w(z) = |\Psi^{0\pm}|^2$ для електрона, подані на рис. 3.14, а і 3.14, б [17].

Подані функції у всіх випадках симетричні щодо центра ями ($z=0$). Цього слід очікувати, тому що бар'єри, які обмежують яму, рівновисокі і створюване ними поле V_e симетричне щодо центра ями. Розрахунок проведено для молярної частки алюмінію в матеріалі бар'єра $x = 0,45$, виходячи з цього, відповідним чином вибиралася ширина забороненої зони матеріалу бар'єра і ефективні маси частинок у ньому (згідно з даними табл. 5.7 і формул (3.83), (3.84)). Ширина квантово-обмеженого шару для даного випадку вибрана рівною 100 Å, при такому розмірі структури квантові ефекти виражені досить чітко. Кількість енергетичних станів електронів у квантовій ямі, обмеженій бар'єрами висотою $V_e = 0,365$ eВ, досягає дев'яти і змінюватиметься залежно від висоти бар'єра і ширини квантової ями. На рис. 3.14, а і 3.14, б наведено хвильові функції і функції розподілу ймовірності тільки для трьох перших значень n , тобто з безлічі функцій (3.81) враховані тільки два стани $n = 1, 3$, а з безлічі функцій (3.82) – тільки одне значення $n = 2$. Розрахунки можуть бути виконані для всіх значень n як парних, так і непарних рішень, що містяться в ямі, однак для практично важливих випадків інтерес становлять перші два – три

рівні як для електронів, так і для дірок. На рис. 3.15, а, б і 3.16, а, б подані $\Psi^{0\pm}$ і $w(z)$ для важких і легких дірок.

У відсутності зовнішнього стаціонарного електричного поля властивості хвильових функцій важких і легких дірок аналогічні властивостям хвильових функцій електронів.

Розглянемо випадок, коли до квантово-розмірної структури прикладене зовнішнє стаціонарне електричне поле, спрямоване перпендикулярно площині квантового обмеження (вздовж осі z рис. 3.13). Прикладене поле можна розглядати як збурення, оператор якого може бути описаний формулою (3.69).

За наявності зовнішнього збурення рівняння Шредінгера для частинок і квазічастинок, що знаходяться в квантово-розмірній структурі, записується так:

$$\left(\hat{H}^0 - e \vec{E} \vec{z} \right) \Psi = E \Psi .$$

Для визначення власних значень енергії і хвильових функцій частинок у розглянутій квантово-розмірній структурі (рис. 3.13), якщо використовувати перше наближення теорії збурень, формула (3.74) переписеться у вигляді:

$$E_n = E_n^0 + \lambda \cdot E_n^1 = E_n^0 + V_{nn} . \quad (3.85)$$

Тут V_{nn} обчислюється за формулою (3.80):

$$V_{nn} = \int \Psi_n^{0*} \cdot \hat{V}' \cdot \Psi_n^0 dz . \quad (3.86)$$

Підставляючи у вираз (3.86) значення хвильових функцій Ψ_n^0 з (3.81) або (3.82) і інтегруючи по всьому просторі визначення хвильових функцій Ψ_n^0 , одержимо, що $V_{nn} = 0$, тобто виправлення першого наближення теорії збурень дорівнює нулю, отже, $E_n = E_n^0$.

Визначимо хвильові функції електронів, легких і важких дірок з урахуванням першого наближення теорії збурень. У цьому випадку

$$\Psi_n = \Psi_n^0 + \Psi_n^{(1)} , \quad (3.87)$$

де

$$\Psi_n^{(1)} = \sum_{\substack{m \\ m \neq n}} \left(\frac{V_{mn}}{E_m^0 - E_n^0} \Psi_m^0 \right) . \quad (3.88)$$

Підставляючи у вирази (3.87) і (3.88) значення хвильових функцій Ψ_n^0 з

(3.81) або (3.82) і значення E_n^0 , що для розглянутої задачі визначені співвідношеннями (3.66) і (3.67), отримаємо залежності хвильових функцій і функцій розподілу ймовірності електронів – рис. 3.17, а, б, важких дірок – рис. 3.18 а, б, легких дірок – рис. 3.19, а, б. Тут, як і у випадку відсутності збурення, враховані перші три стани частинок ($n = 1, 2, 3$).

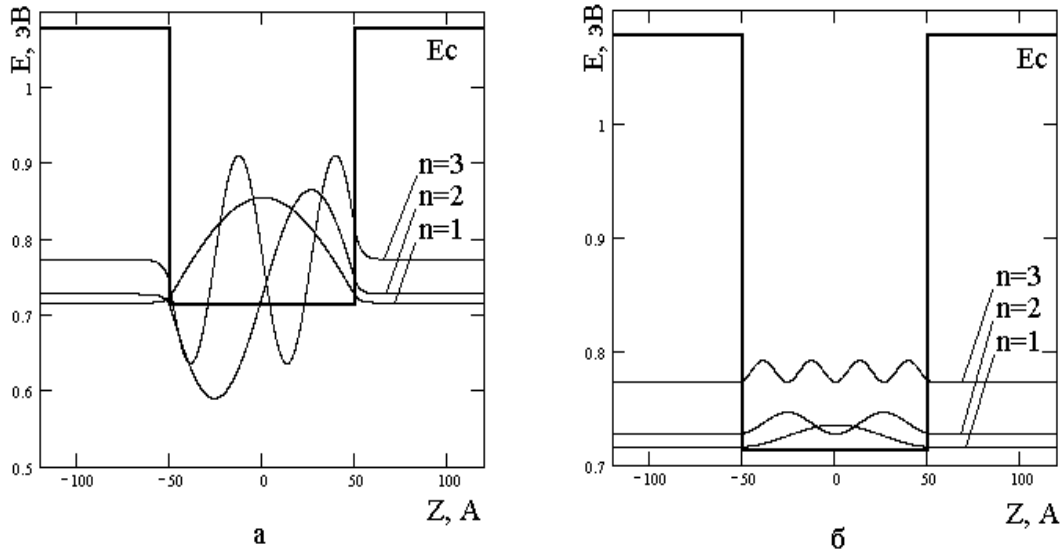


Рисунок 3.14 – Хвильові функції Ψ^{0+} і Ψ^{0-} і функції розподілу ймовірності $w(z)$ для електрону

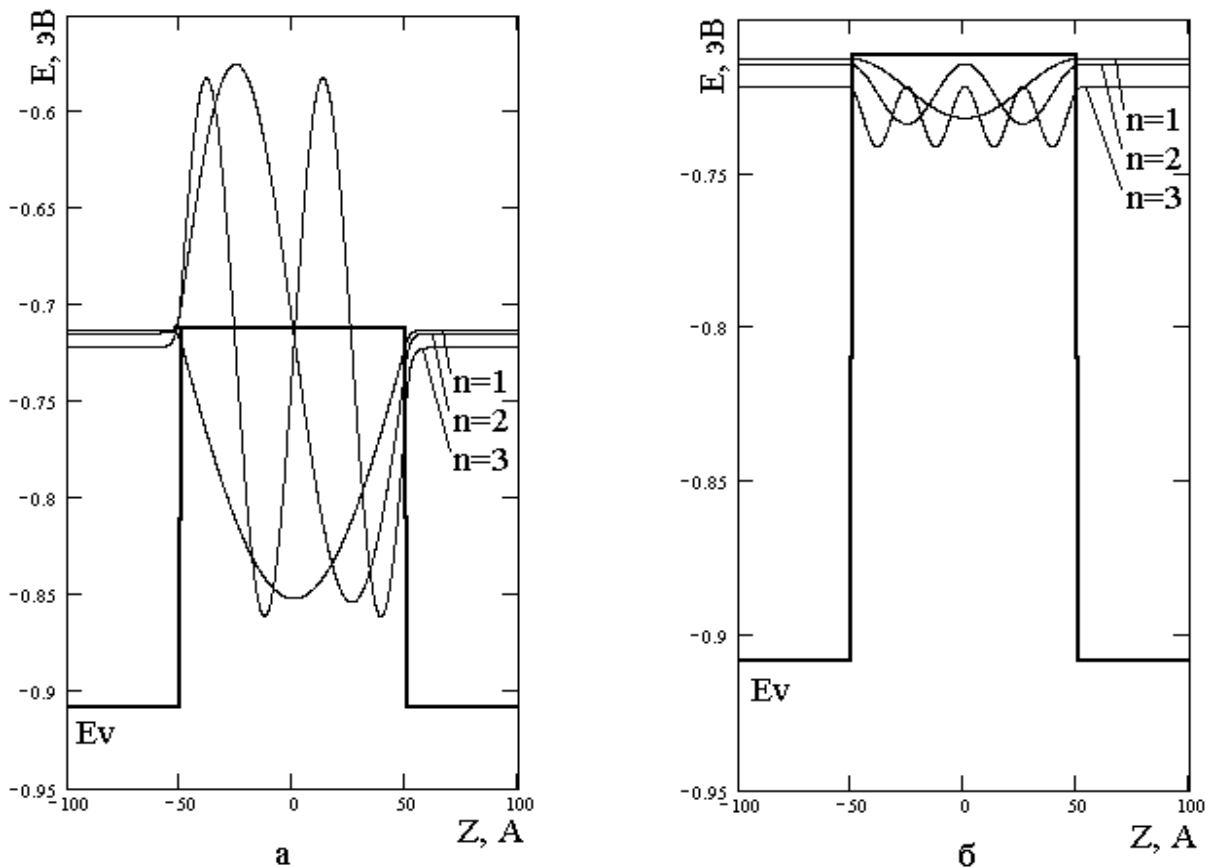


Рисунок 3.15 – Хвильові функції Ψ^{0+} і Ψ^{0-} і функції розподілу ймовірності $w(z)$ для важкої дірки

ймовірності $w(z)$ для важких дірок

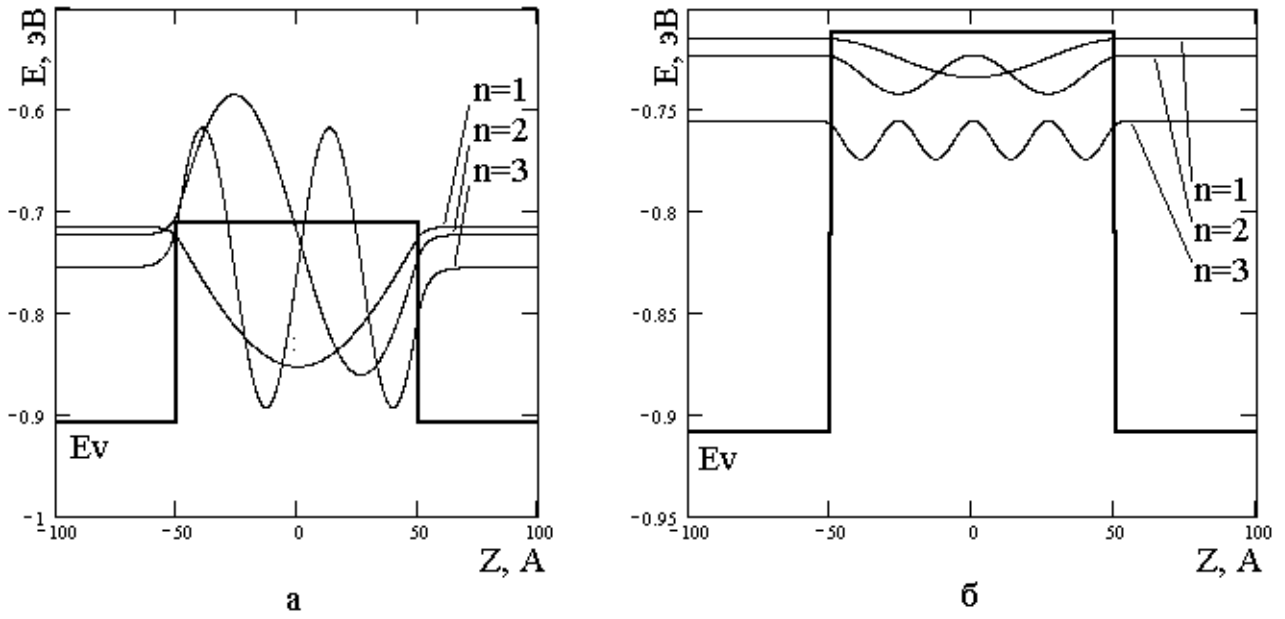


Рисунок 3.16 – Хвильові функції Ψ^{0+} і Ψ^{0-} і функції розподілу ймовірності $w(z)$ для легких дірок

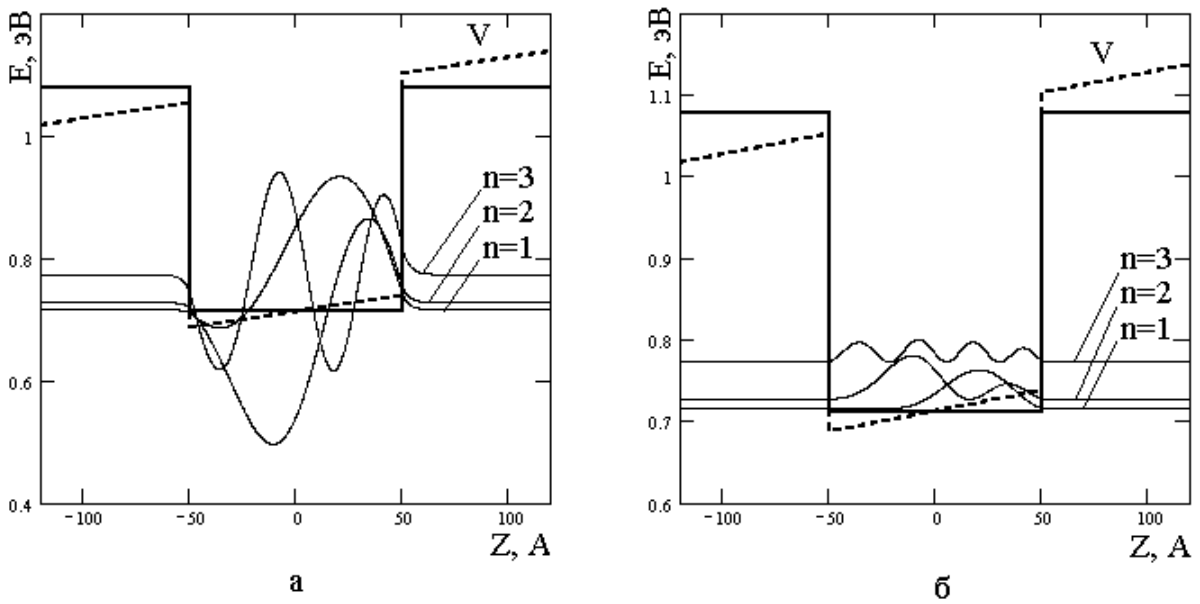


Рисунок 3.17 – Хвильові функції Ψ^{0+} і Ψ^{0-} і функції розподілу ймовірності $w(z)$ для електрона за наявності збурення

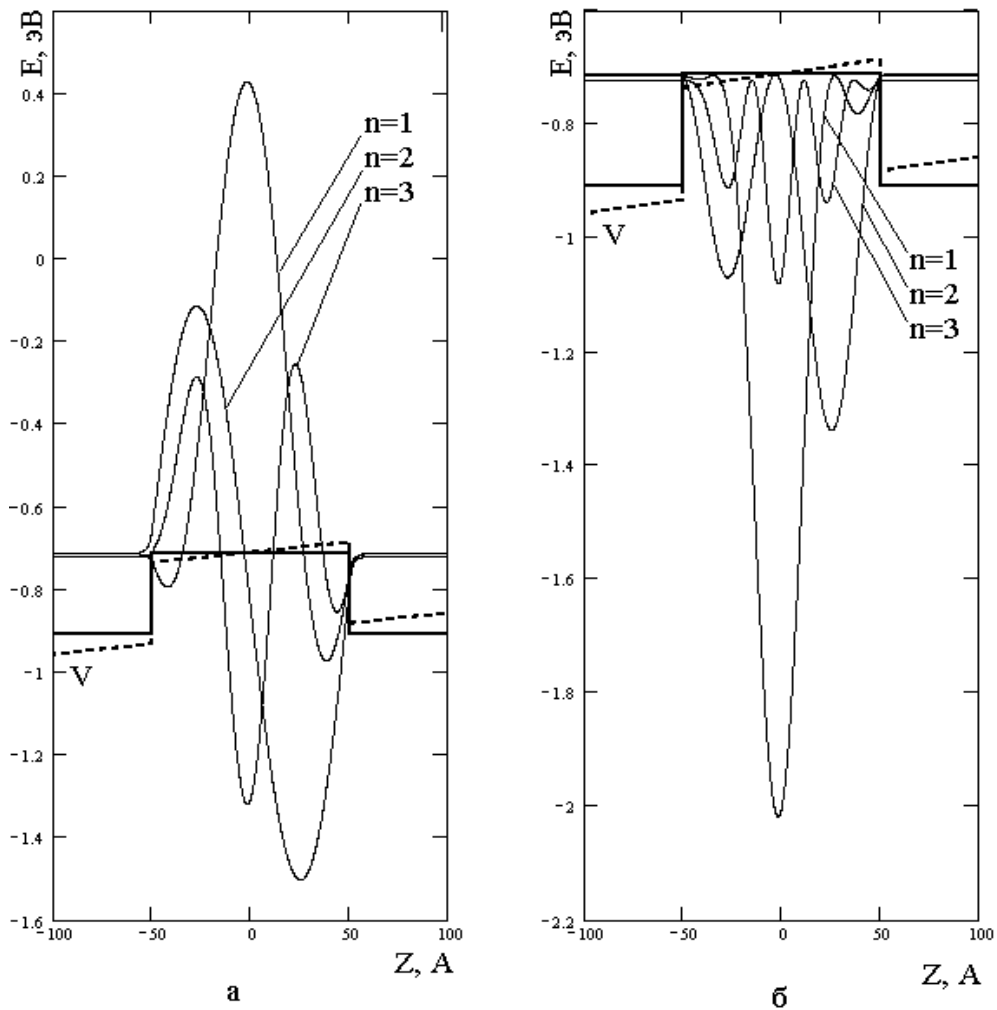


Рисунок 3.18 – Хвильові функції Ψ^{0+} і Ψ^{0-} і функції розподілу ймовірності $w(z)$ для важких дірок за наявності збурення

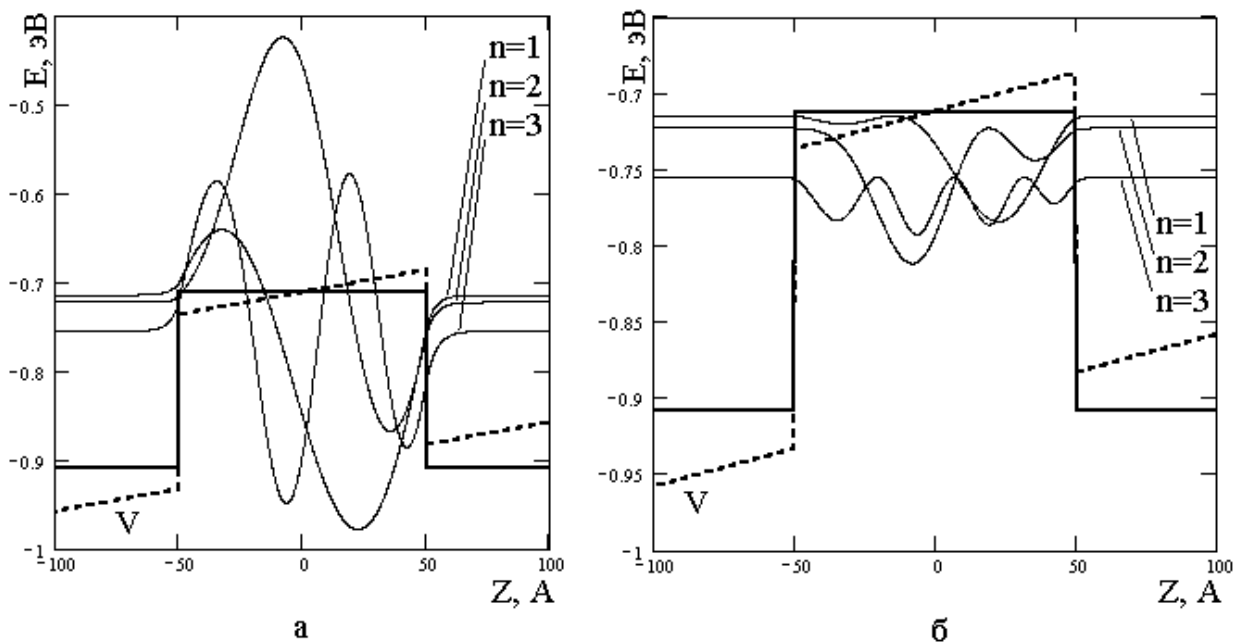


Рисунок 3.19 – Хвильові функції Ψ^{0+} і Ψ^{0-} і функції розподілу ймовірності $w(z)$ для легких дірок за наявності збурення

Аналізуючи отримані результати, можна зробити висновок про те, що наявність зовнішнього збурення – стаціонарного електричного поля призводить до зміни парності хвильових функцій для електронів і дірок. Також спостерігається зсув максимумів хвильових функцій і функцій розподілу ймовірності для кожної з розглянутих частинок і квазічастинок. Для електронів хвильові функції і функції розподілу ймовірності зміщуються в напрямку, протилежному напрямку прикладеного зовнішнього поля. Для важких і легких дірок зсув відбувається в напрямку поля.

3.8.2 Вплив зовнішнього гармонічного електричного поля на енергетичні стани частинок і квазічастинок

Для розв'язку ряду практичних задач з використання напівпровідникових світловипромінювальних діодів і лазерів на основі квантово-розмірних структур виникає необхідність дослідження впливу зовнішніх електричних або магнітних полів, що змінюються в часі, на енергетичні стани частинок і квазічастинок (електронів, легких і важких дірок), що знаходяться в активній області приладу і беруть участь у процесах випромінювальної рекомбінації. Для вирішення цієї проблеми можна скористатися теорією збурень. Розглянемо квантово-розмірну структуру, енергетичний профіль якої наведено на рис. 3.13. Якщо на цю систему не діють збурення, то частинки і квазічастинки (електрони і дірки) у цій квантово-розмірній структурі знаходяться в стаціонарному стані, описаному стаціонарним рівнянням Шредінгера (3.16).

Якщо на цю квантово-розмірну структуру діє збурення, що залежить від часу, оператор якого – $\hat{V}(z,t)$, то рівняння Шредінгера в цьому випадку може бути записане таким чином:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(z,t)}{\partial t} = \left[\hat{H}_0 + \hat{V}(z,t) \right] \Psi(z,t). \quad (3.89)$$

Нехай у деякий момент часу $t = t_0$ в системі частинок і квазічастинок у розглянутій квантово-розмірній структурі збурення відсутнє, тобто $\hat{V}(z,t) = 0$. Тоді рівняння (3.89) можна переписати у вигляді:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi^0(z,t)}{\partial t} = \hat{H}_0(z) \Psi^0(z,t). \quad (3.90)$$

При цьому

$$\Psi(z,t) = \Psi^0(z,t) \Big|_{t=t_0}. \quad (3.91)$$

Розв'язком рівняння (3.90) є функція

$$\Psi_n^0(z, t) = \Psi_n^0(z) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} E_n^0 t}. \quad (3.92)$$

Функції $\Psi_n^0(z, t)$ утворюють повну замкнуту систему власних функцій оператора $\hat{H}_0(z)$ і, отже, будь-яку функцію $\Psi(z, t)$ можна розкласти в ряд Фур'є по функціях $\Psi_n^0(z)$. Тоді загальним розв'язком рівняння Шредінгера (3.89) при $\hat{V}(z, t) = 0$ буде:

$$\Psi(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \Psi_n^0(z) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} E_n^0 t}, \quad (3.93)$$

де C_n – довільні сталі, що задовольняють умову нормування.

Практично це відповідає випадку, коли система частинок і квазічастинок (електронів і дірок) знаходиться в якомусь одному визначеному стані n , так що хвильова функція цього стану визначається виразом (3.93). При цьому необхідно припустити, що коефіцієнти розкладання – C_n у (3.93) не є функціями часу, тобто при $t = t_0$ усі C_n дорівнюють нулю за винятком одного, наприклад, C_m , що, відповідно до умови ортонормування, можна прийняти рівним одиниці.

Для моментів часу, більших $t = t_0$, оператор збурення $\hat{V}(z, t) \neq 0$. У цьому випадку хвильова функція, що задовольняє рівняння (3.89), може бути записана так:

$$\Psi(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) \Psi_n^0(z) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} E_n^0 t}. \quad (3.94)$$

Підстановка розв'язку (3.94) у рівняння (3.89) перетворить його до вигляду:

$$i\hbar \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dC_n(t)}{dt} \Psi_n^0(z) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} E_n^0 t} = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{V}(z, t) C_n(t) \Psi_n^0(z) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} E_n^0 t}. \quad (3.95)$$

Після скалярного множення рівняння (3.95) на функцію $\Psi_m^{0*}(z) \cdot e^{\frac{i}{\hbar} E_m^0 t}$ і інтегрування по z воно перетвориться в систему диференціальних рівнянь щодо

коефіцієнтів розкладання $C_n(t)$:

$$i\hbar \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dC_n(t)}{dt} \cdot \delta_{mn} \cdot e^{i\omega_{mn}t} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) e^{i\omega_{mn}t} \hat{V}_{mn}(t), \quad (3.96)$$

тут

$$\delta_{mn} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_m^{0*}(z) \Psi_n^0(z) dz,$$

Оскільки $\delta_{mn} = 1$ при $m = n$ і $\delta_{mn} = 0$ при $m \neq n$, то рівняння (3.96) набуває вигляду:

$$i\hbar \frac{dC_m(t)}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) \hat{V}_{mn}(t) e^{i\omega_{mn}t}, \quad (3.97)$$

де

$$\hat{V}_{mn}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_m^{0*}(z) \hat{V}(z,t) \Psi_n^0(z) dz,$$

$$\omega_{mn} = \frac{E_m - E_n}{\hbar}.$$

Вираз (3.97) є нескінченною системою лінійних, однорідних диференціальних рівнянь першого порядку, в яких невідомими функціями будуть $C_n(t)$. Рівняння (3.97) відбиває той факт, що перехід системи в стан m залежить від усіх станів системи, що в ході дії даного збурення комбінують зі станом m . Отже, якщо один з коефіцієнтів, наприклад, $C_m(t)$, змінився, то повинні змінитися й інші коефіцієнти, але так, щоб сума:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |C_n(t)|^2 = 1.$$

Розв'язок рівняння (3.97) може бути поданий у вигляді ряду:

$$C_m(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k C_m^{(k)}(t). \quad (3.98)$$

Цей ряд сходиться, при $0 < \lambda \leq 1$.

Підстановка (3.98) у (3.97) дає:

$$i\hbar \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{dC_m^{(k)}(t)}{dt} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k+1} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(k)}(t) \hat{V}_{mn}(t) e^{i\omega_{mn}t}. \quad (3.99)$$

Прирівнюючи коефіцієнти за рівних ступенів λ , знаходимо:

$$i\hbar \frac{dC_m^{(0)}(t)}{dt} = 0, \quad (3.100)$$

$$i\hbar \frac{dC_m^{(1)}(t)}{dt} = C_n^{(0)}(t) \hat{V}_{mn}(t) e^{i\omega_{mn}t}. \quad (3.101)$$

У загальному вигляді рівняння для визначення коефіцієнтів $C_m^{(k)}(t)$ запишемо так:

$$i\hbar \frac{dC_m^{(k)}(t)}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(k-1)}(t) \hat{V}_{mn}(t) e^{i\omega_{mn}t}. \quad (3.102)$$

Коефіцієнти $C_m(t)$ можуть бути визначені з точністю до будь-якого порядку за допомогою методу послідовних наближень.

Отже, нехай розглянута система знаходиться в одному з власних стаціонарних станів $\Psi_n^0(z) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} E_n^0 t}$ при $t = t_0$. Тоді $C_m(t_0) = C_m^0(t) = \delta_{mn}$ дає розв'язок задачі в нульовому наближенні:

$$i\hbar \frac{dC_m^{(0)}(t)}{dt} = 0. \quad (3.103)$$

Очевидно, що розв'язком рівняння (3.103) буде:

$$C_m^{(0)}(t) = \text{const}. \quad (3.104)$$

При $m = n$ $C_m^{(0)}(t) = 1$, при $m \neq n$ $C_m^{(0)}(t) = 0$.

Виправлення першого порядку виходить з рівняння (3.101):

$$i\hbar \frac{dC_m^{(1)}(t)}{dt} = e^{i\omega_{mn}t} \hat{V}_{mn}(t). \quad (3.105)$$

Нехай збурення діє на розглянуту систему частинок і квазічастинок протягом визначеного часу, починаючи від t_0 до якогось τ . Поклавши $t_0 = 0$, проінтегруємо (3.105) по t в заданому інтервалі і отримаємо:

$$C_m^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^\tau e^{i\omega_{mn}t} \hat{V}_{mn}(t) dt. \quad (5.106)$$

Це розв'язання системи (3.101) у першому наближенні для моментів часу t , що лежать у межах $0 \leq t \leq \tau$. Підставляючи перше наближення для $C_m^{(1)}(t)$ в праву частину (3.102), поклавши $k=2$, знайдемо рівняння для другого наближення:

$$i\hbar \frac{dC_m^{(2)}(t)}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{(1)}(t) \hat{V}_{mn}(t) e^{i\omega_{mn}t}. \quad (3.107)$$

Оскільки $C_n^{(1)}(t)$ відомі функції часу (3.106), то, інтегруючи (3.107) за часом, можна знайти $C_m^{(2)}(t)$, тобто друге наближення. Цю процедуру можна продовжити і далі, і вона веде до точного розв'язку для $C_m(t)$. У більшості випадків достатньо обмежитися першим або другим наближенням.

Оператор збурення в рівнянні (3.98) для більшості практично важливих випадків змінюється за гармонічним законом з часом.

У випадку, якщо квантоворозмірна структура, показана на рис. 3.13, поміщена в зовнішнє перемінне магнітне поле $\vec{H} \cdot \cos(\omega t)$, спрямоване уздовж осі z , оператор збурення

$$\hat{V}(z, t) = -\mu \cdot \vec{H} \cdot z \cdot \cos(\omega t), \quad (3.108)$$

де

$$\mu = -\frac{e \cdot \hbar}{2 \cdot m^* \cdot c},$$

тут m^* – ефективна маса частинки або квазічастинки (електрона або дірки);
 c – швидкість світла.

Якщо розглянута квантово-розмірна структура поміщена в зовнішнє змінне електричне поле, що спрямоване уздовж осі z , то оператор збурення $\hat{V}(z, t)$ записується так:

$$\hat{V}(z, t) = e \cdot U \cdot z \cdot \cos(\omega t), \quad (3.109)$$

де e – заряд електрону;
 U – напруженість прикладеного електричного поля.
У цьому випадку матричні елементи оператора збурення

$$V_{mn}(t) = e \cdot U \cdot \cos(\omega t) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_m^{0*}(z) \cdot z \cdot \Psi_n^0(z) dz. \quad (3.110)$$

Оскільки для розглянутого випадку збурення змінюється в часі за гармонічним законом, то можна стверджувати, що після закінчення його дії і проходження часу τ система знову повертається в стаціонарний стан, що є суперпозицією стаціонарних станів незбуреної системи:

$$\Psi(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(t) \Psi_n^0(z) \cdot e^{-\frac{i}{\hbar} E_n^0 t}. \quad (3.111)$$

Для розглянутого випадку власні значення гамільтоніана в рівнянні (3.89) визначаються аналогічно тому, як це було зроблено в п. п. 3.7.1, з урахуванням залежності матричних елементів оператора збурення від часу.

3.9 Завдання для самостійної роботи

1. Одержати аналітичний вираз і графічне зображення функції розподілу ймовірності перебування частинки в прямокутній квантовій GaAs ямі, обмеженій рівновисокими $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ бар'єрами. Залежність властивостей матеріалу бар'єра від молярної частки алюмінію розрахувати, користуючись табл. 3.7. Вихідні дані для розрахунку наведені в табл. 3.8, 3.9.

Таблиця 3.8

Номер варіанта	X	L, А								
		10	13	20	25	30	35	40	45	50
1	0,1	10	13	20	25	30	35	40	45	50
2	0,2	50	55	60	65	70	75	80	85	90
3	0,3	90	95	100	105	110	115	120	125	130
4	0,4	10	15	20	25	30	35	40	45	50
5	0,5	50	55	60	65	70	75	80	85	90
6	0,6	90	95	100	105	110	115	120	125	130
7	0,7	10	15	20	25	30	35	40	45	50
8	0,8	50	55	60	65	70	75	80	85	90
9	0,9	90	95	100	105	110	115	120	125	130
10	1,0	10	15	20	25	30	35	40	45	50

Таблиця 3.9

Номер варіанта	L, А	X								
		0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
1	10	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
2	20	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9
3	30	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
4	40	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9
5	50	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
6	60	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9
7	70	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
8	80	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	1,0
9	90	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
10	100	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	1,0
11	120	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
12	130	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	1,0

Вказівка. Використати рішення, наведені в п. 3.7, та програму, наведену в додатку Б.1.

2. Отримати власні значення енергії і хвильові функції для частинок, що знаходяться в одновимірній потенційній ямі, зображеній на рис. 3.20.

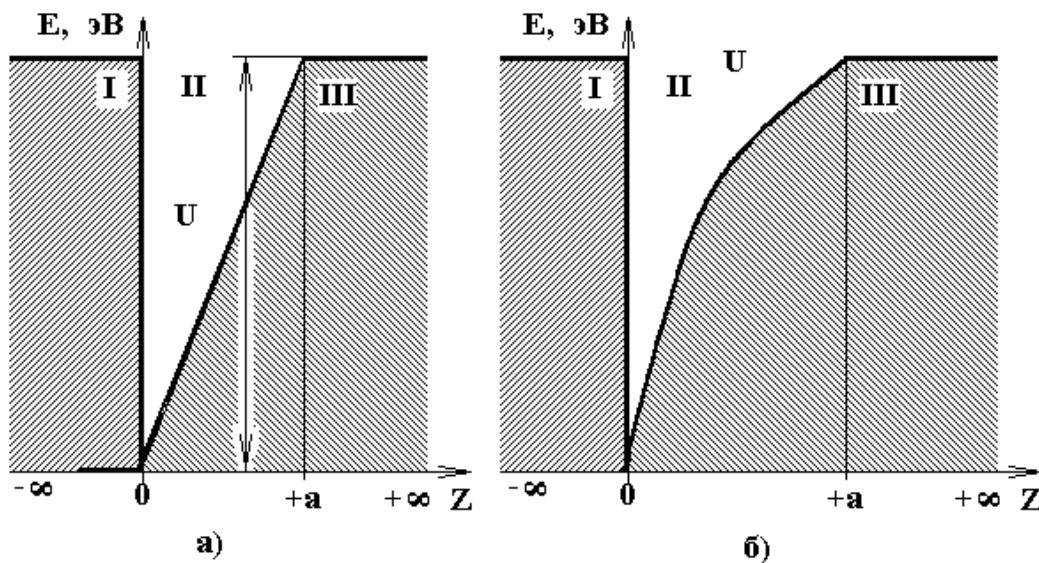


Рисунок 3.20 – Енергетичні схеми потенційних ям

3. Отримати власні значення енергії і хвильові функції частинок, що знаходяться в одновимірній прямокутній потенційній ямі з різновисокими бар'єрами.

4. Отримати власні значення енергії і хвильові функції для частинок, що знаходяться у двовимірній потенційній ямі (квантовій нитці).

Вказівка. Оператор Гамільтона в рівнянні Шредінгера записати в циліндричній системі координат для області квантового обмеження.

Перелік джерел посилань до розділу 3

1. Справочник по лазерной технике / Пер. с нем. М.: Энергоатомиздат, 1991. 544 с.
2. Грибковский В.П. Полупроводниковые лазеры: учеб. пособие по спец. «Радиофизика и электроника». Мн.: Университетское, 1988. 304 с.
3. Байбородин Ю.В. Основы лазерной техники: 2-е изд. перераб. и доп. К.: Выща шк. Головное изд-во, 1988. 383 с.
4. Luttinger J.M., Kohn W. Motion of Electrons and Holes in Perturbed Periodic Fields // *Phys. Rev. Ser. B*. 1955. Vol. 97. N. 4. P. 869 – 883.
5. Панков Ж. Оптические процессы в полупроводниках / Пер. с англ. М.: Мир, 1973. 456 с.
6. Флюгге З. Задачи по квантовой механике / Пер. с англ. М.: Мир, 1974. Т.1. 341 с.
7. Фридрихов С.А., Мовнин С.М. Физические основы электронной техники: учеб. для вузов. М.: Высш. шк. 1982. 608 с.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика (нерелятивистская теория). Изд. 2-е. М.: Физматгиз, 1963. 704 с.
9. Пащенко А.Г., Ванцан В.М. Исследование стационарных энергетических состояний экситонов Ванье-Мотта в полупроводниковых инжекционных лазерах на основе квантоворазмерных структур // *Радиотехника. Всеукр. межвед. науч.-техн. сб.* 1997. Вып. 102. С. 85 – 92.
10. Ferreira R., Rolland P., Roussignol Ph., Delalande C., Vinattieri A., Carraresi L., Colocci M., Roy N., Sermage B., Palmer J.F., Etienne B. Time-resolved exciton transfer in GaAs/Al_xGa_{1-x}As double-quantum-well structures // *Phys. Rev. B*. 1992 V. 45. N. 20. P. 11782 – 11794.
11. Miller D.A.B., Chemla D.S., Damen T.C., Gossard A.C., Wiegmann W., Wood T.H., Burrus C.A. Band-Edge Electroabsorption in Quantum Well Structures: The Quantum-Confined Stark Effect // *Phys. Rev. Letters B*. 1984. V. 53. N. 22. P. 2173 – 2176.
12. Miller D.A.B., Chemla D.S., Damen T.C., Gossard A.C., Wiegmann W., Wood T.H., Burrus C.A. Electric field dependence of optical absorption near the band gap of quantum-well structures // *Phys. Rev. B*. 1985. V. 32. N. 2. P. 1043 – 1060.
13. Mitsuru Matsuura, Tsuneo Kamizato Subbands and excitons in a quantum-well in an electric field // *Phys. Rev.* 1986. V. 33. N. 12. P. 8385 – 8389.
14. Ферми Э. Квантовая механика (конспект лекций) М.: Мир. 1968. 367 с.
15. Бом Д. Квантовая теория: Изд. 2-е. М.: Наука. 1965. 727 с.
16. Пащенко А.Г. Влияние внешнего стационарного электрического поля на энергетические состояния частиц и квазичастиц в квантоворазмерной структуре. Ч. 1. Постановка задачи // *Радиотехника. Всеукр. межвед. науч.-техн. сб.* 2001. Вып. 117. С. 117 – 120.
17. Пащенко А.Г., Ванцан В.М. Влияние внешнего стационарного электрического поля на энергетические состояния частиц и квазичастиц в квантоворазмерной структуре. Ч. 2. Обсуждение результатов // *Радиотехника. Всеукр. межвед. науч.-техн. сб.* 2001. Вып. 118. С. 55 – 60.

ДОДАТОК А

Розрахунок розподілу інтенсивності поля випромінювання по поверхні плоского прямокутного дзеркала (підхід хвильового рівняння)

А.1 Вихідні дані для розрахунку

$\lambda := 0.63 \cdot 10^{-6}$ – довжина хвилі випромінювання, м;
 $a := 2.0 \cdot 10^{-2}$ – повздовжній розмір апертури дзеркала, м;
 $b := 2.0 \cdot 10^{-2}$ – поперечний розмір апертури дзеркала, м;
 $Lr := 1$ – довжина (база) резонатора, м;
 $\beta := 0.824$ – параметр Л.А. Вайнштейна;

А.1.1. Розбиття прямокутних координат дзеркала на розрахункові проміжки

$k := 50$ – кількість розрахункових проміжків;
 $i := 0..k$ – задання меж зміни керуючих індексів (необхідно для графічного подання результатів);
 $j := 0..k$
 $ha := \frac{2 \cdot a}{k}$ $hb := \frac{2 \cdot b}{k}$ – кроки зміни розрахункових проміжків по обох координатах;
 $x_{i,j} := -a + ha \cdot i$ – задання масиву розрахункових точок по горизонталі;
 $y_{i,j} := -b + hb \cdot j$ – задання масиву розрахункових точок по вертикалі;
 $Na := \frac{a^2}{\lambda \cdot Lr}$ $Na = 634.921$ – число Френеля вздовж апертурного розміру дзеркала;
 $Nb := \frac{b^2}{\lambda \cdot Lr}$ $Nb = 634.921$ – число Френеля впоперек апертурного розміру дзеркала;
 $n := 1$ – повздовжній індекс моди TEM nm;
 $m := 1$ – поперечний індекси моди TEM nm;
 $N1 := \text{mod}(m, 2)$ $N2 := \text{mod}(n, 2)$ – перевірка індексів на парність.

А.1.2. Розрахунок повздовжньої і поперечної складової розподілу інтенсивності поля випромінювання по плоскому прямокутному дзеркалу

A.1.3. Розрахунок розподілу інтенсивності поля випромінювання по плоскому прямокутному дзеркалу:

$$S1(x) := \begin{cases} \sin \left[\frac{\pi \cdot (m+1) \cdot x}{2 \cdot a \cdot \left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{8 \cdot \pi \cdot Na}} \right)} \right]^2 & \text{if } N1 = 1 \\ \cos \left[\frac{\pi \cdot (m+1) \cdot x}{2 \cdot b \cdot \left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{8 \cdot \pi \cdot Na}} \right)} \right]^2 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$S2(y) := \begin{cases} \sin \left[\frac{\pi \cdot (n+1) \cdot y}{2 \cdot b \cdot \left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{8 \cdot \pi \cdot Nb}} \right)} \right]^2 & \text{if } N2 = 1 \\ \cos \left[\frac{\pi \cdot (n+1) \cdot y}{2 \cdot b \cdot \left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{8 \cdot \pi \cdot Nb}} \right)} \right]^2 & \text{otherwise} \end{cases} \quad U_{i,j} := S1(x_{i,j}) \cdot S2(y_{i,j})$$

A.1.4 Розрахунок розподілу напруженості електричної складової поля випромінювання по плоскому прямокутному дзеркалу

$$P1(x) := \begin{cases} \sin \left[\frac{\pi \cdot (m+1) \cdot x}{2 \cdot a \cdot \left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{8 \cdot \pi \cdot Na}} \right)} \right] & \text{if } N1 = 1 \\ \cos \left[\frac{\pi \cdot (m+1) \cdot x}{2 \cdot b \cdot \left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{8 \cdot \pi \cdot Na}} \right)} \right] & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$P2(y) := \begin{cases} \sin \left[\frac{\pi \cdot (n+1) \cdot y}{2 \cdot b \cdot \left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{8 \cdot \pi \cdot Nb}} \right)} \right] & \text{if } N2 = 1 \\ \cos \left[\frac{\pi \cdot (n+1) \cdot y}{2 \cdot b \cdot \left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{8 \cdot \pi \cdot Nb}} \right)} \right] & \text{otherwise} \end{cases} \quad P_{i,j} := P1(x_{i,j}) \cdot P2(y_{i,j})$$

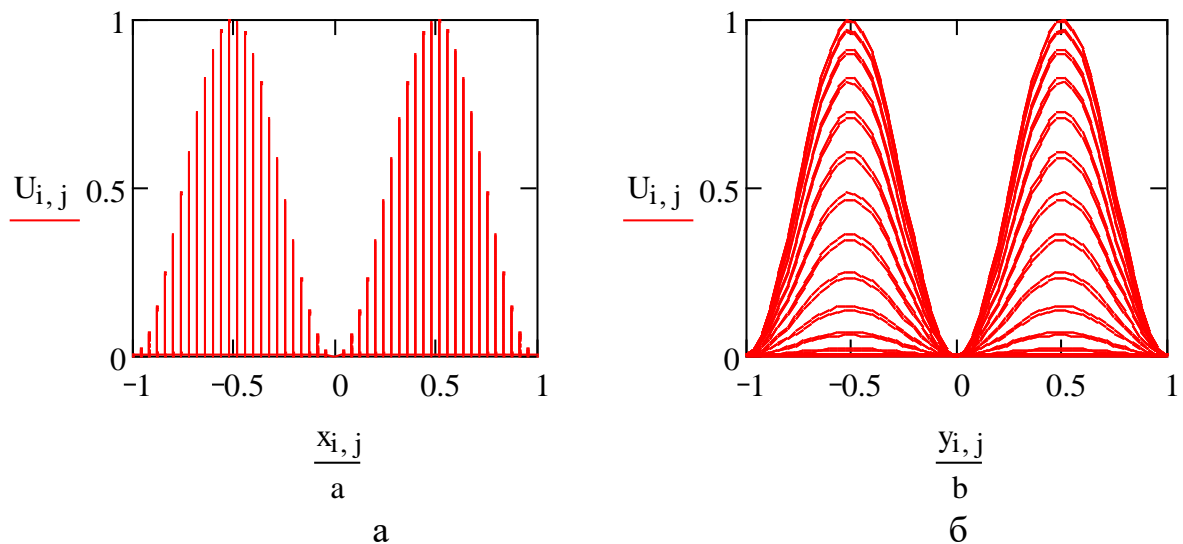


Рисунок А.1 – Розподіл повздовжньої (а) і поперечної (б) складової інтенсивності поля випромінювання по плоскому прямокутному дзеркалу

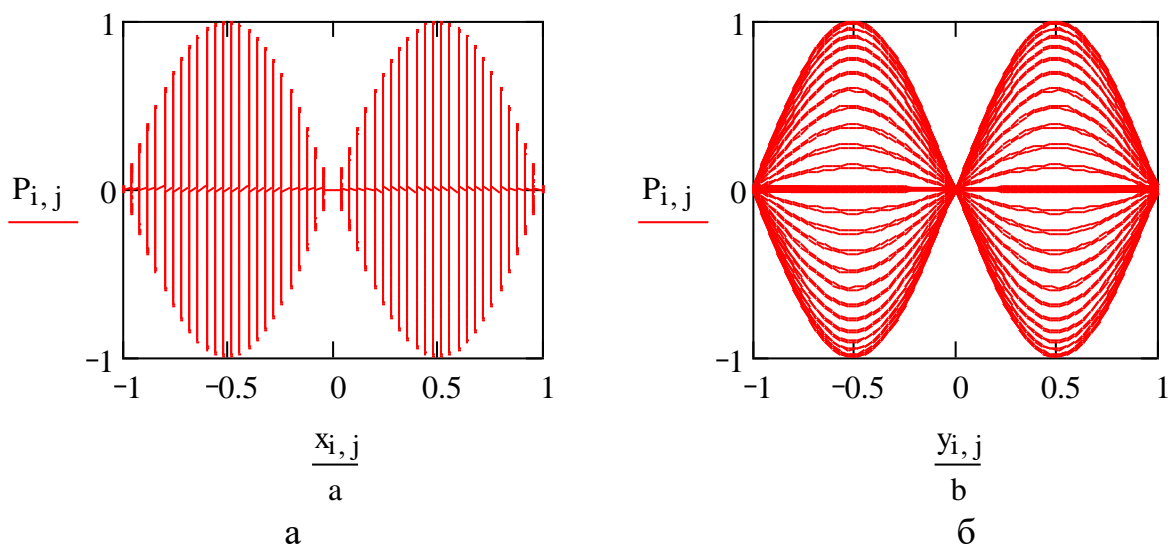
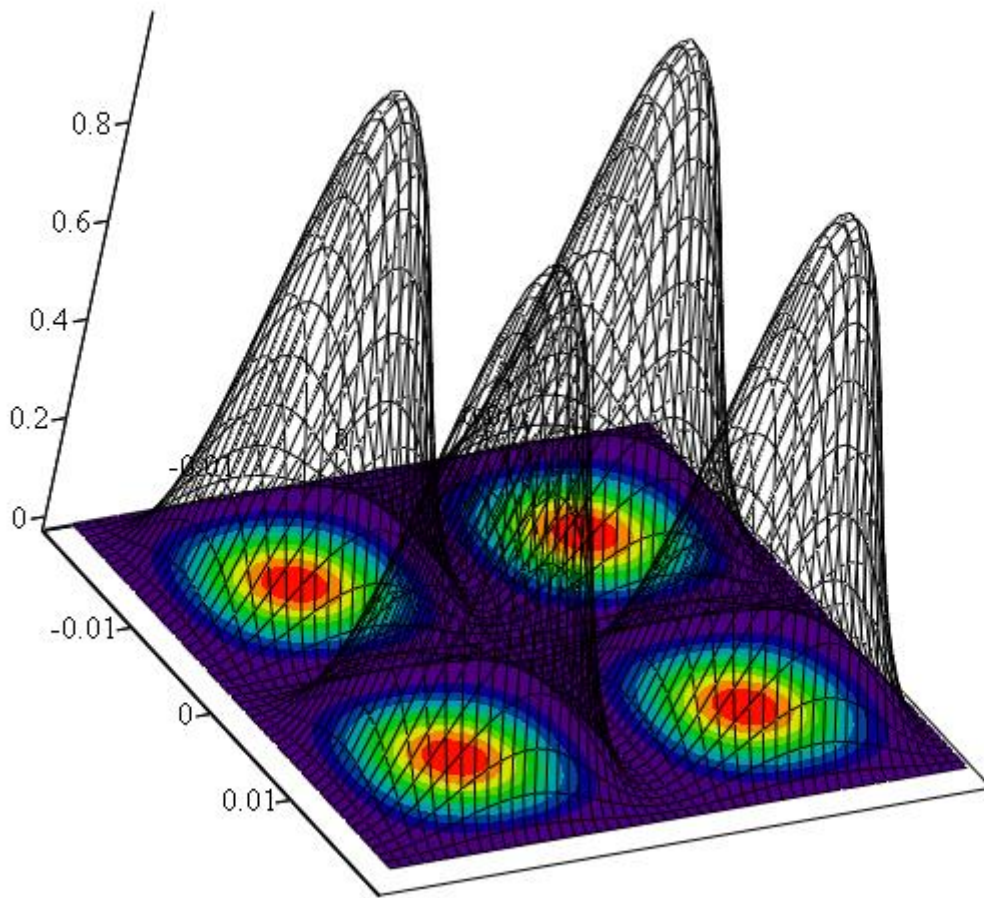


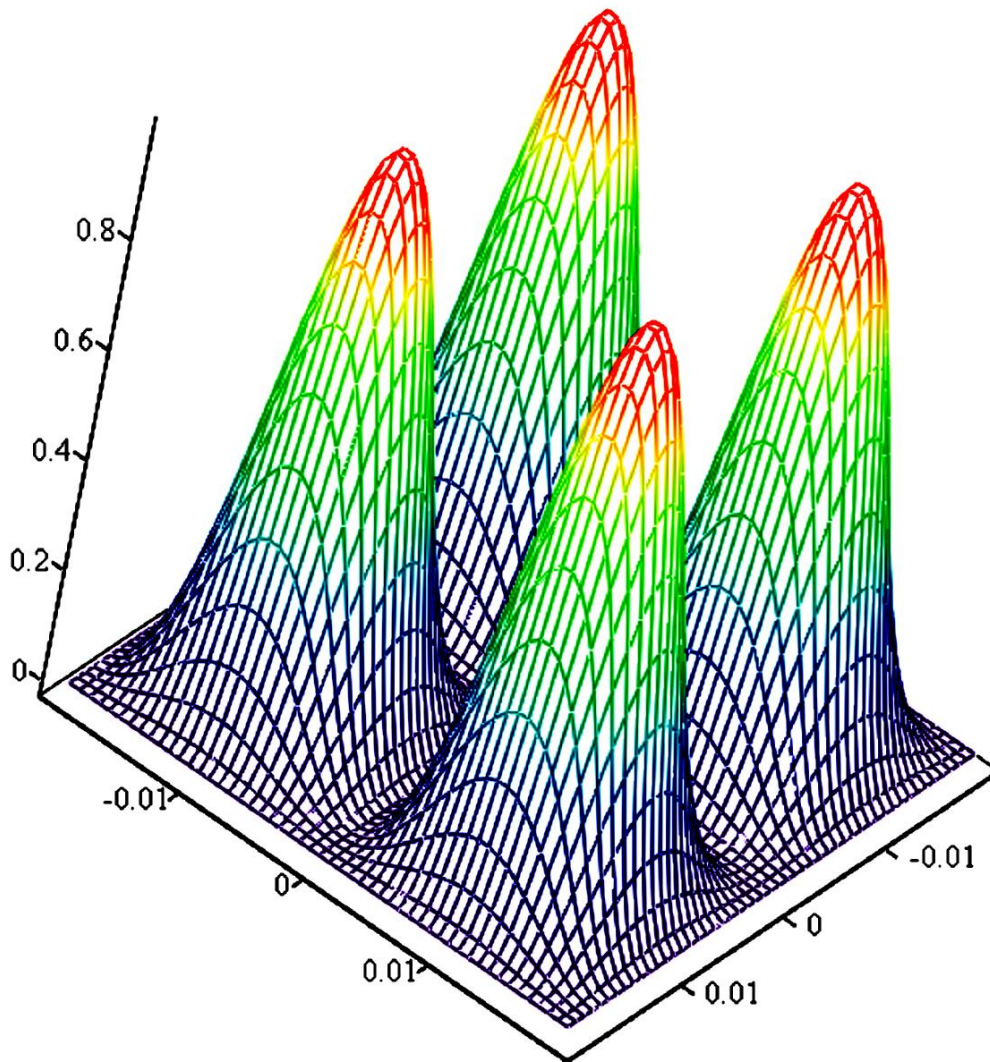
Рисунок А.2 – Розподіл повздовжньої (а) і поперечної (б) складової напруженості електричного поля випромінювання по плоскому прямокутному дзеркалу



$(x, y, U), (x, y, U)$

TEM nm $n = 1$ $m = 1$

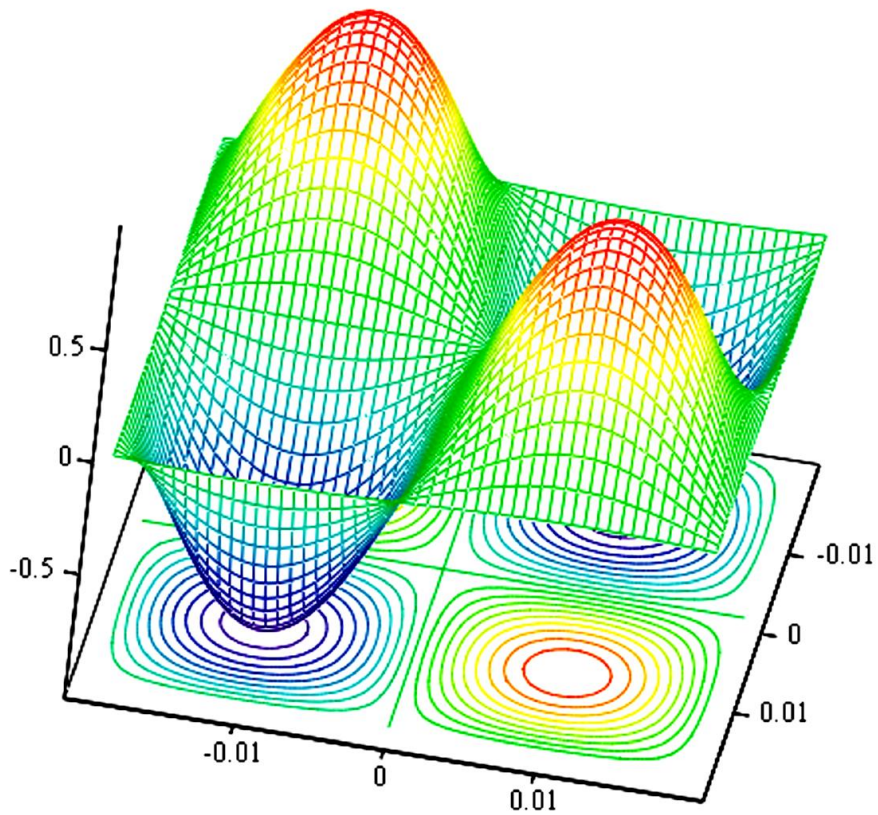
Рисунок А.3 – Розподіл інтенсивності поля випромінювання по плоскому прямокутному дзеркалу (прозора поверхня з видом зверху для освітленості в ближній зоні)



(x, y, U)

TEM nm $n = 1$ $m = 1$

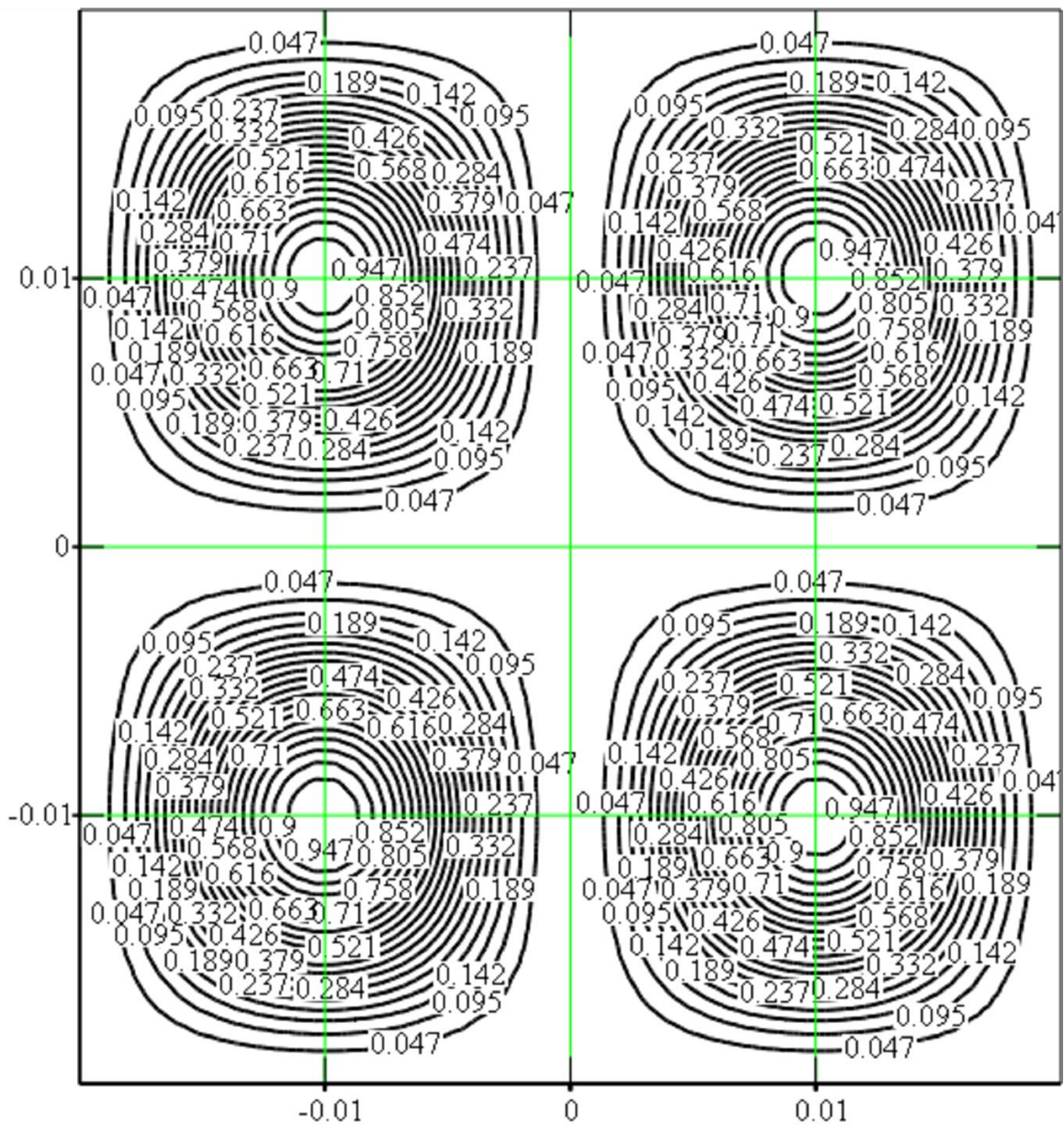
Рисунок А.4 – Розподіл інтенсивності поля випромінювання по плоскому прямокутному дзеркалу (непрозора поверхня)



$(x, y, P), (x, y, P)$

TEM nm n = 1 m = 1

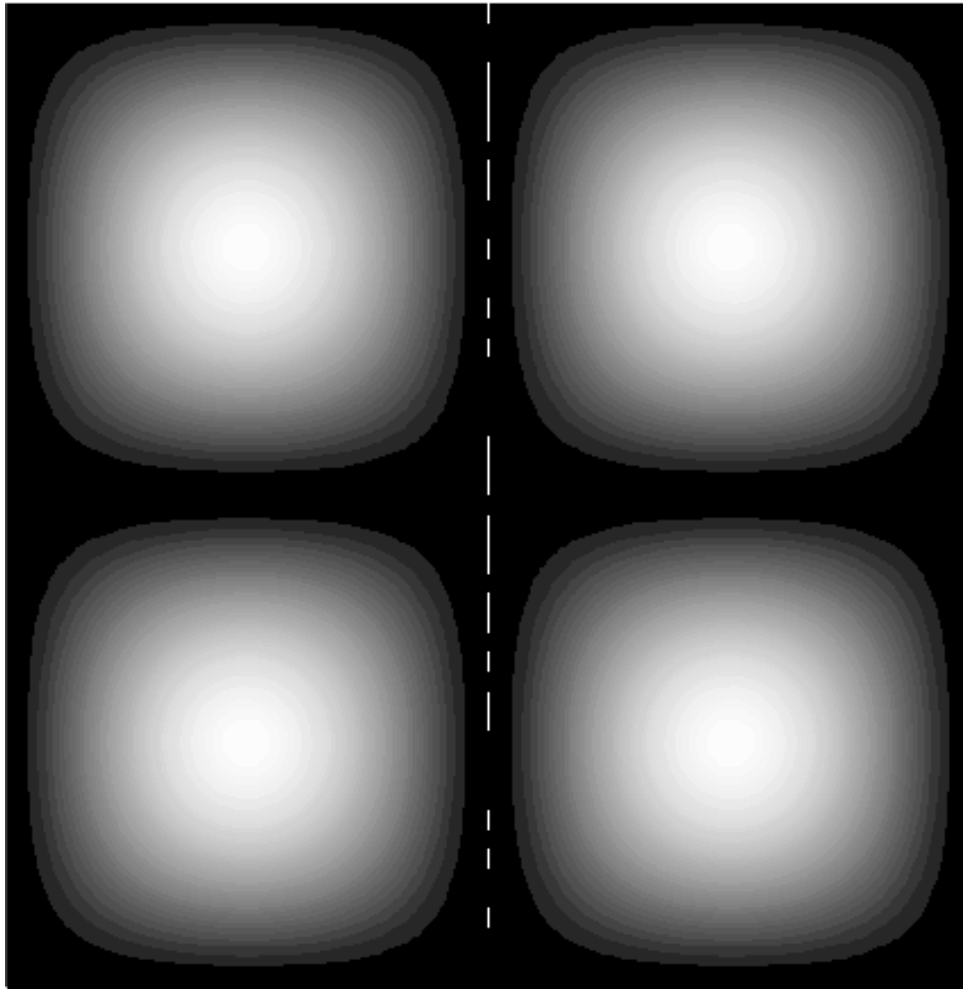
Рисунок А.5 – Розподіл напруженості електричної складової поля випромінювання по плоскому прямокутному дзеркалу (непрозора поверхня)



(x, y, U)

TEM nm n = 1 m = 1

Рисунок А.6 – Розподіл інтенсивності поля випромінювання по плоскому прямокутному дзеркалу (із зазначенням нормованої інтенсивності)



U

TEM_{nm} n = 1 m = 1

Рисунок А.7 – Розподіл інтенсивності поля випромінювання по плоскому прямокутному дзеркалу (як розподіл освітленості в ближній зоні)

А.2 Розрахунок інтенсивності і поля випромінювання на поверхні круглого плоского дзеркала відкритого оптичного резонатора з плоскопаралельними дзеркалами (розрахунок проводиться у межах класичної електромагнітної теорії випромінювання (методом хвильового рівняння))

А 2.1 Вихідні дані для розрахунку:

$\lambda := 0.63 \cdot 10^{-6}$ – довжина хвилі випромінювання, м;

$L1 := 0.5$ – довжина (база) резонатора, м;

$r := 0.01$ – радіус дзеркала резонатора, м;

$\beta := 0.824$ – параметр Л.А. Вайнштейна;

$N_a := \frac{r^2}{L1 \cdot \lambda}$ – число Френеля;

А 2.2 Формування масивів точок циліндричних координат у площині плоского круглого дзеркала

$m := 50$ $n := 100$ – максимальна кількість розрахункових точок у радіальному та аксіальному напрямку по дзеркалу (за бажанням дослідника може бути довільно змінена);

$hr := \frac{r}{m}$ $h\phi := \frac{2 \cdot \pi}{n}$ – кроки зміни радіальної та аксіальної координати вздовж поверхні дзеркала, м;

$i := 0..m$ $j := 0..n$ – індексні змінні (вводяться у розрахунок для формування масивів проміжних і вихідних величин, фізичного змісту у розрахунку не мають);

$rr_i := i \cdot hr$ $\phi\phi_j := j \cdot h\phi$ – масиви точок циліндричних координат у площині круглого плоского дзеркала, у радіальному та аксіальному напрямках, відповідно;

$fr_{i,j} := rr_i \cos(\phi\phi_j)$ – перехід від циліндричних до прямокутних координат для подальшого моделювання (фізичного змісту у розрахунках не має);

$f\phi_{i,j} := rr_i \sin(\phi\phi_j)$

$p := 1$ – радіальний індекс моди TEM_{p1} ;

$l := 1$ – аксіальний індекс моди TEM_{p1} ;

А 2.3 Розрахунок коренів функції Беселя першого роду p -го порядку методом Ньютона (за бажанням дослідника метод розрахунку може бути обраний довільно)

$$f(x) := J_n(p, x)$$

$$fx(x) := \frac{d}{dx} f(x)$$

```

NN(x, f, fx) := | i ← 0
                  | while |f(x)| > 10-5
                  |   | i ← i + 1
                  |   | break if i ≥ 10
                  |   | return "Derivative 0 !" if |fx(x)| < 10-12
                  |   | x ← x -  $\frac{f(x)}{fx(x)}$  otherwise
                  | return "Too much iterations" if i ≥ 10
                  | return x otherwise

```

```

null(f, fx, a, b, n) := | anz ← 0
                        | for i ∈ 0.. n - 1
                        |   | xl ← a +  $\frac{b - a}{n} \cdot i$ 
                        |   | xr ← a +  $\frac{b - a}{n} \cdot (i + 1)$ 
                        |   | continue if f(xl) · f(xr) > 0
                        |   | x ←  $\frac{x_l + x_r}{2}$ 
                        |   | xnsanz ← NN(x, f, fx)
                        |   | anz ← anz + 1
                        | xns

```

→
 $\mathbf{K} := \text{null}(f, fx, 0, 100, 70)$ – векторизація (продукування масиву) коренів функції Беселя.

Масиви коренів функції Беселя першого роду p -го порядку:

	0		0
0	-7.294·10 ⁻¹²	0	-7.294·10 ⁻¹²
1	3.832	1	3.832
2	7.016	2	7.016
3	10.173	3	10.173
4	13.324	4	13.324
5	16.471	5	16.471
6	19.616	6	19.616
7	22.76	7	22.76
8	25.904	8	25.904
9	29.047	9	29.047
10	32.19	10	32.19
11	35.332	11	35.332
12	38.475	12	38.475
13	41.617	13	41.617
14	44.759	14	44.759
15	47.901	15	47.901

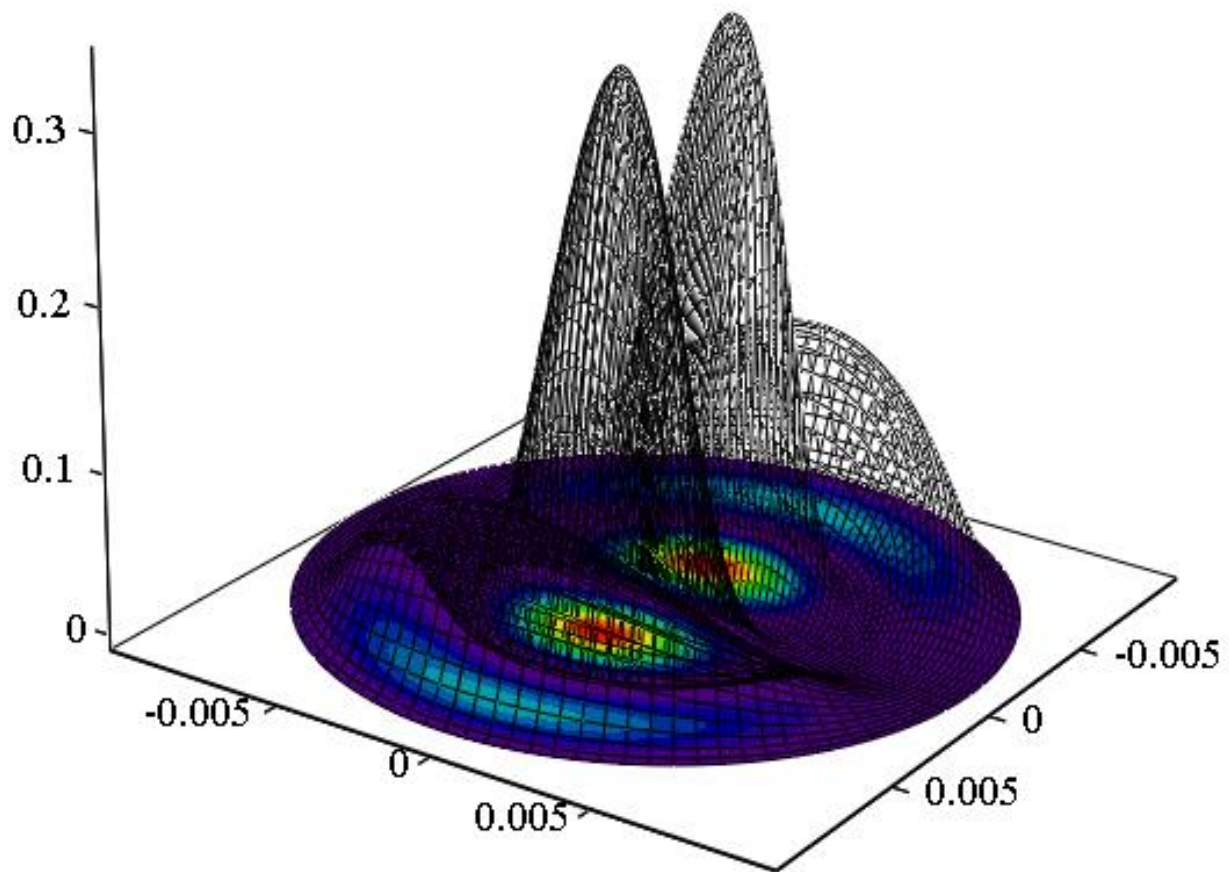
$V_p := K_{l+1}$ – вибір $l+1$ - го кореня функції Беселя для подальших розрахунків;

Розрахунок розподілу інтенсивності випромінювання по поверхні круглого дзеркала:

$$M_{i,j} := J_n \left[p, \frac{V_p \cdot r r_i}{r \cdot \left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{8 \cdot \pi \cdot Na}} \right)} \right]^2 \cdot \cos(1 \cdot \phi \phi_j)^2.$$

Розрахунок розподілу електричної складової поля випромінювання по поверхні круглого дзеркала:

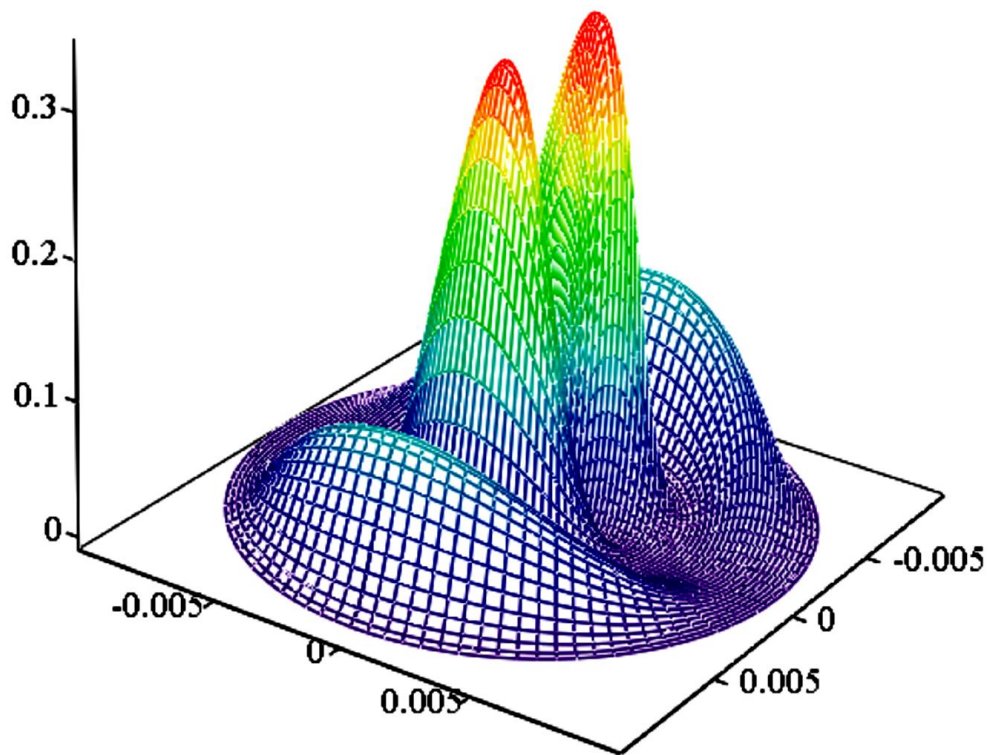
$$E_{i,j} := J_n \left[p, \frac{V_p \cdot r r_i}{r \cdot \left(1 + \frac{\beta}{\sqrt{8 \cdot \pi \cdot Na}} \right)} \right] \cdot \cos(1 \cdot \phi \phi_j).$$



$(f_r, f_\phi, M), (f_r, f_\phi, M)$

TEM_{p1} p = 1 l = 1

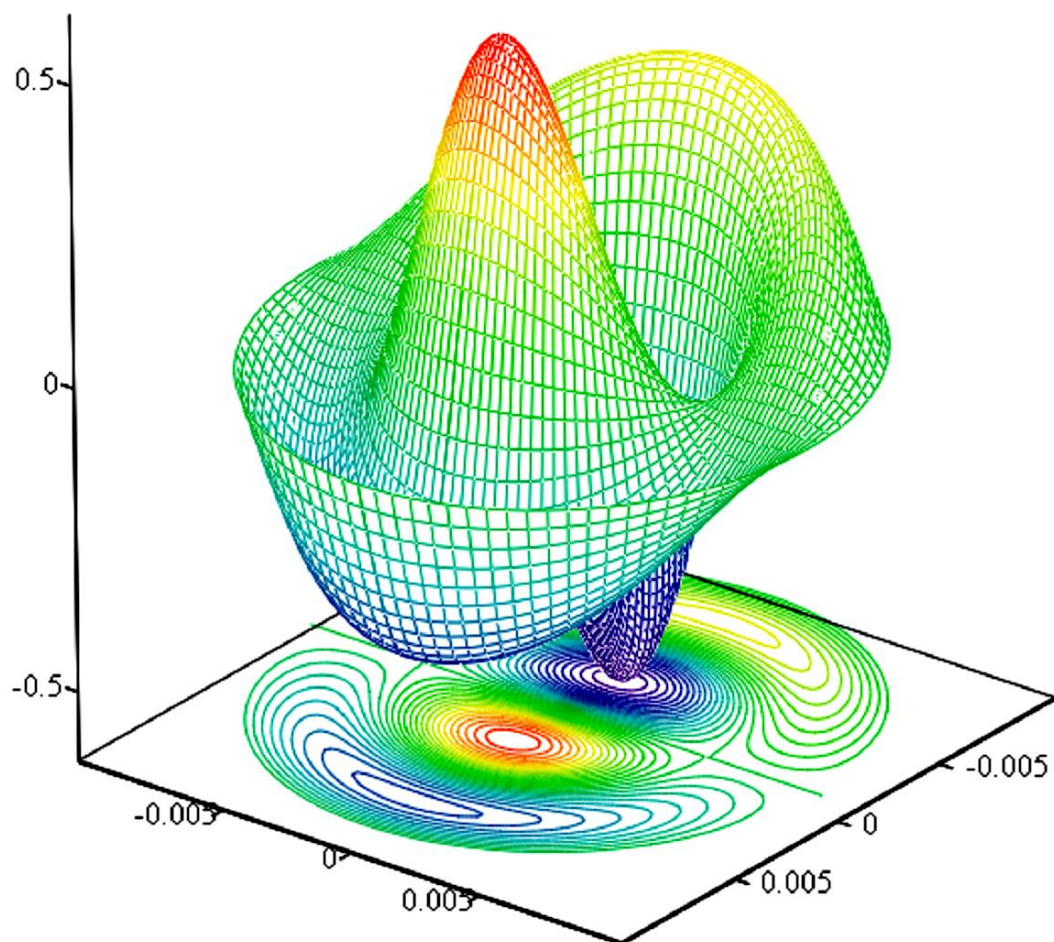
Рисунок А.10 – Розподіл інтенсивності поля випромінювання моди TEM_{p1} по плоскому круглому дзеркалу (прозора поверхня з видм зверху для освітленості в ближній зоні)



(f_r, f_ϕ, M)

TEM_{p1} p = 1 l = 1

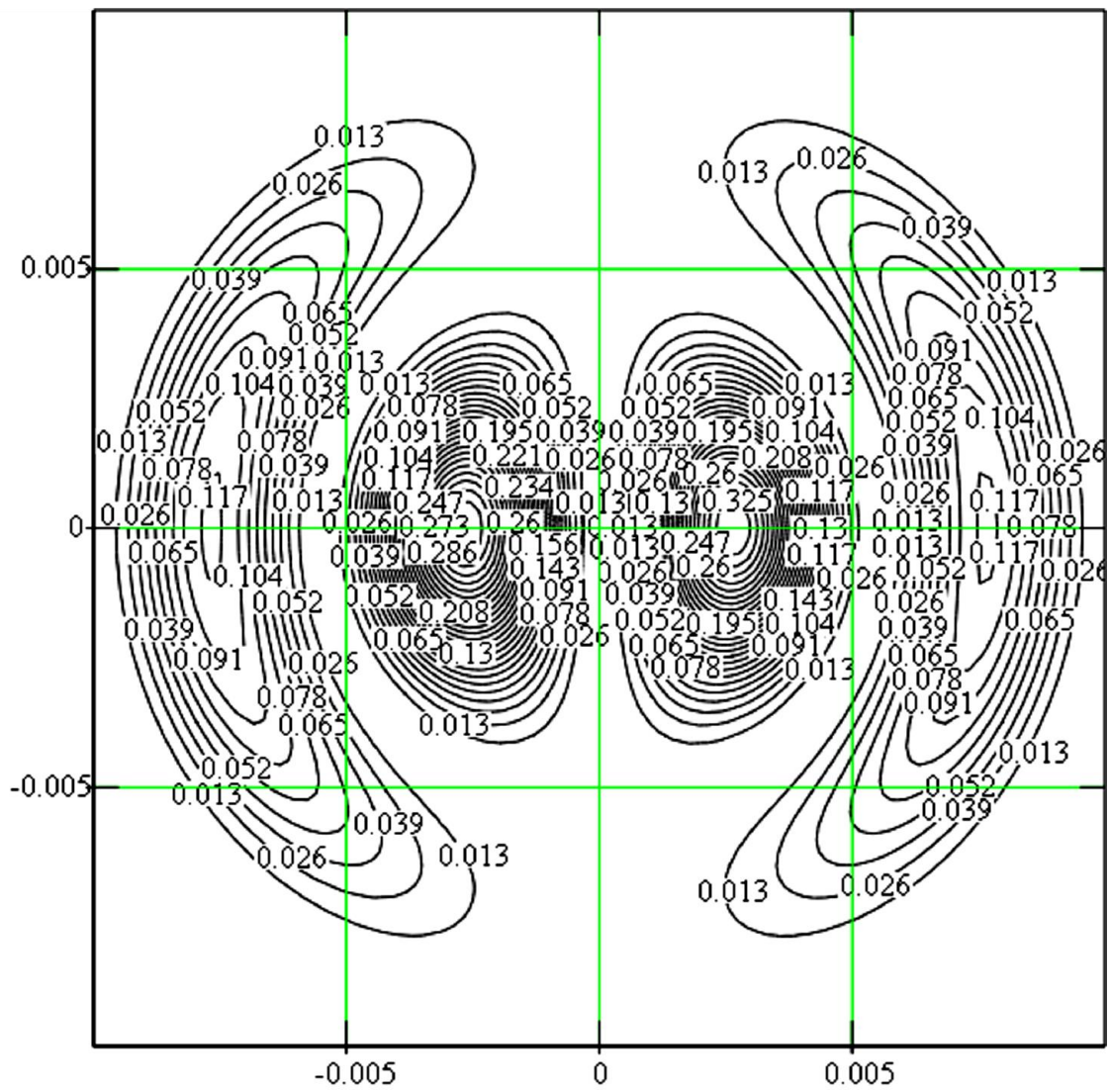
Рисунок А.11 – Розподіл інтенсивності поля випромінювання моди TEM_{p1} по плоскому круглому дзеркалу (непрозора поверхня)

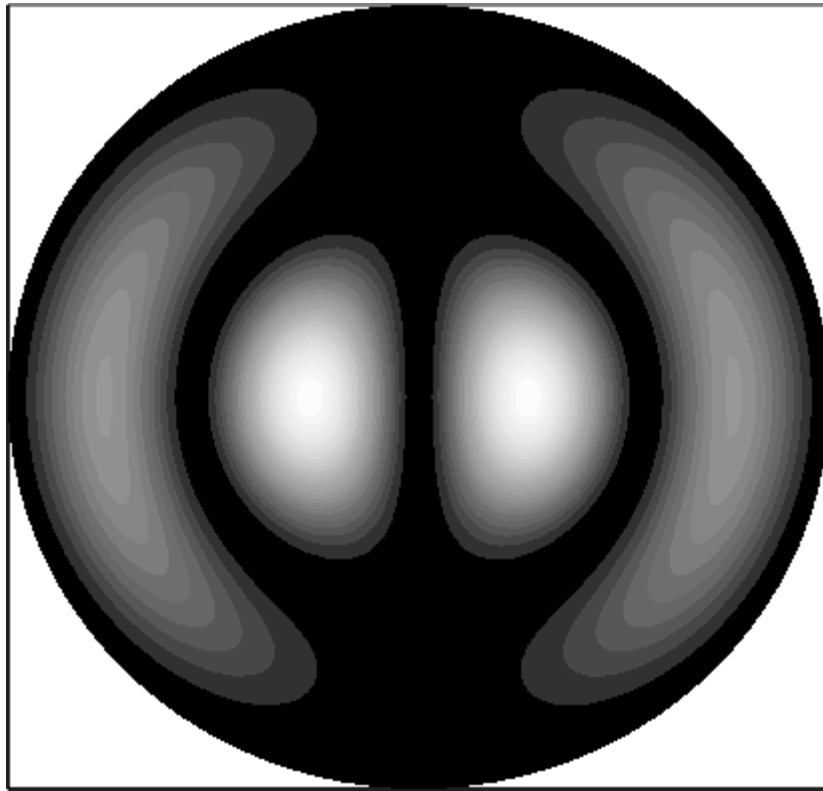


$$(f_r, f_\phi, E), (f_r, f_\phi, E)$$

TEM_{pl} p = 1 l = 1

Рисунок А.12 – Розподіл напруженості електричної складової поля випромінювання по плоскому круглому дзеркалу для моди TEM_{pl} (непрозора поверхня)





(f_r, f_ϕ, M)

TEM_{pl} $p = 1$ $l = 1$

Рисунок А.14 – Розподіл інтенсивності поля випромінювання по плоскому круглому дзеркалу (як розподіл освітленості в ближній зоні)

A3 Розрахунок розподілу інтенсивності поля випромінювання по поверхні сферичного прямокутного дзеркала резонатора за умови $R1 \neq R2 \neq L$ (підхід хвильового рівняння)

A.3.1 Вихідні дані для розрахунку

$\lambda := 0.63 \cdot 10^{-6}$ – довжина хвилі випромінювання, м;

$L1 := 1$ – довжина (база) резонатора, м;

$R1 := 2$ – радіус кривизни першого дзеркала резонатора, м;

$R2 := 5$ – радіус кривизни другого дзеркала резонатора, м;

$a1 := 2.0 \cdot 10^{-2}$, $b1 := 2.0 \cdot 10^{-2}$ – поперечні розміри апертури дзеркала, м;

$a := 0.16 \cdot 10^{-2}$, $b := 0.16 \cdot 10^{-2}$ – поперечні розміри апертури на дзеркалі, м;

$Na1 := \frac{R1^2}{L1 \cdot \lambda}$, $Na1 = 6.349 \times 10^6$, $Na2 := \frac{R2^2}{L1 \cdot \lambda}$, $Na2 = 3.968 \times 10^7$ – число Френеля;

Френеля;

$m := 3$ – повздовжній індекс моди TEM mn;

$n := 3$ – поперечний індекс моди TEM mn;

$UN := 2$ – вибір типу резонатора, $UN = 1$ – неконфокальний, $UN = 2$ – конфокальний, $UN = 3$ – напівконфокальний;

A.3.2 Розрахунок геометричних параметрів розподілу інтенсивності поля на дзеркалах

A.3.3 Розбиття прямокутних координат дзеркала на розрахункові проміжки

$EN := 80$ – кількість розрахункових точок;

$i := 0..EN$, $j := 0..EN$ – задання меж зміни керуючих індексів (необхідно для графічного подання результатів);

$ha := \frac{2 \cdot a}{EN}$, $hb := \frac{2 \cdot b}{EN}$ – кроки зміни розрахункових проміжків по обох

координатах;

$x_{i,j} := -a + ha \cdot i$ – задання масиву розрахункових точок по горизонталі;

$y_{i,j} := -b + hb \cdot j$ – задання масиву розрахункових точок по вертикалі;

A.3.4 Розрахунок радіуса пучка в перетяжці

$$wo1(R1, R2, L1, \lambda) := \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \cdot \sqrt[4]{\frac{L1 \cdot (R1 - L1) \cdot (R2 - L1) \cdot (R1 + R2 - L1)}{(R1 + R2 - 2 \cdot L1)^2}},$$

$$wo2(L1, \lambda) := \sqrt{\frac{L1 \cdot \lambda}{2 \cdot \pi}},$$

$$wo3(R1, L1, \lambda) := \sqrt{\frac{L1 \cdot \lambda}{\pi}} \cdot \sqrt[4]{\frac{R1 - L1}{L1}},$$

$$WN0(UN) := \begin{cases} wo1(R1, R2, L1, \lambda) & \text{if } UN = 1 \\ wo2(L1, \lambda) & \text{if } UN = 2 \\ wo3(R1, L1, \lambda) & \text{if } UN = 3 \end{cases}$$

A.3.5 Розрахунок радіуса пучка на першому дзеркалі

$$wdz11(R1, R2, L1, \lambda) := \sqrt{\frac{R1 \cdot \lambda}{\pi}} \cdot \sqrt[4]{\frac{(R2 - L1) \cdot L1}{(R1 - L1) \cdot (R1 + R2 - L1)}},$$

$$wdz12(L1, \lambda) := \sqrt{\frac{L1 \cdot \lambda}{\pi}},$$

$$wdz13(R1, L1, \lambda) := \sqrt{\frac{L1 \cdot \lambda}{\pi}} \cdot \sqrt[4]{\frac{R1 - L1}{L1}},$$

$$WM1(UN) := \begin{cases} wdz11(R1, R2, L1, \lambda) & \text{if } UN = 1 \\ wdz12(L1, \lambda) & \text{if } UN = 2 \\ wdz13(R1, L1, \lambda) & \text{if } UN = 3 \end{cases}$$

A.3.6. Розрахунок радіуса пучка на другому дзеркалі

$$wdz21(R1, R2, L1, \lambda) := \sqrt{\frac{R2 \cdot \lambda}{\pi}} \cdot \sqrt[4]{\frac{(R1 - L1) \cdot L1}{(R2 - L1) \cdot (R1 + R2 - L1)}},$$

$$wdz22(L1, \lambda) := \sqrt{\frac{L1 \cdot \lambda}{\pi}},$$

$$wdz23(R1, L1, \lambda) := \sqrt{\frac{R1 \cdot \lambda}{\pi}} \cdot \sqrt[4]{\frac{L1}{R1 - L1}},$$

$$WM2(UN) := \begin{cases} wdz21(R1, R2, L1, \lambda) & \text{if } UN = 1 \\ wdz22(L1, \lambda) & \text{if } UN = 2 \\ wdz23(R1, L1, \lambda) & \text{if } UN = 3 \end{cases}$$

А.3.7 Переприсвоєння величин перетяжки та радіусів плям для подальших розрахунків новим змінним

$w0 := WN0(UN)$, $w0 = 3.167 \times 10^{-4}$ – радіус пучка в перетяжці, м;

$wz1 := WM1(UN)$, $wz1 = 4.478 \times 10^{-4}$ – радіус плями на першому дзеркалі, м;

$wz2 := WM2(UN)$, $wz2 = 4.478 \times 10^{-4}$ – радіус плями на другому дзеркалі, м;

А.3.8 Розрахунок розподілу інтенсивності поля випромінювання по сферичному прямокутному дзеркалу неконфокального резонатора за умови $R1 \neq R2 \neq L$

$$EF1(ex, ey, wez) := \text{Her}\left[m, \left(\sqrt{2} \cdot \frac{ex}{wez}\right)\right]^2 \cdot \text{Her}\left[n, \left(\sqrt{2} \cdot \frac{ey}{wez}\right)\right]^2 \cdot \exp\left(-2 \cdot \frac{ex^2 + ey^2}{wez^2}\right)$$

$U1_{i,j} := EF1(x_{i,j}, y_{i,j}, wz1)$ – інтенсивності поля на першому дзеркалі;

$U2_{i,j} := EF1(x_{i,j}, y_{i,j}, wz2)$ – інтенсивності поля на другому дзеркалі;

А.3.9. Розрахунок розподілу електричної складової напруженості поля випромінювання по сферичному прямокутному дзеркалу неконфокального резонатора за умови $R1 \neq R2 \neq L$

$$EF2(ex, ey, wez) := \text{Her}\left[m, \left(\sqrt{2} \cdot \frac{ex}{wez}\right)\right] \cdot \text{Her}\left[n, \left(\sqrt{2} \cdot \frac{ey}{wez}\right)\right] \cdot \exp\left(-\frac{ex^2 + ey^2}{wez^2}\right)$$

$P1_{i,j} := EF2(x_{i,j}, y_{i,j}, wz1)$ – напруженість електричної складової поля на першому дзеркалі;

$P2_{i,j} := EF2(x_{i,j}, y_{i,j}, wz2)$ – напруженість електричної складової поля на другому дзеркалі.

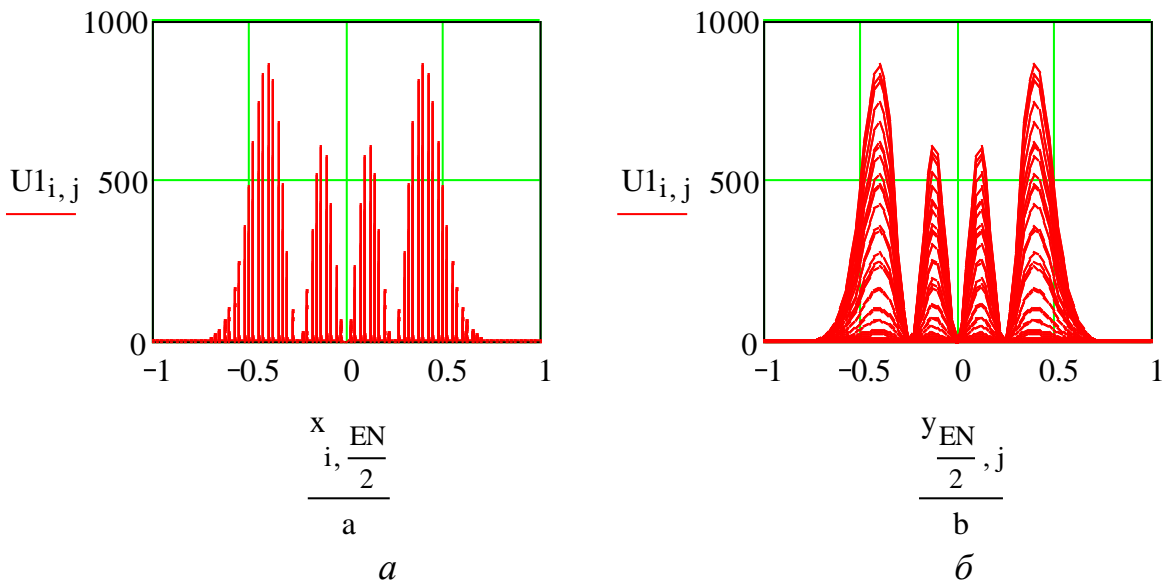


Рисунок А.15 – Розподіл повздовжньої (а) і поперечної (б) складової інтенсивності поля випромінювання по сферичному дзеркалу прямокутної апертури

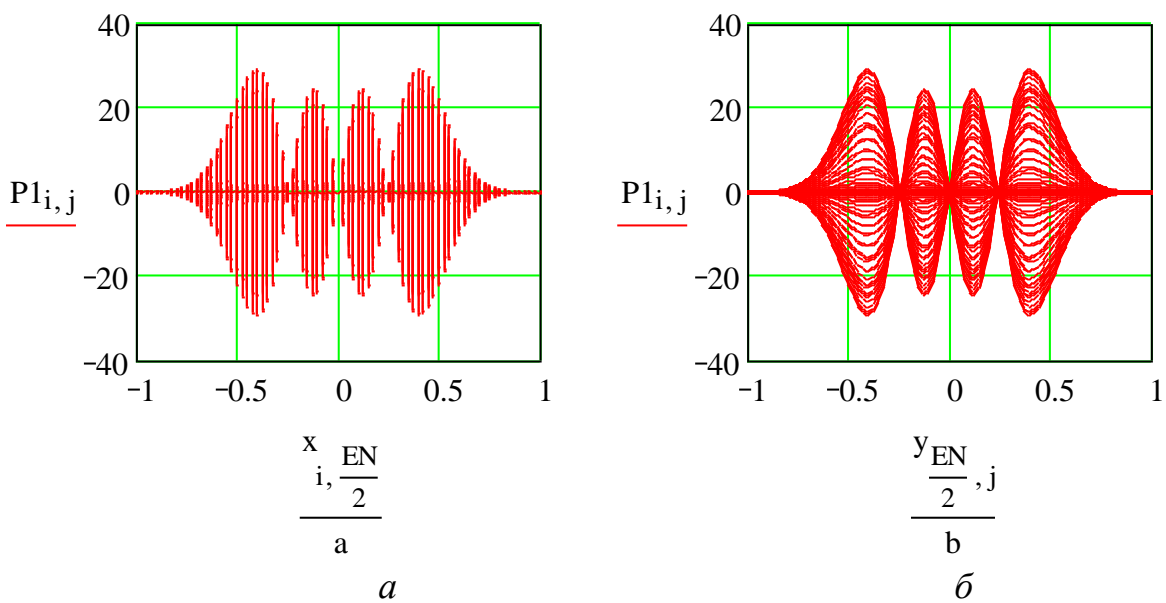
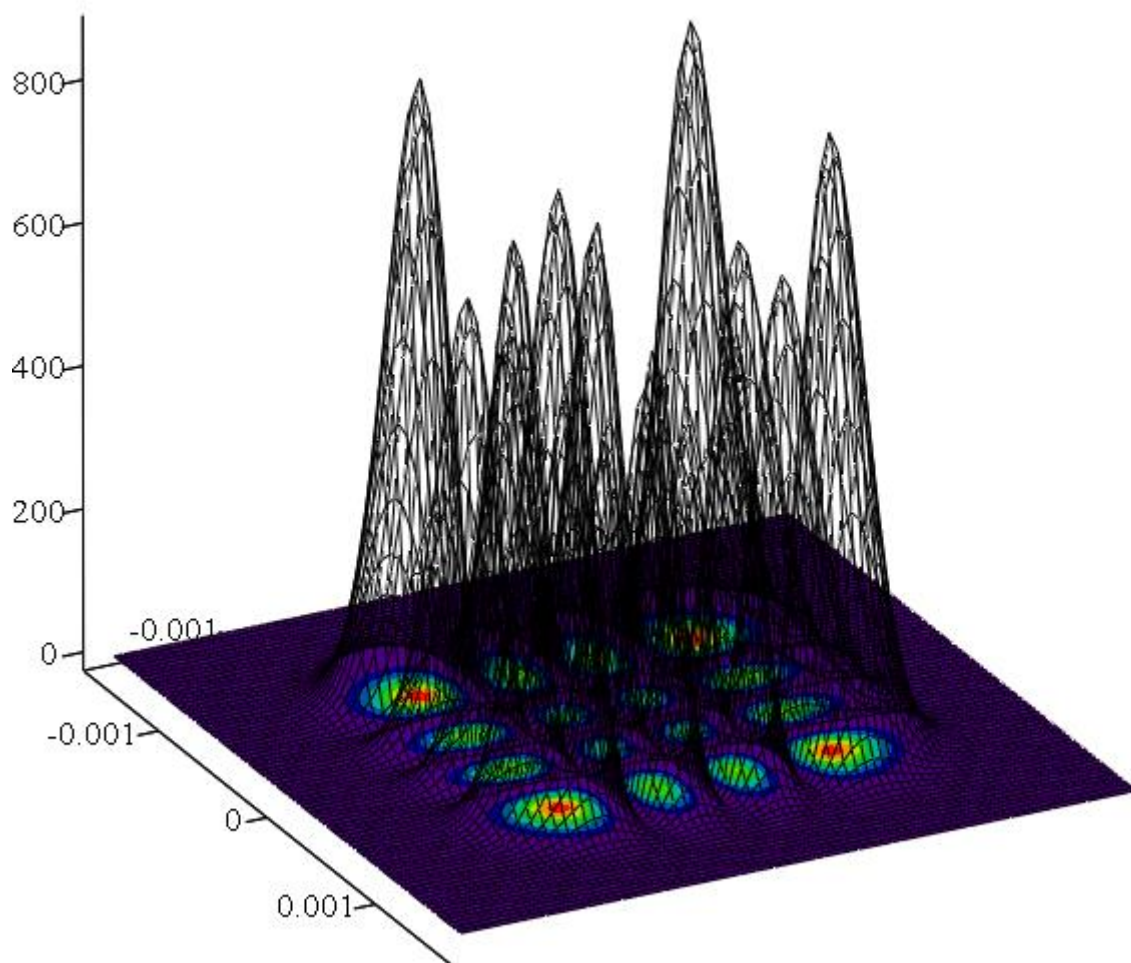


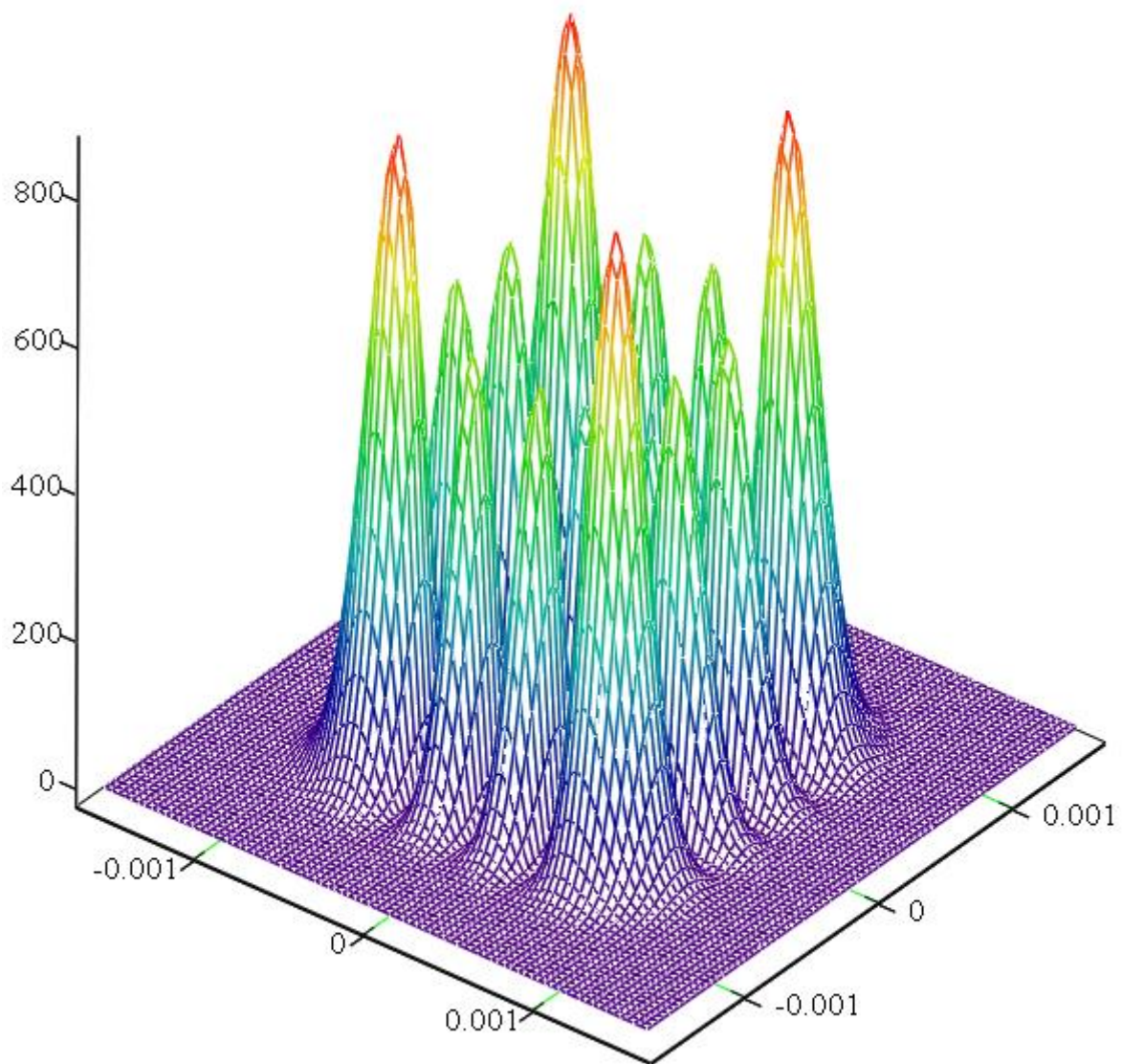
Рисунок А. 16 – Розподіл повздовжньої (а) і поперечної (б) електричної складової напруженості поля випромінювання по сферичному дзеркалу прямокутної апертури



$(x, y, U_1), (x, y, U_1)$

TEM_{nm} n = 3 m = 3

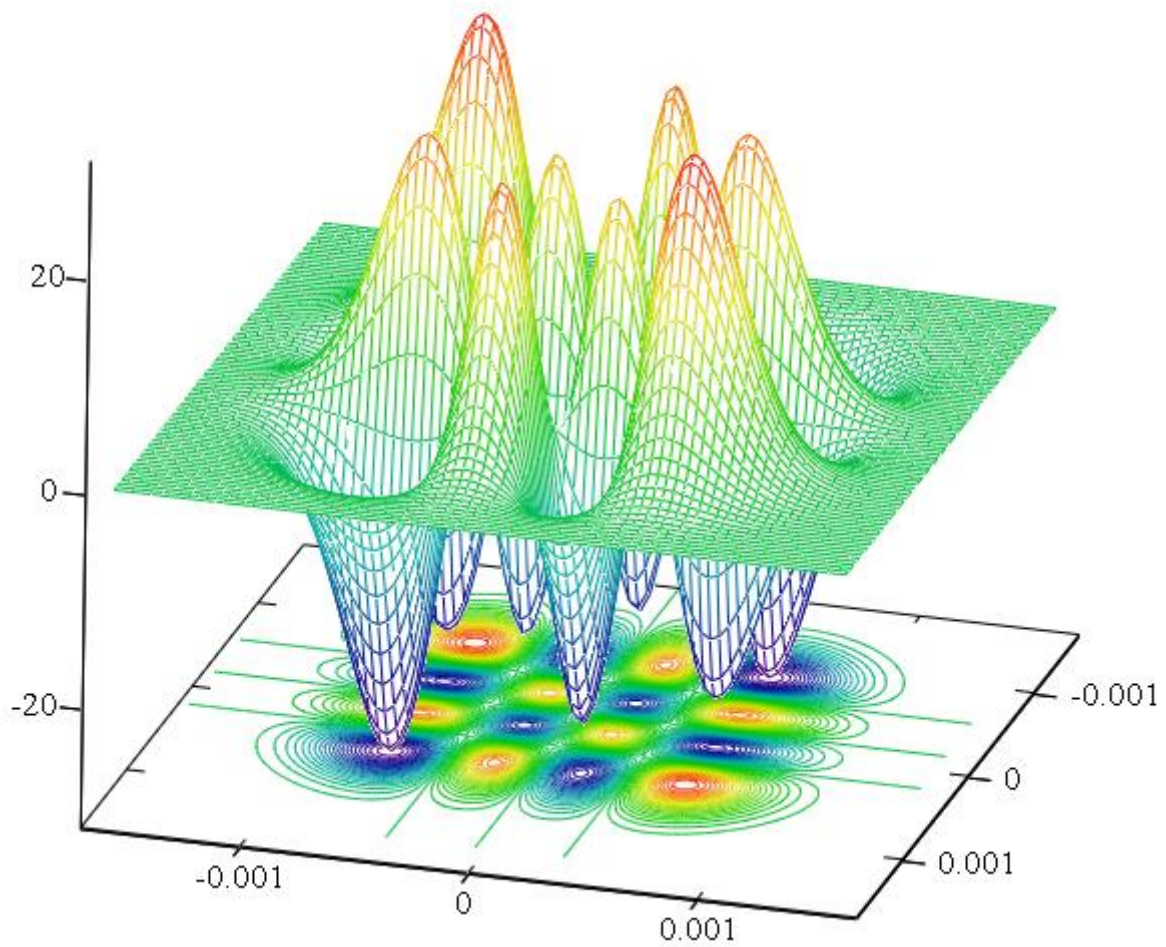
Рисунок А.17 – Розподіл інтенсивності поля випромінювання по сферичному дзеркалу прямокутної апертури для моди TEM_{nm} (прозора поверхня з видом зверху для освітленості в ближній зоні)



(x, y, U)

TEM_{nm} $n = 3$ $m = 3$

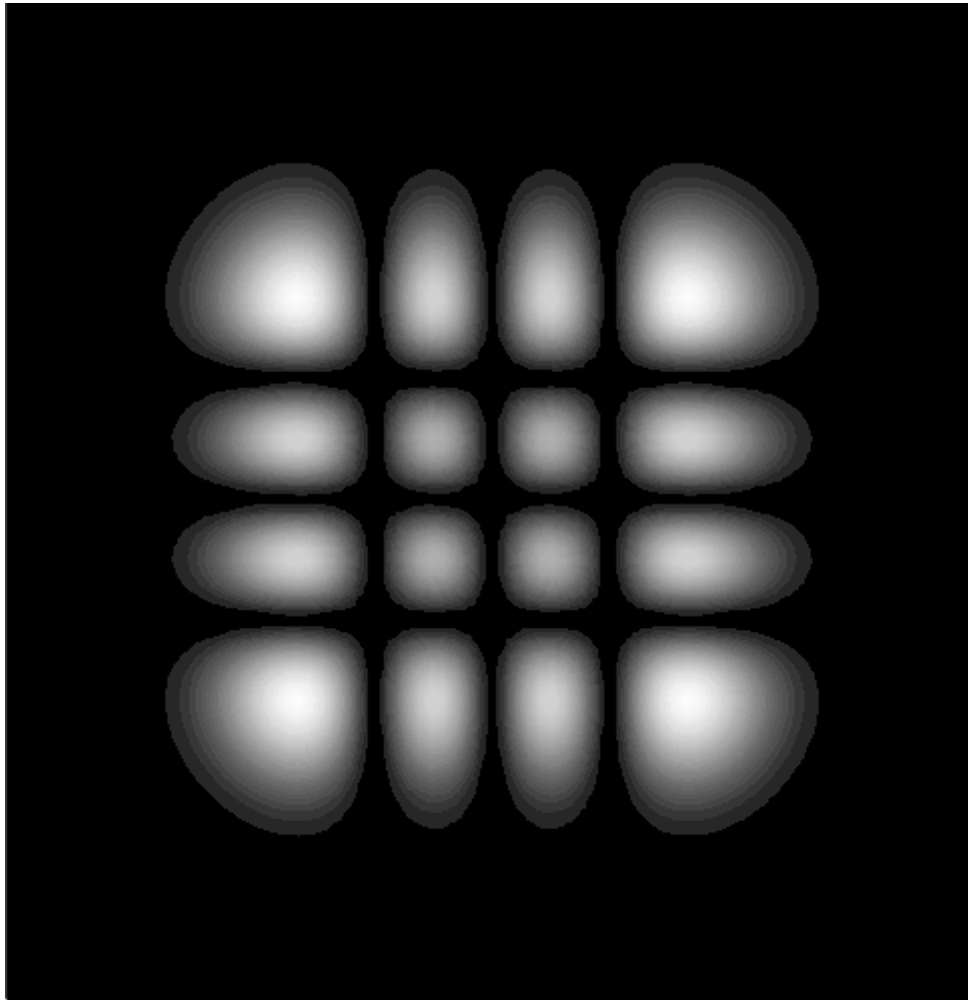
Рисунок А.18 – Розподіл інтенсивності поля випромінювання по сферичному дзеркалу прямокутної апертури TEM_{nm} (непрозора поверхня)



$(x, y, P1), (x, y, P1)$

TEM nm n = 3 m = 3

Рисунок А.19 – Розподіл напруженості електричної складової поля випромінювання по сферичному дзеркалу прямокутної апертури (непрозора поверхня) з видом зверху на картину поля у ближній зоні



(x, y, U_1)

TEM nm $n = 3$ $m = 3$

Рисунок А.21 – Розподіл інтенсивності поля випромінювання по сферичному дзеркалу прямокутної апертури для моди TEM nm (як розподіл освітленості в ближній зоні) у вигляді різниці яскравості освітленості

А.4 Розрахунок розподілу інтенсивності поля випромінювання по поверхні сферичного круглого дзеркала резонатора за умови $R1 \neq R2 \neq L$ (підхід хвильового рівняння)

А.4.1. Вихідні дані для розрахунку (відповідно до обраного типу резонатора деякі дані можуть бути зайвими, а деякі мають бути скориговані)

$\lambda := 0.63 \cdot 10^{-6}$ – довжина хвилі випромінювання, м;

$L1 := 10$ – довжина (база) резонатора, м;

$R1 := 10$ – радіус кривизни першого дзеркала резонатора, м;

$R2 := 10$ – радіус кривизни другого дзеркала резонатора, м;

$r1 := 0.005$ – радіус дзеркала резонатора, м;

$r := 0.0045$ – радіус умовної апертури на дзеркалі резонатора, м;

$Na1 := \frac{R1^2}{L1 \cdot \lambda}$ $Na1 = 1.587 \times 10^7$ $Na2 := \frac{R2^2}{L1 \cdot \lambda}$ $Na2 = 1.587 \times 10^7$ – число

Френеля; $p := 1, l := 1$ – радіальний та аксіальний індекси моди TEM_{pl} ;

$UN := 2$ – вибір типу резонатора: $UN = 1$ – неконфокальний, $UN = 2$ – конфокальний, $UN = 3$ – напівконфокальний.

А.4.2 Розрахунок геометричних параметрів розподілу інтенсивності поля на дзеркалах

А.4.2.1 Розбиття прямокутних координат дзеркала на розрахункові проміжки

$m := 60, n := 120$ – максимальна кількість розрахункових точок у радіальному та аксіальному напрямку по дзеркалу;

$hr := \frac{r}{m}, h\phi := \frac{2 \cdot \pi}{n}$ – кроки зміни радіальної та аксіальної координати вздовж

поверхні дзеркала, м;

$i := 0..m, j := 0..n$ – індексні змінювані (вводяться у розрахунок для формування масивів проміжних і вихідних величин, фізичного змісту у розрахунку не мають);

$rr_i := i \cdot hr, \phi\phi_j := j \cdot h\phi$ – масиви точок циліндричних координат у площині круглого плоского дзеркала, у радіальному та аксіальному напрямках відповідно;

$fr_{i,j} := rr_i \cos(\phi\phi_j)$ – перехід від циліндричних до прямокутних координат для подальшого моделювання (фізичного змісту у розрахунках не має);

$f\phi_{i,j} := rr_i \sin(\phi\phi_j)$

A.4.2.2 Розрахунок радіуса пучка в перетяжці

$$wo1(R1, R2, L1, \lambda) := \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \cdot \sqrt[4]{\frac{L1 \cdot (R1 - L1) \cdot (R2 - L1) \cdot (R1 + R2 - L1)}{(R1 + R2 - 2 \cdot L1)^2}},$$

$$wo2(L1, \lambda) := \sqrt{\frac{L1 \cdot \lambda}{2 \cdot \pi}},$$

$$wo3(R1, L1, \lambda) := \sqrt{\frac{L1 \cdot \lambda}{\pi}} \cdot \sqrt[4]{\frac{R1 - L1}{L1}},$$

$$WN0(UN) := \begin{cases} wo1(R1, R2, L1, \lambda) & \text{if } UN = 1 \\ wo2(L1, \lambda) & \text{if } UN = 2 \\ wo3(R1, L1, \lambda) & \text{if } UN = 3 \end{cases}$$

A.4.2.3 Розрахунок радіуса пучка на першому дзеркалі

$$wdz11(R1, R2, L1, \lambda) := \sqrt{\frac{R1 \cdot \lambda}{\pi}} \cdot \sqrt[4]{\frac{(R2 - L1) \cdot L1}{(R1 - L1) \cdot (R1 + R2 - L1)}},$$

$$wdz12(L1, \lambda) := \sqrt{\frac{L1 \cdot \lambda}{\pi}},$$

$$wdz13(R1, L1, \lambda) := \sqrt{\frac{L1 \cdot \lambda}{\pi}} \cdot \sqrt[4]{\frac{R1 - L1}{L1}},$$

$$WM1(UN) := \begin{cases} wdz11(R1, R2, L1, \lambda) & \text{if } UN = 1 \\ wdz12(L1, \lambda) & \text{if } UN = 2 \\ wdz13(R1, L1, \lambda) & \text{if } UN = 3 \end{cases}$$

A.4.2.4 Розрахунок радіуса пучка на другому дзеркалі

$$wdz21(R1, R2, L1, \lambda) := \sqrt{\frac{R2 \cdot \lambda}{\pi}} \cdot \sqrt[4]{\frac{(R1 - L1) \cdot L1}{(R2 - L1) \cdot (R1 + R2 - L1)}},$$

$$wdz22(L1, \lambda) := \sqrt{\frac{L1 \cdot \lambda}{\pi}},$$

$$wdz23(R1, L1, \lambda) := \sqrt{\frac{R1 \cdot \lambda}{\pi}} \cdot \sqrt[4]{\frac{L1}{R1 - L1}},$$

$$WM2(UN) := \begin{cases} wdz21(R1, R2, L1, \lambda) & \text{if } UN = 1 \\ wdz22(L1, \lambda) & \text{if } UN = 2 \\ wdz23(R1, L1, \lambda) & \text{if } UN = 3 \end{cases}$$

А.4.2.5 Переприсвоєння величин перетяжки та радіусів плям для подальших розрахунків новим змінюваним

$w0 := WN0(UN)$, $w0 = 1.001 \times 10^{-3}$ – радіус пучка в перетяжці, м;

$wz1 := WM1(UN)$, $wz1 = 1.416 \times 10^{-3}$ – радіус плями на першому дзеркалі, м;

$wz2 := WM2(UN)$, $wz2 = 1.416 \times 10^{-3}$ – радіус плями на другому дзеркалі, м.

А.4.3 Розрахунок розподілу інтенсивності поля випромінювання по сферичному круглому дзеркалу неконфокального резонатора за умови $R1 \neq R2 \neq L$

$$EF1(er, fi, wez) := \left[\left(\sqrt{2} \cdot \frac{er}{wez} \right)^{2 \cdot 1} \right] \cdot \left[\text{Lag} \left[p, \left(2 \cdot \frac{er^2}{wez^2} \right) \right] \right]^2 \cdot \exp \left(-2 \cdot \frac{er^2}{wez^2} \right) \cdot \cos(1 \cdot fi)^2$$

$M1_{i,j} := EF1(rr_i, \phi\phi_j, wz1)$ – інтенсивності поля на першому дзеркалі;

$M2_{i,j} := EF1(rr_i, \phi\phi_j, wz2)$ – інтенсивності поля на другому дзеркалі;

А.4.4 Розрахунок розподілу електричної складової напруженості поля випромінювання по сферичному круглому дзеркалу неконфокального резонатора за умови $R1 \neq R2 \neq L$

$$EF2(er, fi, wez) := \left[\left(\sqrt{2} \cdot \frac{er}{wez} \right)^1 \right] \cdot \text{Lag} \left[p, \left(2 \cdot \frac{er^2}{wez^2} \right) \right]^1 \cdot \exp \left(-\frac{er^2}{wez^2} \right) \cdot (\cos(1 \cdot fi)),$$

$E1_{i,j} := EF2(rr_i, \phi\phi_j, wz1)$ – напруженість електричної складової поля на першому дзеркалі;

$E2_{i,j} := EF2(rr_i, \phi\phi_j, wz2)$ – напруженість електричної складової поля на другому дзеркалі.

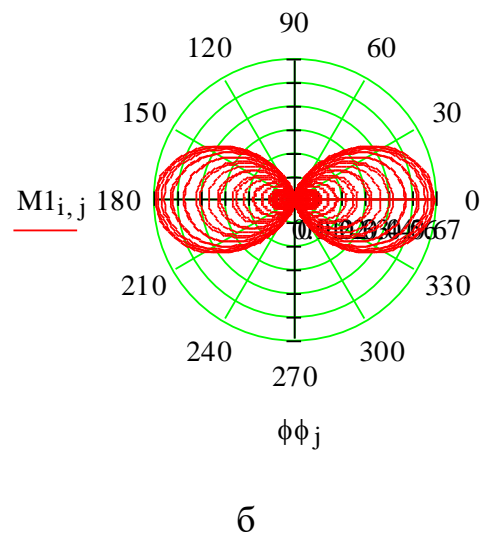
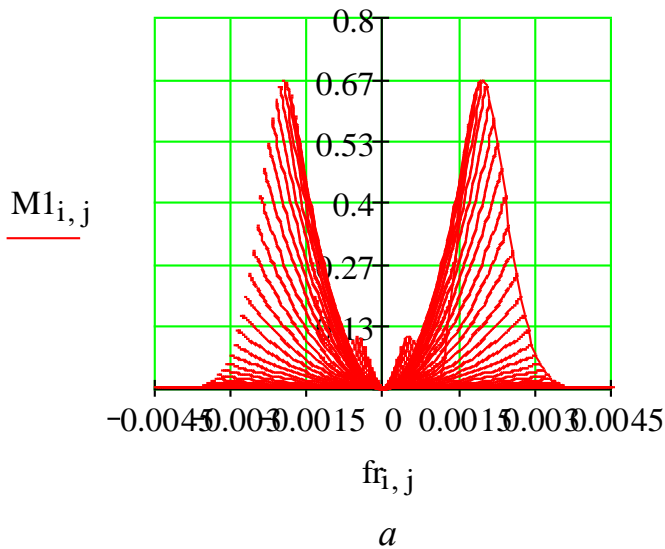


Рисунок А.22 – Розподіл радіальної (а) і аксіальної (б) складової інтенсивності поля випромінювання по сферичному дзеркалу круглої апертури неконфокального резонатора

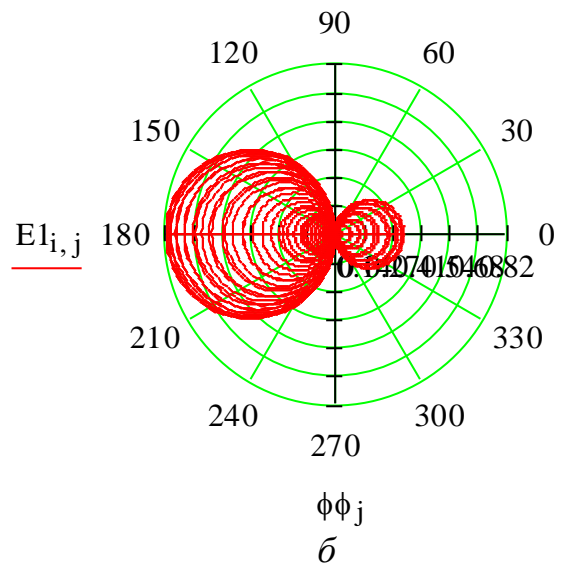
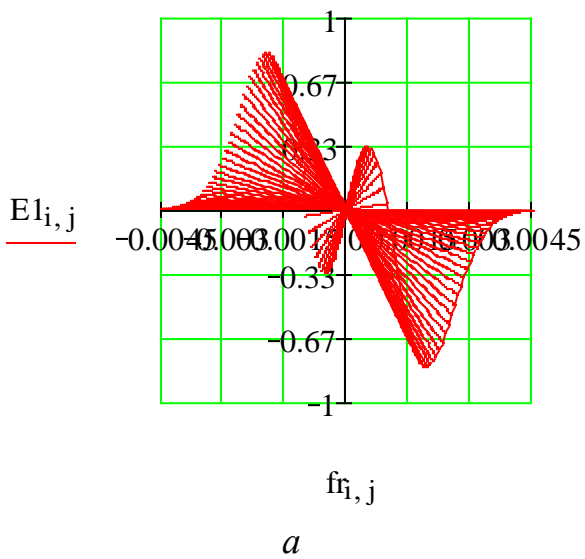
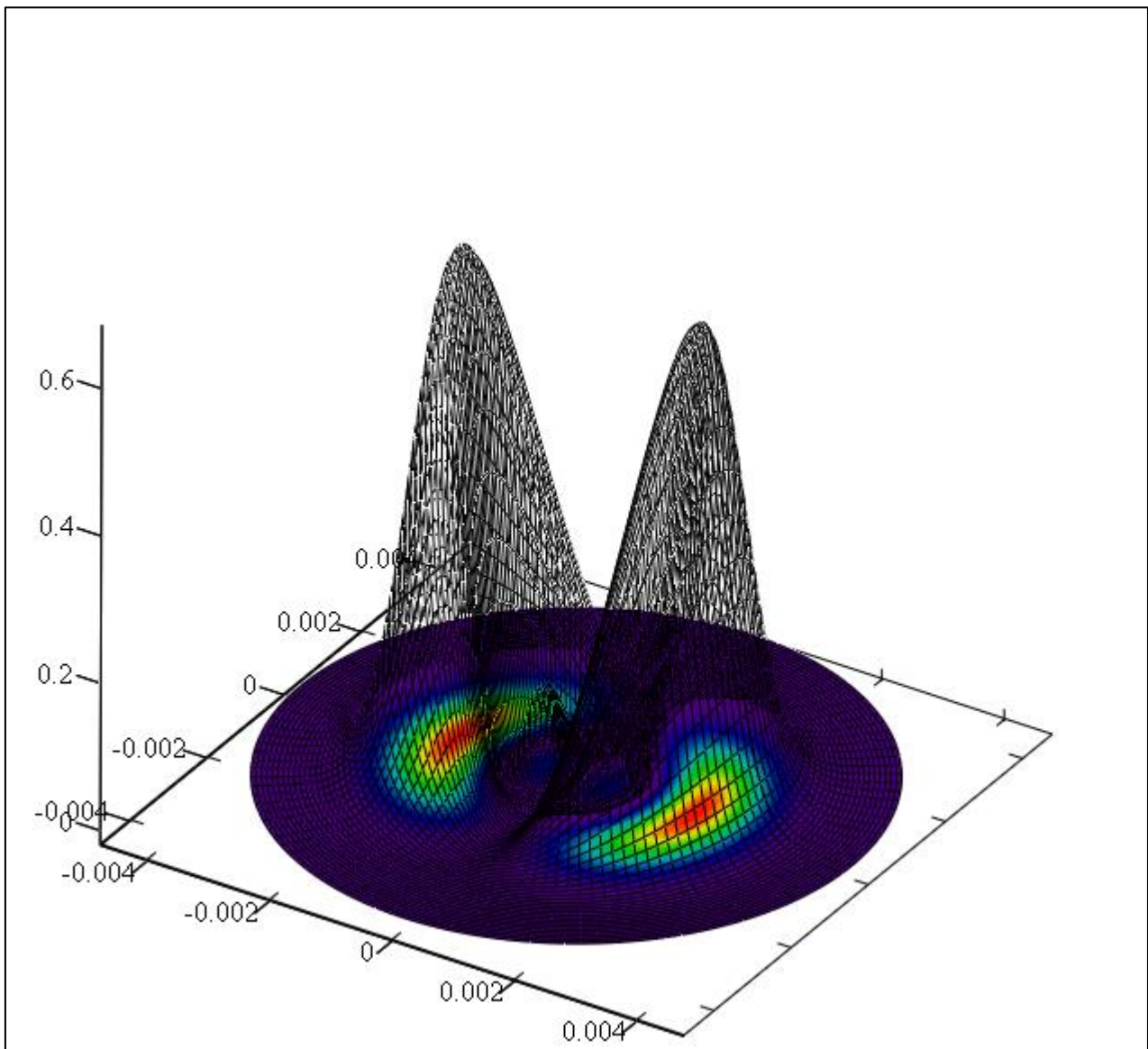


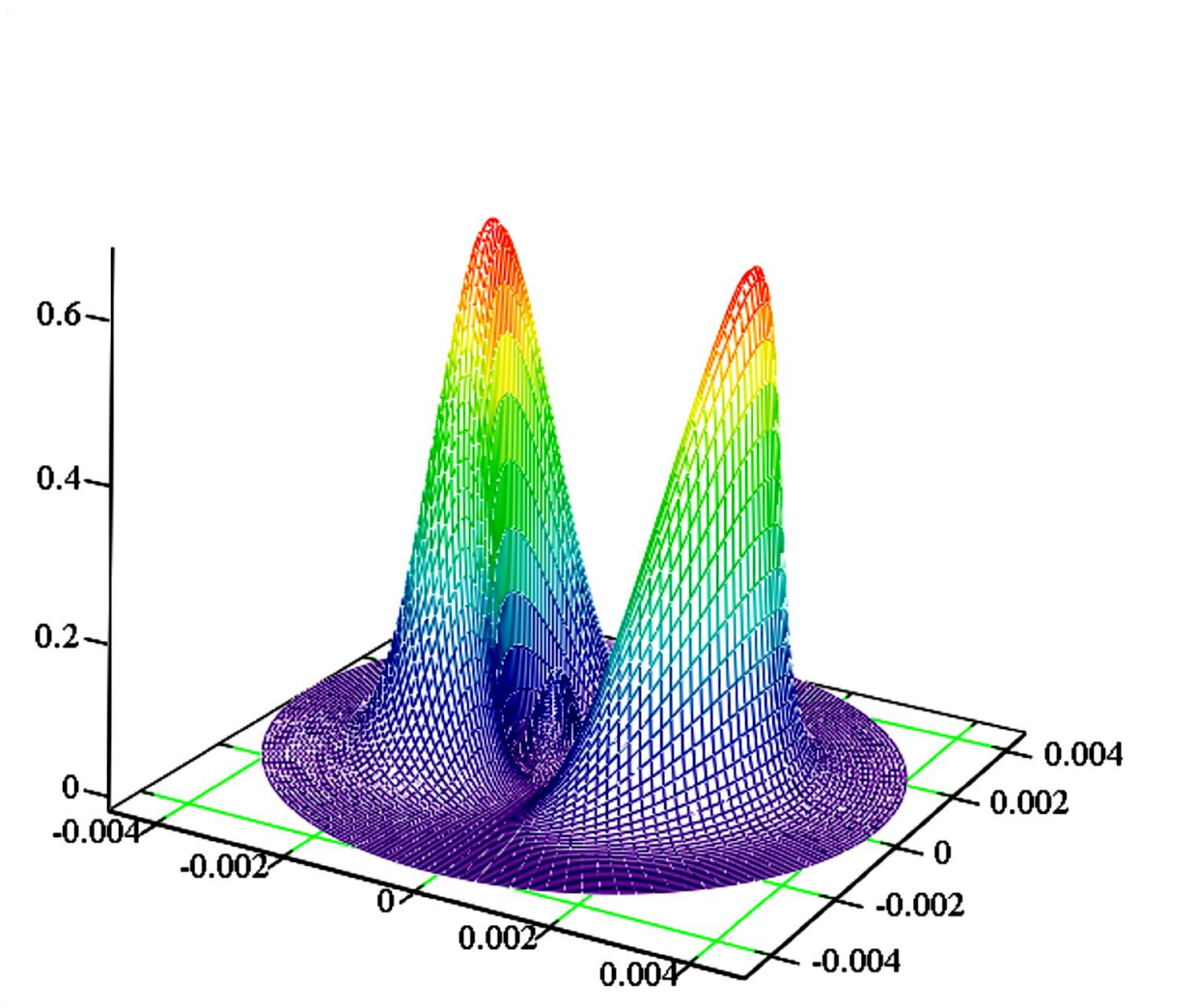
Рисунок А.23 – Розподіл радіальної (а) і аксіальної (б) електричної складової напруженості поля випромінювання по сферичному дзеркалу круглої апертури неконфокального резонатора



$(f_r, f_\phi, M1), (f_r, f_\phi, M1)$

TEM₁₁ $p = 1$ $l = 1$

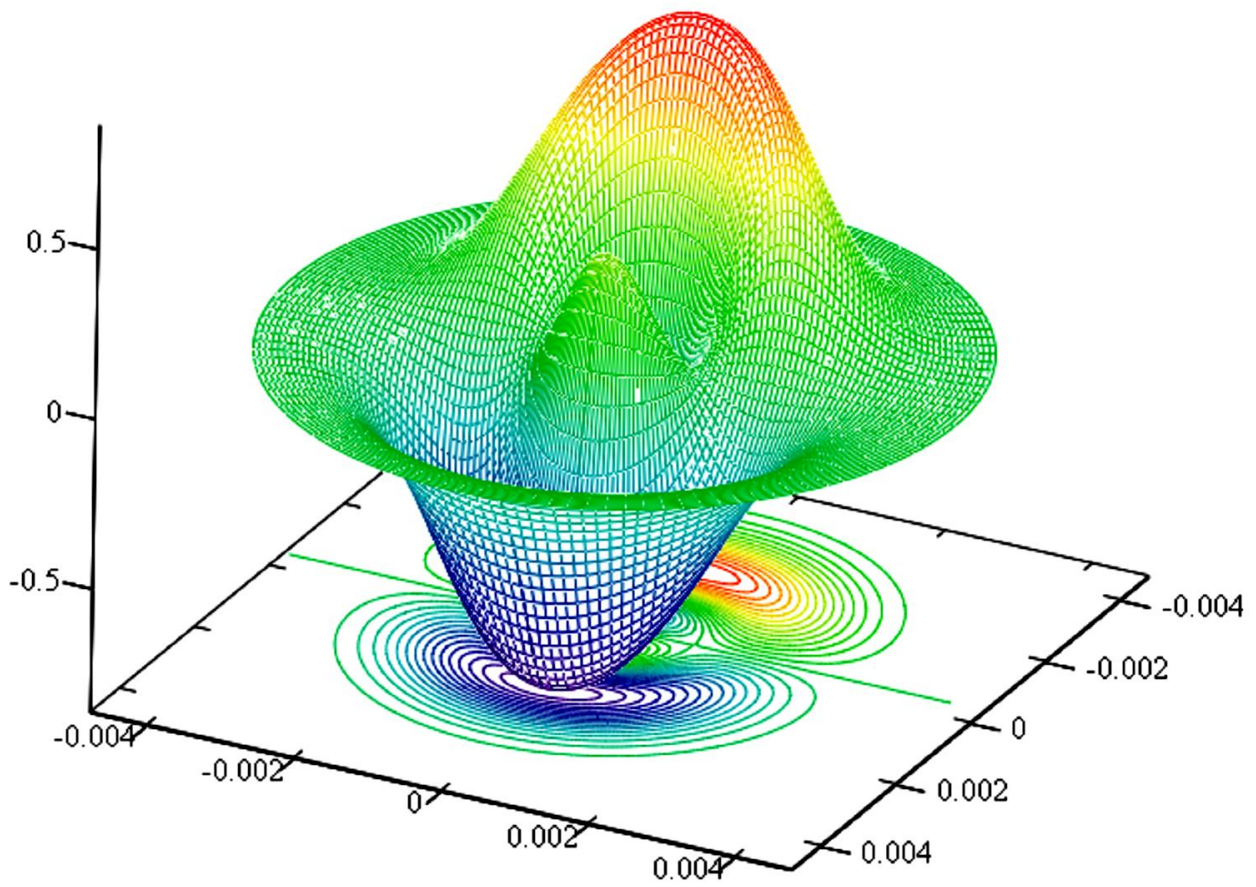
Рисунок А.24 – Розподіл інтенсивності поля випромінювання по сферичному дзеркалу круглої апертури для моди TEM₁₁ (прозора поверхня з видом зверху для освітленості в ближній зоні)



$(f_r, f_\phi, M1)$

TEM_{pl} $p = 1$ $l = 1$

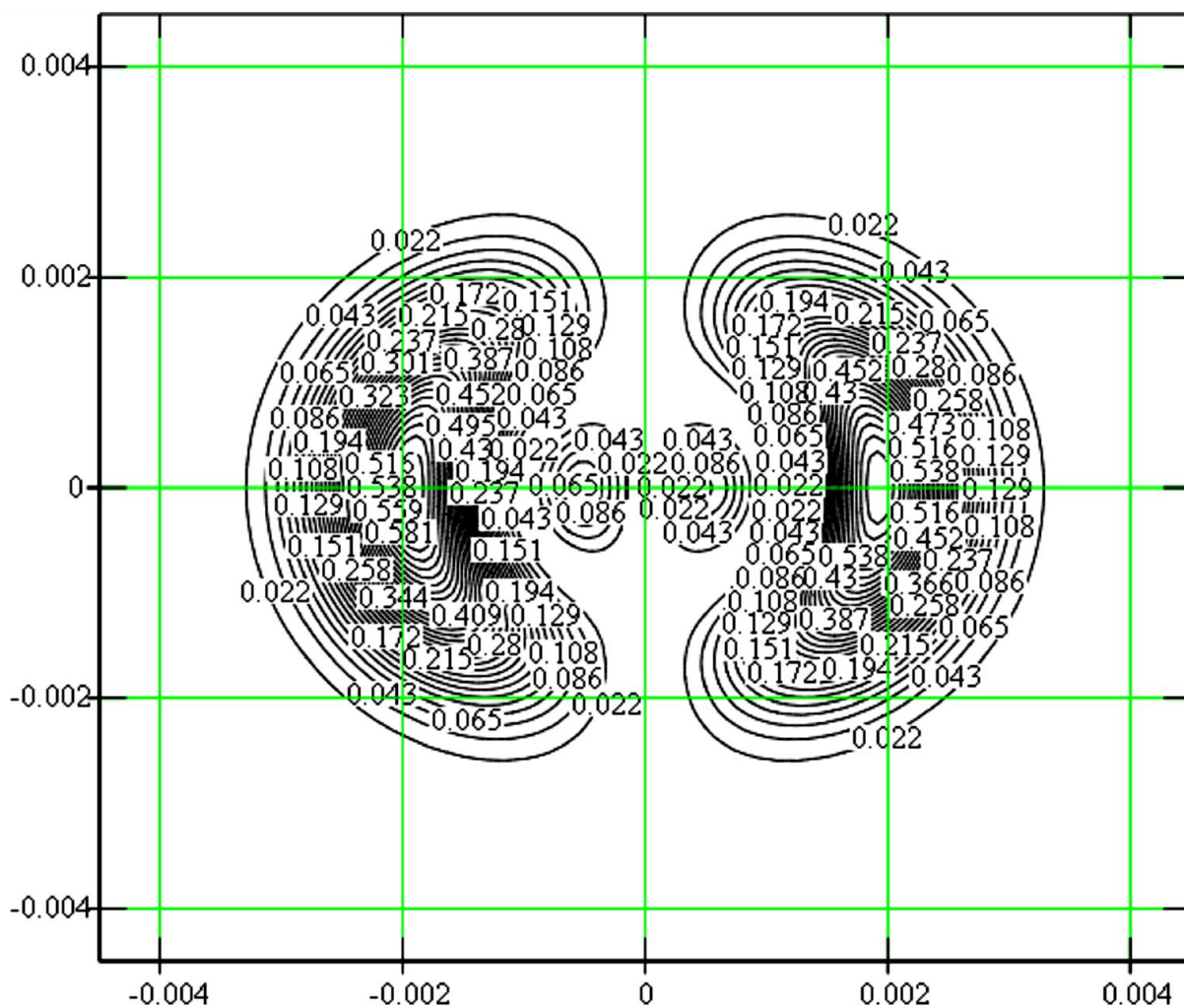
Рисунок А.25 – Розподіл інтенсивності поля випромінювання по сферичному дзеркалу круглої апертури для моди TEM_{pl} (непрозора поверхня)



$(f_r, f_\phi, E_1), (f_r, f_\phi, E_1)$

TEM_{pl} $p = 1$ $l = 1$

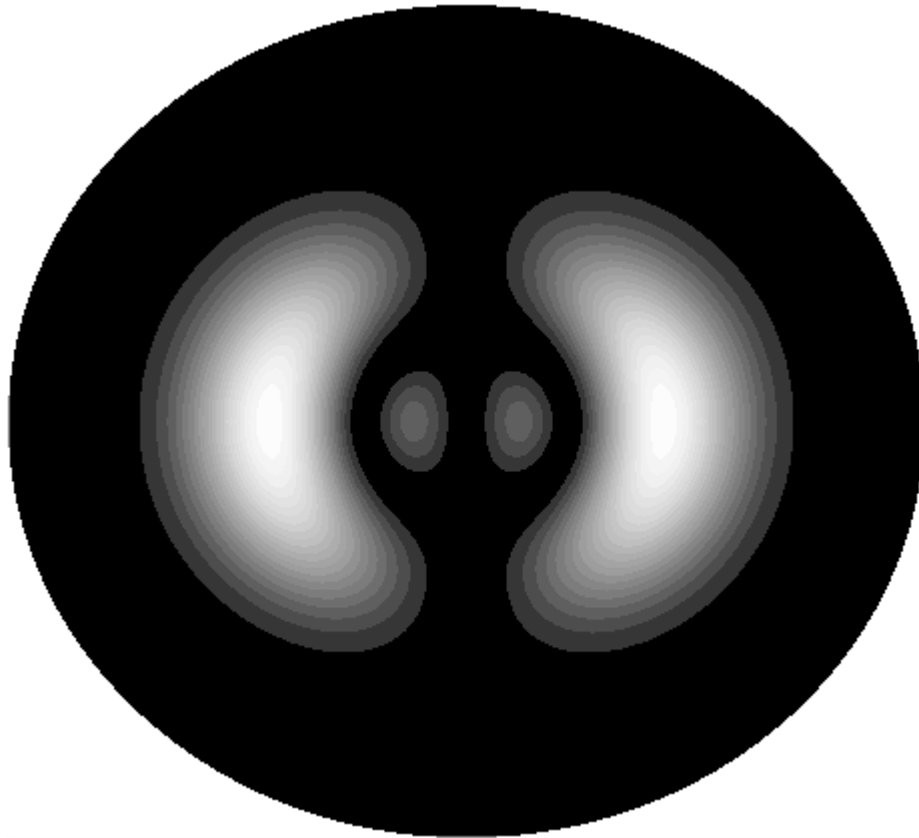
Рисунок А.26 – Розподіл напруженості електричної складової поля випромінювання по сферичному дзеркалу круглої апертури (непрозора поверхня) з видом зверху на картину поля у ближній зоні



$(f_r, f_\phi, M1)$

TEM_{pl} $p = 1$ $l = 1$

Рисунок А.27 – Розподіл інтенсивності поля випромінювання по сферичному дзеркалу круглої апертури для моди TEM_{pl}
(з вказуванням числових значень нормованої інтенсивності)



$(f_r, f_\phi, M1)$

TEM_{p1} $p = 1$ $l = 1$

Рисунок А.28 – Розподіл інтенсивності поля випромінювання по сферичному дзеркалу круглої апертури для моди TEM_{p1} (як розподіл освітленості в ближній зоні) у вигляді різниці яскравості освітленості

A.5 Розрахунок параметрів Гауссівського пучка у резонаторі зі сферичними дзеркалами довільної апертури

A.5.1 Вихідні дані для розрахунку

$\lambda := 0.63 \cdot 10^{-6}$ – довжина хвилі випромінювання, м;

$L1 := 0.5$ – довжина (база) резонатора, м;

$R1 := 0.5$ – радіус кривизни першого дзеркала резонатора, м;

$R2 := 0.5$ – радіус кривизни другого дзеркала резонатора, м;

$r1 := 0.05$ – радіус дзеркала резонатора, м;

$r := 0.0045$ – радіус умовної апертури на дзеркалі резонатора, м;

$$Na1 := \frac{R1^2}{L1 \cdot \lambda}, \quad Na1 = 7.937 \times 10^5$$

$$Na2 := \frac{R2^2}{L1 \cdot \lambda}, \quad Na2 = 7.937 \times 10^5 \quad \text{– число Френеля;}$$

$UN := 2$ – вибір типу резонатора: ($UN = 1$ – неконфокальний, $UN = 2$ – конфокальний, $UN = 3$ – напівконфокальний).

A.5.2 Задання відбиваючих поверхонь дзеркал резонатора

$m := 30$ – задання кількості розрахункових точок по радіусу дзеркала;

$n := 60$ – задання кількості розрахункових точок по азимутальному куту дзеркала;

$hr := \frac{r1}{m}$ – задання кроку зміни радіальної координати вздовж дзеркала;

$h\phi := \frac{2 \cdot \pi}{n}$ – задання кроку зміни аксіальної координати вздовж дзеркала;

$i := 0..m$ $j := 0..n$ – задання індексних змінюваних для масивів радіальної та аксіальної координат;

$r_i := i \cdot hr$ $\phi_j := j \cdot h\phi$ – задання масивів радіальної та аксіальної координат;

A.5.3 Визначення параметрів Гауссівського пучка

A.5.3.1 Перехід від полярної до прямокутної (декартової) системи координат

$$ffx_{i,j} := r1 \cos(\phi_j),$$

$$ffy_{i,j} := r1 \cdot \sin(\phi_j),$$

$$ffz_{i,j} := 0.$$

A.5.3.2 Розрахунок радіуса пучка в перетяжці

$$wo1(R1, R2, L1, \lambda) := \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \cdot \sqrt[4]{\frac{L1 \cdot (R1 - L1) \cdot (R2 - L1) \cdot (R1 + R2 - L1)}{(R1 + R2 - 2 \cdot L1)^2}}$$

$$wo2(L1, \lambda) := \sqrt{\frac{L1 \cdot \lambda}{2 \cdot \pi}}$$

$$wo3(R1, L1, \lambda) := \sqrt{\frac{L1 \cdot \lambda}{\pi}} \cdot \sqrt[4]{\frac{R1 - L1}{L1}}$$

$$WN0(UN) := \begin{cases} wo1(R1, R2, L1, \lambda) & \text{if } UN = 1 \\ wo2(L1, \lambda) & \text{if } UN = 2 \\ wo3(R1, L1, \lambda) & \text{if } UN = 3 \end{cases}$$

A.5.3.3 Розрахунок радіуса пучка на першому дзеркалі

$$wdz11(R1, R2, L1, \lambda) := \sqrt{\frac{R1 \cdot \lambda}{\pi}} \cdot \sqrt[4]{\frac{(R2 - L1) \cdot L1}{(R1 - L1) \cdot (R1 + R2 - L1)}}$$

$$wdz12(L1, \lambda) := \sqrt{\frac{L1 \cdot \lambda}{\pi}}$$

$$wdz13(R1, L1, \lambda) := \sqrt{\frac{L1 \cdot \lambda}{\pi}} \cdot \sqrt[4]{\frac{R1 - L1}{L1}}$$

$$WM1(UN) := \begin{cases} wdz11(R1, R2, L1, \lambda) & \text{if } UN = 1 \\ wdz12(L1, \lambda) & \text{if } UN = 2 \\ wdz13(R1, L1, \lambda) & \text{if } UN = 3 \end{cases}$$

A.5.3.4 Розрахунок радіуса пучка на другому дзеркалі

$$wdz21(R1, R2, L1, \lambda) := \sqrt{\frac{R2 \cdot \lambda}{\pi}} \cdot \sqrt[4]{\frac{(R1 - L1) \cdot L1}{(R2 - L1) \cdot (R1 + R2 - L1)}}$$

$$wdz22(L1, \lambda) := \sqrt{\frac{L1 \cdot \lambda}{\pi}}$$

$$wdz23(R1, L1, \lambda) := \sqrt{\frac{R1 \cdot \lambda}{\pi}} \cdot \sqrt[4]{\frac{L1}{R1 - L1}}$$

$$WM2(UN) := \begin{cases} wdz21(R1, R2, L1, \lambda) & \text{if } UN = 1 \\ wdz22(L1, \lambda) & \text{if } UN = 2 \\ wdz23(R1, L1, \lambda) & \text{if } UN = 3 \end{cases}$$

А.5.3.5 Переприсвоєння величин перетяжки та радіусів плям новим змінним для подальших розрахунків

$$\begin{aligned} w0 &:= WN0(UN) \quad w0 = 2.239 \times 10^{-4} \text{ – радіус пучка в перетяжці, м;} \\ wz1 &:= WM1(UN) \quad wz1 = 3.167 \times 10^{-4} \text{ – радіус плями на першому дзеркалі, м;} \\ wz2 &:= WM2(UN) \quad wz2 = 3.167 \times 10^{-4} \text{ – радіус плями на другому дзеркалі, м.} \end{aligned}$$

А.5.3.6 Визначення відстаней від площини перетяжки до першого та другого дзеркал відповідно

$$d1 := \begin{cases} \frac{(R2 - L1) \cdot L1}{R1 + R2 - 2 \cdot L1} & \text{if } UN \neq 2 \quad d1 = 0.25 \text{ м;} \\ \frac{1}{2} \cdot L1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$d2 := \begin{cases} \frac{(R1 - L1) \cdot L1}{R1 + R2 - 2 \cdot L1} & \text{if } UN \neq 2 \quad d2 = 0.25 \text{ м;} \\ \frac{1}{2} \cdot L1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

А.5.3.7 Визначення довжини еквівалентного конфокального резонатора

$$\begin{aligned} L2 &:= \sqrt{\frac{4 \cdot L1 \cdot (R1 - L1) \cdot (R2 - L1) \cdot (R1 + R2 - L1)}{(R1 + R2 - 2 \cdot L1)^2}} \quad L2 = 0 \text{ м;} \\ Le &:= \begin{cases} L1 & \text{if } UN = 2 \quad L1 = 0.5 \text{ м;} \\ L2 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

А.5.3.8 Визначення поперечних розмірів гауссівського пучка з розрахунку довжини еквівалентного конфокального резонатора та довжини хвилі випромінювання як функції координати вздовж осі пучка

$$w(\xi) := w0 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{2 \cdot \xi}{Le}\right)^2} \text{ м.}$$

Переріз гауссівського пучка як функції координати вздовж осі пучка:

$$w1(\xi) := w0 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda \cdot \xi}{\pi \cdot w0^2}\right)^2} \text{ м.}$$

Кут розсіювання гауссівського пучка з розрахунку еквівалентного конфокального резонатора:

$$Vse := 2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \lambda}{\pi \cdot Le}}$$

А.5.4 Побудова гауссівського пучка та його окремих елементів

$pr := 50$ – загальна кількість розрахункових інтервалів вздовж осі пучка координати Z ;

$zp := d1 + d2$ – межі зміни координати Z в обох напрямках від площини перетяжки (початку координат);

$hz := \frac{zp}{pr}$ – крок зміни координати Z вздовж осі резонатора;

$k := 0.. pr$ – задання індексної змінної масиву розрахункових точок координати Z ;

$zk := -d1 + hz \cdot k$ – формування масиву розрахункових точок координати Z ;

$fu_k := zk \cdot \sin\left(\frac{Vse}{2}\right)$ – формування масиву розрахункових точок асимптоти кута розсіювання Vs ;

$kz0 := 30$ – загальна кількість розрахункових інтервалів по асимптоті кута розсіювання Vs ;

$hVse := \frac{Vse}{kz0}$ – крок зміни кутової координати по асимптоті кута розсіювання Vs ;

$g := 0.. kz0$ – задання індексної змінної масиву розрахункових точок кута розсіювання гауссівського пучка Vs ;

$uVse_g := \frac{-Vse}{2} + hVse \cdot g$ – формування масиву розрахункових точок кута розсіювання гауссівського пучка Vs ;

$L1 = 0.5$,

$d1 = 0.25$,

$d2 = 0.25$,

$PARAM_5 := L1 - d1 - d2 \quad PARAM_5 = 0$ – перевірка повздовжніх пропорцій пучка;

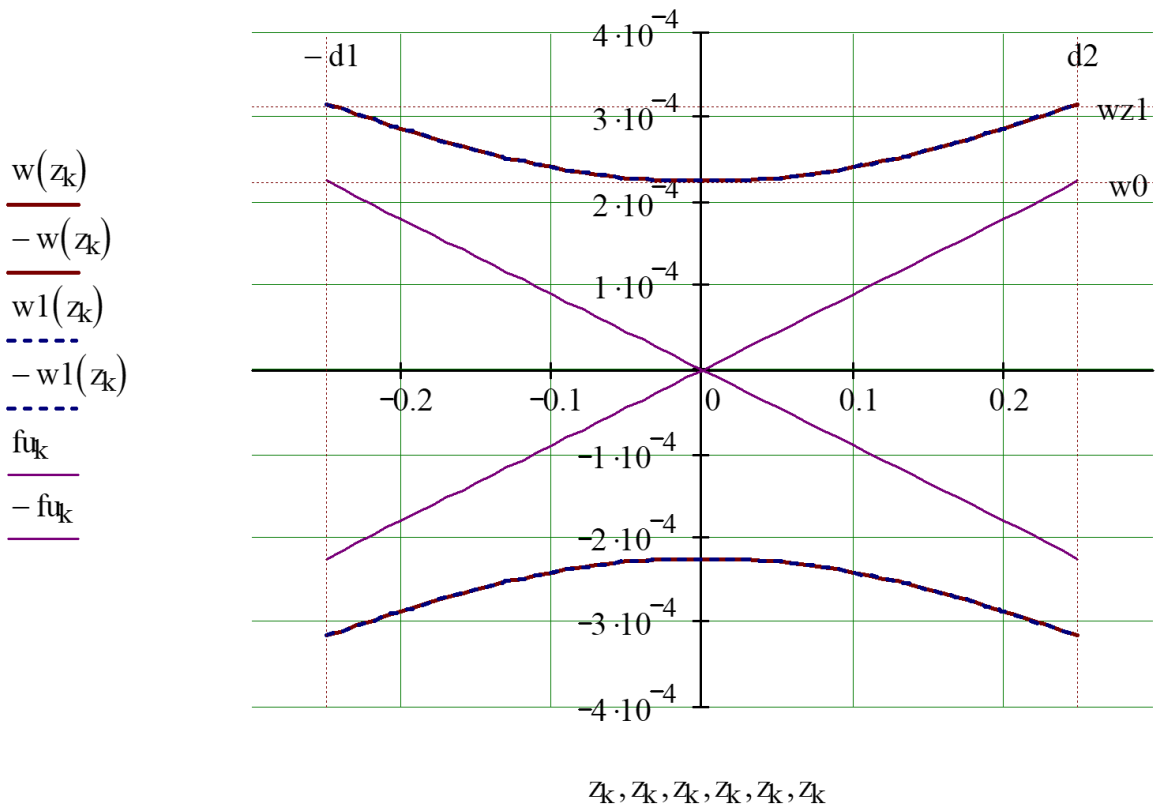


Рисунок А.29 – Вигляд гауссівського пучка в поперечному розрізі (вертикальними маркерами, червоними пунктирними лініями, показані повздовжні розміри резонатора, горизонтальними маркерами – радіус перетяжки w_0 та радіус плями на першому дзеркалі w_z , тонкими перехрестними лініями показані асимптоти кута розсіювання пучка, безперервними і пунктирними лініями – межі пучка, розраховані по геометричних параметрах резонатора і параметрах випромінювання, відповідно)

А.5.5 Побудова гауссівського пучка в масштабі резонатора і розмірів його дзеркал

А.5.5.1 Розрахунок меж гауссівського пучка як функції координати в напрямку осі пучка

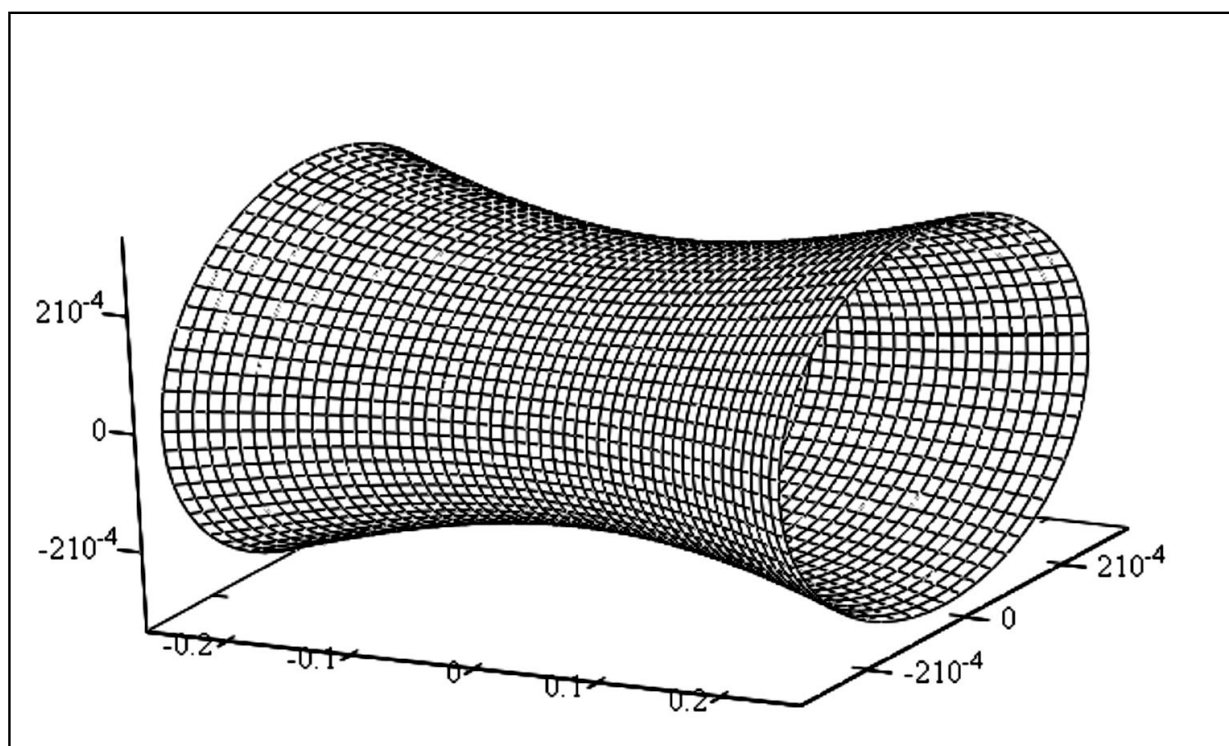
$$w_{1k} := w_0 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda \cdot z_k}{\pi \cdot w_0^2} \right)^2}.$$

А 5.5.2 Перехід від циліндричних координат до декартових

$$x_{0k,j} := w_{1k} \cdot \cos(\phi_j),$$

$$y_{0k,j} := w_{1k} \cdot \sin(\phi_j),$$

$$z_{0k,j} := z_k$$



(z_0, x_0, y_0)

Рисунок А.30 – Об'ємний вигляд гауссівського пучка

А.5.6 Побудова уздовжнього перерізу гауссівського пучка в масштабі резонатора та розмірів його дзеркал

А.5.6.1 Задання половинної поверхні гауссівського пучка

$$h\phi_1 := \frac{\pi}{n}$$

$$j := 0..n$$

$$\phi_{1j} := j \cdot h\phi_1$$

$$x_{1k,j} := w_{1k} \cdot \cos(\phi_{1j})$$

$$y_{1k,j} := w_{1k} \cdot \sin(\phi_{1j})$$

$$z_{1k,j} := z_k$$

А.5.6.2 Побудова осі резонатора

$$x_{k,j} := 0$$

$$y_{k,j} := 0$$

$$z_{k,j} := z_k$$

А.5.6.3 Побудова положення та розмірів перетяжки

$$x_{2k,j} := w_0 \cdot \cos(\phi_j)$$

$$y_{2k,j} := w_0 \cdot \sin(\phi_j)$$

$$z_{2k,j} := 0$$

А.5.6.4 Побудова положення та розмірів світлових плям на дзеркалах резонатора

$$x_{3k,j} := w_{z2} \cdot \cos(\phi_j)$$

$$y_{3k,j} := w_{z2} \cdot \sin(\phi_j)$$

$$z_{3k,j} := d_2$$

$$x_{4k,j} := w_{z1} \cdot \cos(\phi_j)$$

$$y_{4k,j} := w_{z1} \cdot \sin(\phi_j)$$

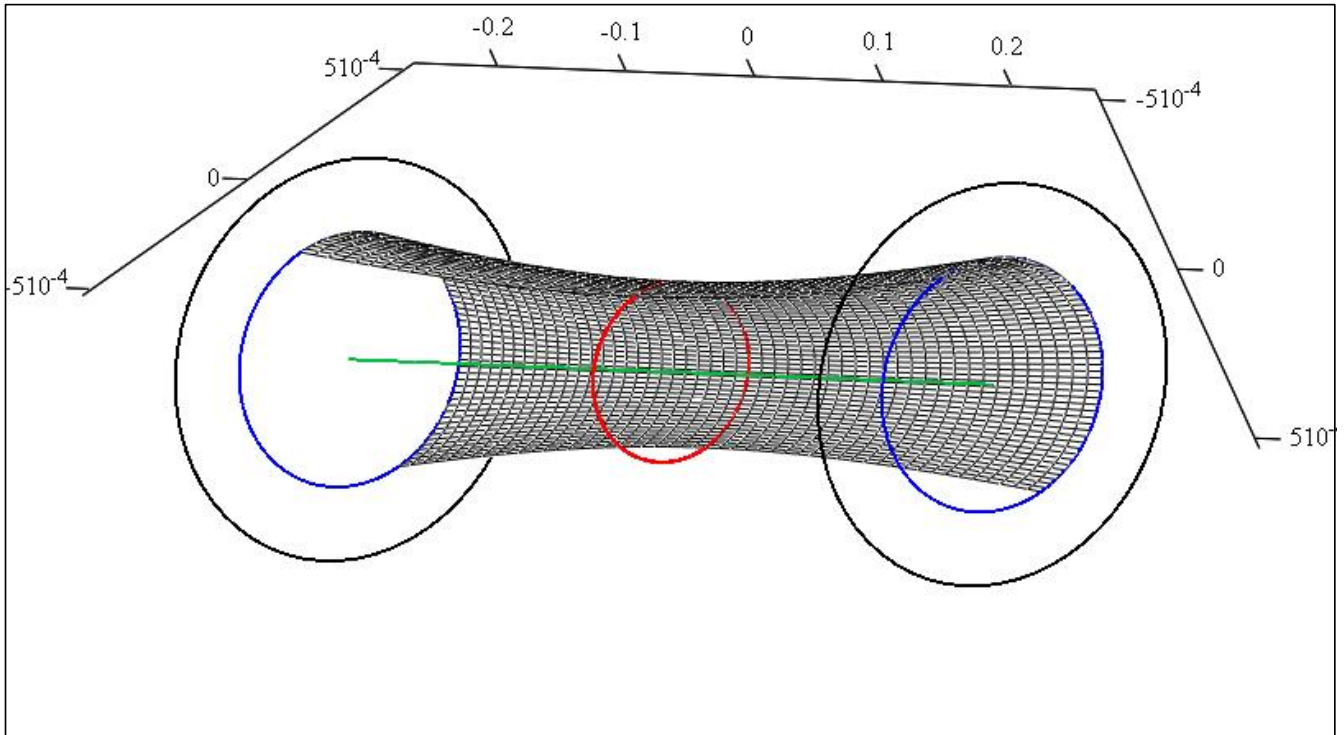
$$z_{4k,j} := -d_1$$

А.5.6.5 Побудова положення та розмірів дзеркал резонатора

$$kt := 0.01$$

$$\begin{aligned}xz1_{k,j} &:= kt \cdot r1 \cdot \cos(\phi_j) \\yz1_{k,j} &:= kt \cdot r1 \cdot \sin(\phi_j) \\zz1_{k,j} &:= -d1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}xz2_{k,j} &:= kt \cdot r1 \cdot \cos(\phi_j) \\yz2_{k,j} &:= kt \cdot r1 \cdot \sin(\phi_j) \\zz2_{k,j} &:= d2\end{aligned}$$



$(z_0, x_0, y_0), (z_1, x_1, y_1), (z_2, x_2, y_2), (z_3, x_3, y_3), (z_4, x_4, y_4), (z_k, x_k, y_k), (z_{z1}, x_{z1}, y_{z1}), (z_{z2}, x_{z2}, y_{z2})$

Рисунок А.31 – Повздовжній переріз гауссівського пучка, побудований у масштабі резонатора та розмірів його дзеркал (великими чорними окружностями показано положення і розміри дзеркал резонатора, синіми – положення і розміри світлових плям на дзеркалах, червоним – положення і розмір перетяжки пучка, безперервна зелена лінія – вісь резонатора)

ДОДАТОК Б

Б.1 Розрахунок власних значень енергії, власних функцій і густини розподілу вірогідності для електронів, важких і легких дірок у квантоворозмірній структурі

$m_0 := 9.11 \cdot 10^{-31}$ – маса спокою електрона, кг

$T := 300$ – абсолютна температура, К

$k_B := 8.65 \cdot 10^{-5}$ – стала Больцмана, еВ/К

$\phi := k_B \cdot T \quad \phi = 0.026$ – енергія термодинамічного потенціалу за даної робочої температури, еВ

$\hbar := \frac{4.5 \cdot 10^{-15}}{2 \cdot \pi}$ – стала Дірака, еВ*с

$E_{g1} := 1.424$ – ширина забороненої зони GaAs, еВ

$x_x := 0.45$ – молярна доля алюмінію в матеріалі бар'єра

$a_1 := 50$ – напівширина квантово-обмеженого шару

Розрахунок ширини забороненої зони AlGaAs залежно від молярної доли алюмінію за правилом Міллера

$$E_{g2} := \begin{cases} 1.424 + 1.247 \cdot x_x & \text{if } x_x < 0.45 \\ 1.424 + 1.247 \cdot x_x + 1.147 \cdot (x_x - 0.45) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$V_1 := 0.65 \cdot (E_{g2} - E_{g1}) \quad V_1 = 0.365$ висота потенціального бар'єра для електронів в зоні провідності, еВ

$V_2 := 0.35 \cdot (E_{g2} - E_{g1}) \quad V_2 = 0.196$ висота потенціального бар'єра для дірок у валентній зоні, еВ

$m_1 := 0.067 \cdot m_0$

$m_2 := (0.067 + 0.057 \cdot x_x) \cdot m_0$

$\gamma_1 := 6.58 - 3.4 \cdot x_x$

$\gamma_2 := 2.1 - 1.42 \cdot x_x$

$$m_{1hh} := \frac{m_0}{6.58 - 2 \cdot 2.1} \quad m_{2hh} := \frac{m_0}{\gamma_1 - 2 \cdot \gamma_2} \quad m_{1lh} := \frac{m_0}{6.58 + 2 \cdot 2.1} \quad m_{2lh} := \frac{m_0}{\gamma_1 + 2 \cdot \gamma_2}$$

$$k_2(x) := \frac{\sqrt{2 \cdot m_1 \cdot x}}{\hbar} \quad \text{kap}_a(x) := \frac{\sqrt{2 \cdot m_2 \cdot (V_1 - x)}}{\hbar}$$

$$k_{2hh}(x) := \frac{\sqrt{2 \cdot m_{1hh} \cdot x}}{\hbar} \quad \text{kap}_{ahh}(x) := \frac{\sqrt{2 \cdot m_{2hh} \cdot (V_2 - x)}}{\hbar}$$

$$k_{2lh}(x) := \frac{\sqrt{2 \cdot m_{1lh} \cdot x}}{\hbar} \quad \text{kap}_{alh}(x) := \frac{\sqrt{2 \cdot m_{2lh} \cdot (V_2 - x)}}{\hbar}$$

$$f(x, a_1) := \tan(k_2(x) \cdot a_1) - \frac{m_2 \cdot \text{kap}_a(x)}{m_1 \cdot k_2(x)} \quad f_{hh}(x, a_1) := \tan(k_{2hh}(x) \cdot a_1) - \frac{m_{2hh} \cdot \text{kap}_{ahh}(x)}{m_{1hh} \cdot k_{2hh}(x)}$$

$$f_l(x, a_1) := \frac{1}{\tan(k_2(x) \cdot a_1)} + \frac{m_2 \cdot \text{kap}_a(x)}{m_1 \cdot k_2(x)} \quad f_{lh}(x, a_1) := \frac{1}{\tan(k_{2lh}(x) \cdot a_1)} + \frac{m_{2lh} \cdot \text{kap}_{alh}(x)}{m_{1lh} \cdot k_{2lh}(x)}$$

$$f_l h(x, a_1) := \tan(k_2 l h(x) \cdot a_1) - \frac{m_2 l h \cdot \kappa a l h(x)}{m_1 l h \cdot k_2 l h(x)} \quad f_1 l h(x, a_1) := \frac{1}{\tan(k_2 l h(x) \cdot a_1)} + \frac{m_2 l h \cdot \kappa a l h(x)}{m_1 l h \cdot k_2 l h(x)}$$

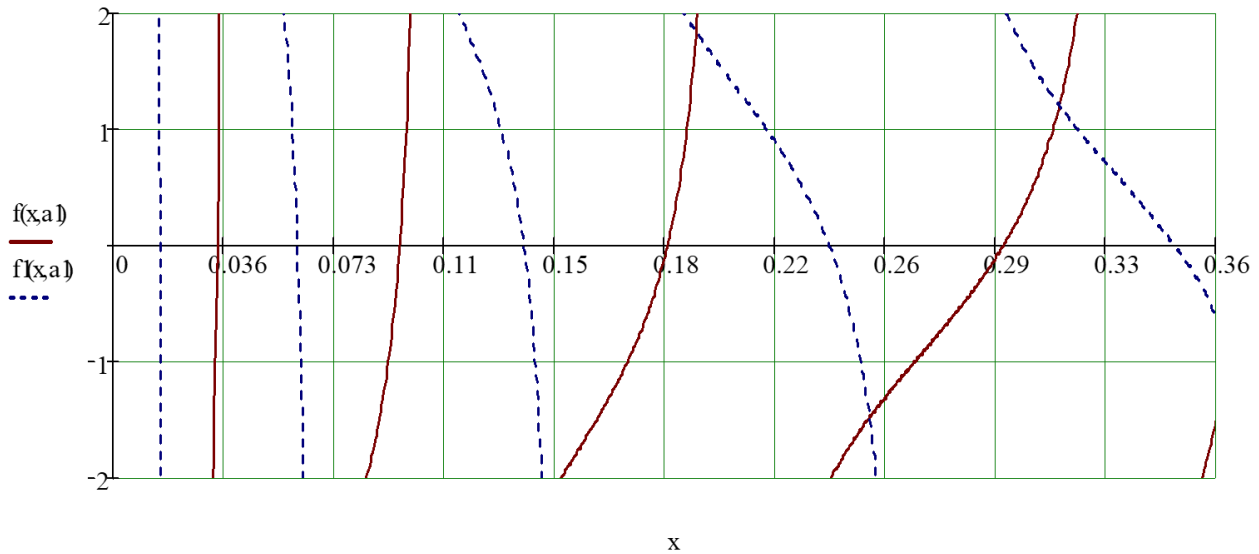


Рисунок Б.1 – Графічне розв’язання трансцендентних рівнянь щодо власних значень енергії електронів

Непарні розв’язання для електронів (перші чотири рівні $n=1, 3, 5, 7$)

$$x_1 := 0.004$$

$$E_1 := \text{root}(f(x_1, a_1), x_1) \quad E_1 = 3.82 \times 10^{-3}$$

$$x_1 := 0.034$$

$$E_3 := \text{root}(f(x_1, a_1), x_1) \quad E_3 = 0.034$$

$$x_1 := 0.097$$

$$E_5 := \text{root}(f(x_1, a_1), x_1) \quad E_5 = 0.095$$

$$x_1 := 0.17$$

$$E_7 := \text{root}(f(x_1, a_1), x_1) \quad E_7 = 0.183$$

Парні розв’язання для електрона (перші чотири рівні $n=2, 4, 6, 8$)

$$x_2 := 0.015$$

$$E_2 := \text{root}(f_1(x_2, a_1), x_2) \quad E_2 = 0.015$$

$$x_2 := 0.062$$

$$E_4 := \text{root}(f_1(x_2, a_1), x_2) \quad E_4 = 0.061$$

$$x_2 := 0.1$$

$$E_6 := \text{root}(f_1(x_2, a_1), x_2) \quad E_6 = 0.136$$

$$x_2 := 0.24$$

$$E_8 := \text{root}(f_1(x_2, a_1), x_2) \quad E_8 = 0.237$$

$z := -120, -119.9..120$ – зміна поточної координати в області квантового обмеження, A

Розрахунок коефіцієнтів розкладення хвильових функцій електрона

$$A_{1e}(EE) := \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{k^2(EE)} \cdot (k^2(EE) \cdot a_1 + \sin(k^2(EE) \cdot a_1) \cdot \cos(k^2(EE) \cdot a_1)) + \frac{1}{\kappa a(EE)} \cdot (\cos(k^2(EE) \cdot a_1))^2}}$$

$$A_{1o}(EE) := \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{k^2(EE)} \cdot (k^2(EE) \cdot a_1 - \sin(k^2(EE) \cdot a_1) \cdot \cos(k^2(EE) \cdot a_1)) + \frac{1}{\kappa a(EE)} \cdot (\sin(k^2(EE) \cdot a_1))^2}}$$

Розрахунок власних (хвильових) функцій для електрона, парних і непарних

$$\Psi_{ee}(z, EE) := \begin{cases} \left[A_{1e}(EE) \cdot \cos[k^2(EE) \cdot (-a_1)] \cdot e^{\kappa a(EE) \cdot (z+a_1)} \right] & \text{if } z \leq -a_1 \\ \left[A_{1e}(EE) \cdot \cos(k^2(EE) \cdot a_1) \cdot e^{-\kappa a(EE) \cdot (z-a_1)} \right] & \text{if } z \geq a_1 \\ A_{1e}(EE) \cdot \cos(z \cdot k^2(EE)) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\Psi_{eo}(z, EE) := \begin{cases} \left[A_{1o}(EE) \cdot \sin[k^2(EE) \cdot (-a_1)] \cdot e^{\kappa a(EE) \cdot (z+a_1)} \right] & \text{if } z \leq -a_1 \\ \left[A_{1o}(EE) \cdot \sin(k^2(EE) \cdot a_1) \cdot e^{-\kappa a(EE) \cdot (z-a_1)} \right] & \text{if } z \geq a_1 \\ A_{1o}(EE) \cdot \sin(z \cdot k^2(EE)) & \text{otherwise} \end{cases}$$

Розрахунок потенціалу квантового обмеження для електрона

$$P(z) := \begin{cases} \frac{E_{g1}}{2} + V_1 & \text{if } z < -a_1 \\ \frac{E_{g1}}{2} + V_1 & \text{if } z > a_1 \\ \frac{E_{g1}}{2} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Розрахунок власних значень енергії відносно потенціалу квантового обмеження (для зручності подальшого графічного подання)

$$E_n(E, z) := \begin{cases} \frac{E_{g1}}{2} + V_1 & \text{if } z < -a_1 \\ \frac{E_{g1}}{2} + V_1 & \text{if } z > a_1 \\ E + \frac{E_{g1}}{2} & \text{otherwise} \end{cases}$$

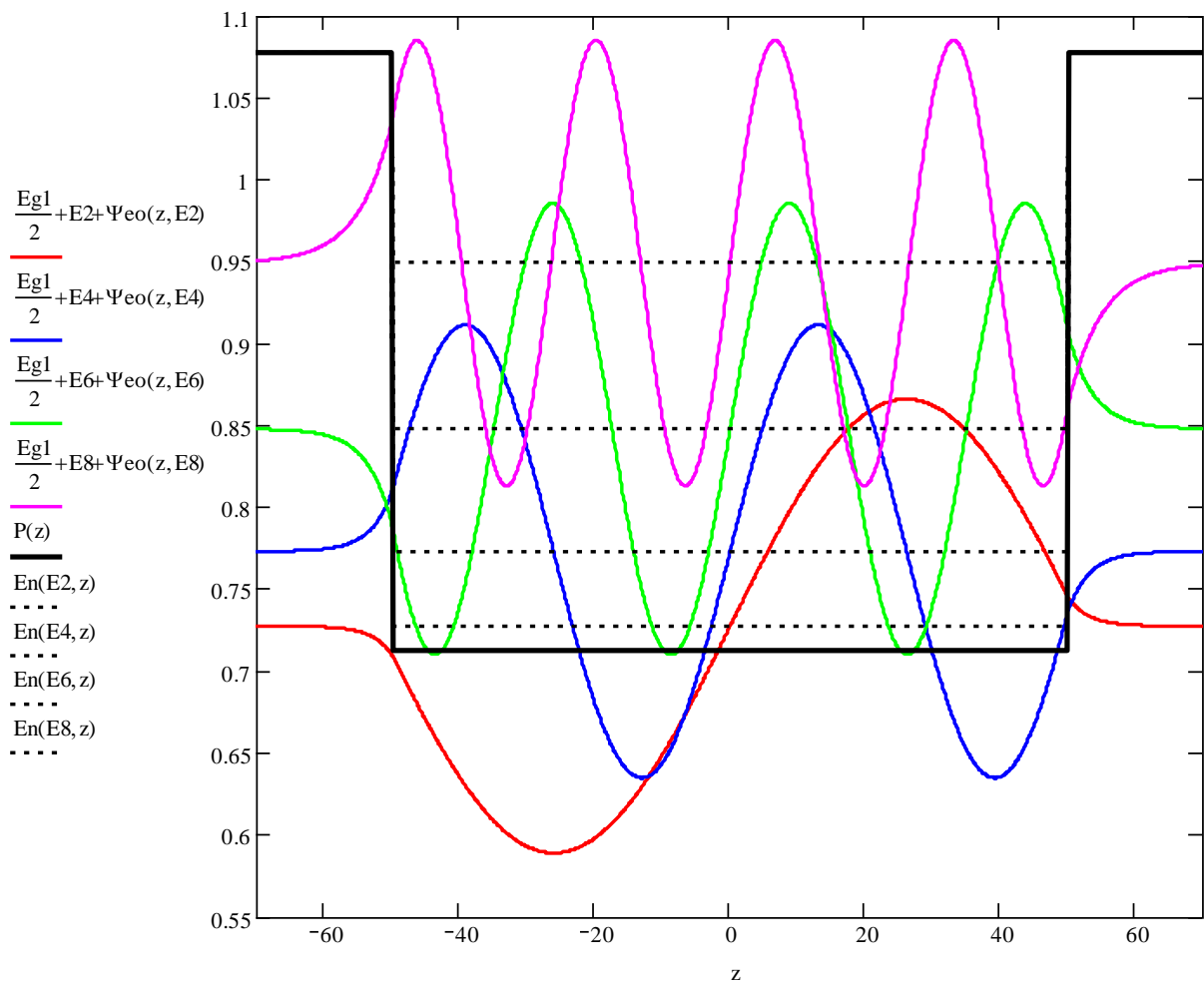


Рисунок Б.2 – Власні значення енергії і власні функції електронів (парні розв'язання)

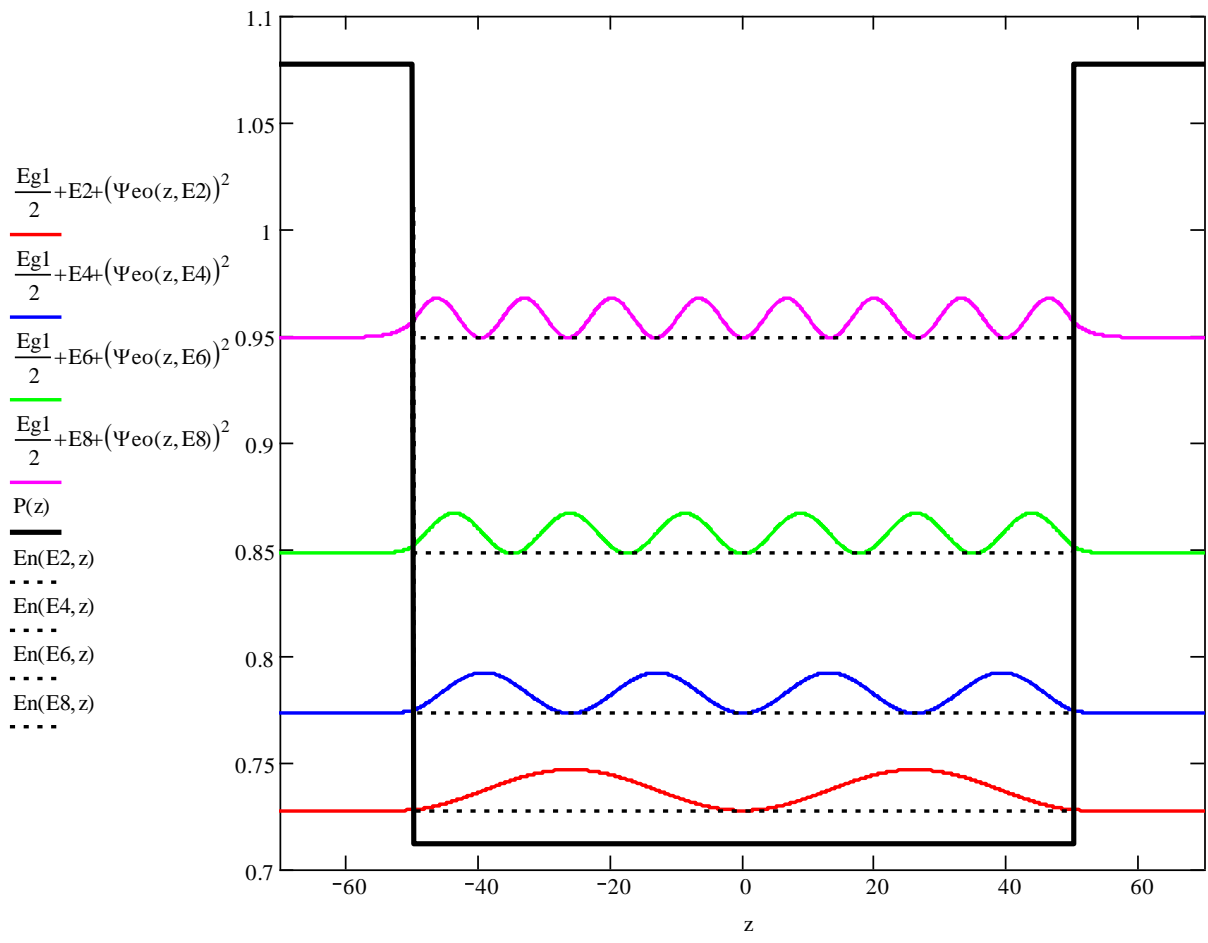


Рисунок Б.3 – Функція розподілу ймовірності в області квантового обмеження для електронів (парні розв'язання)

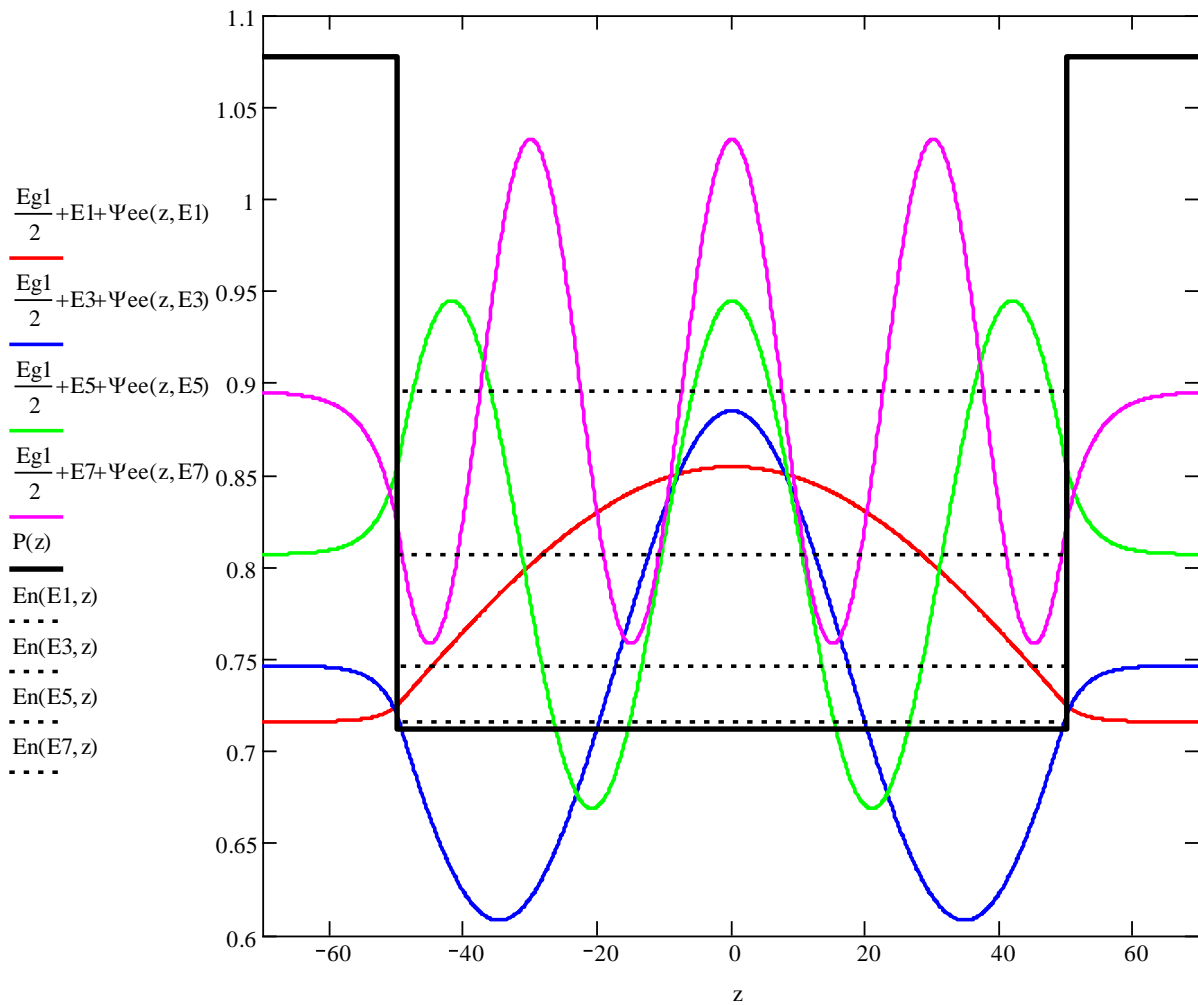


Рисунок Б.4 – Власні значення енергії і власні функції електронів (непарні розв'язання)

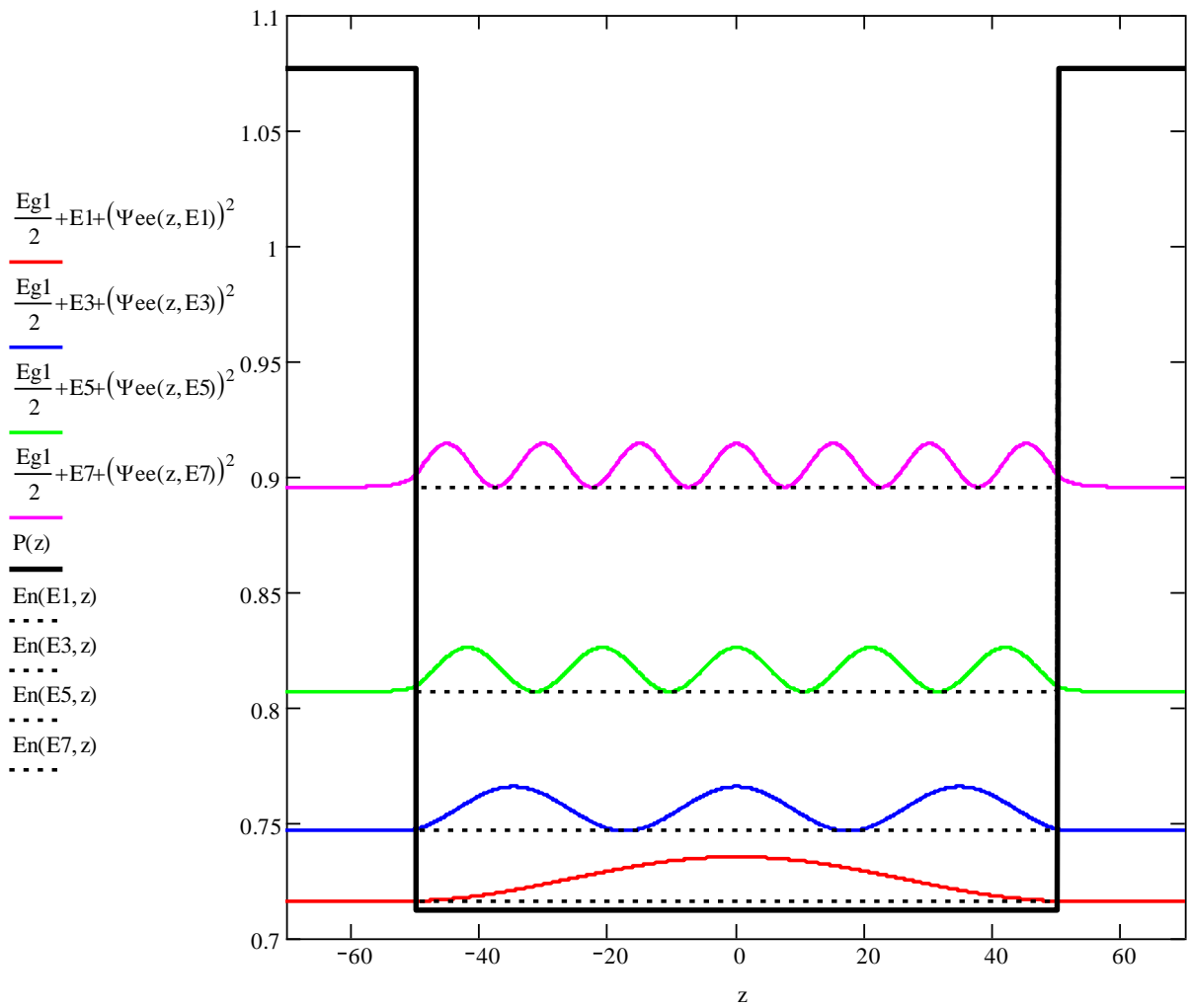


Рисунок Б.5 – Функція розподілу ймовірності в області квантового обмеження для електронів (непарні розв’язання)

Розв'язання для важкої дірки

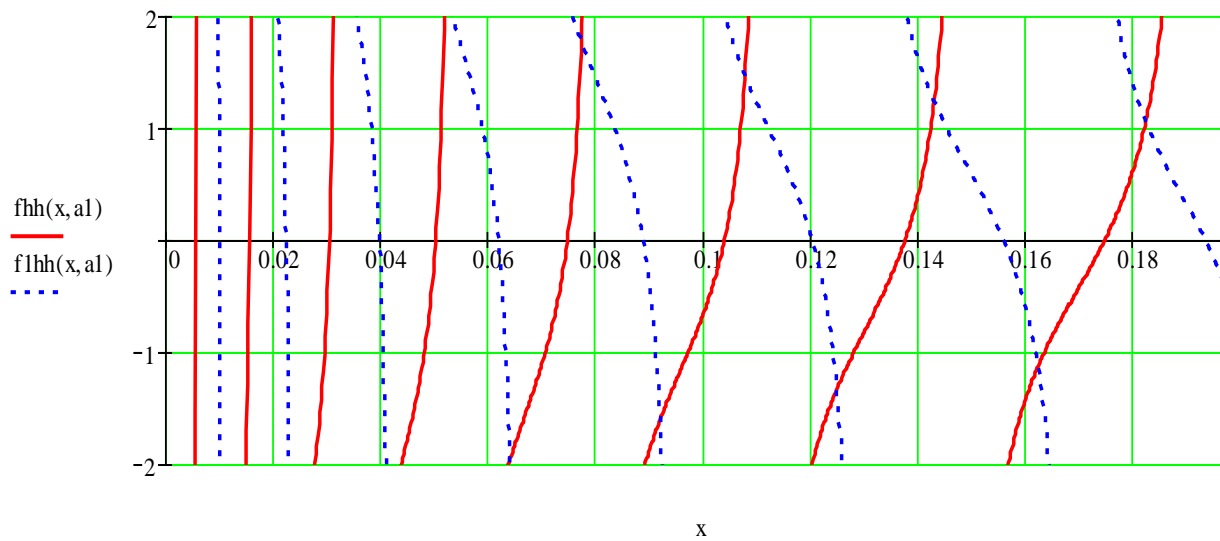


Рисунок Б.6 – Графічне розв'язання трансцендентних рівнянь щодо власних значень енергії важких дірок

Непарні розв'язання для важкої дірки (перші чотири рівні $n=1, 3, 5, 7$)

$$x1 := 0.0006$$

$$E1hh := \text{root}(fhh(x1, a1), x1) \quad E1hh = 6.218 \times 10^{-4}$$

$$x1 := 0.0052$$

$$E3hh := \text{root}(fhh(x1, a1), x1) \quad E3hh = 5.594 \times 10^{-3}$$

$$x1 := 0.016$$

$$E5hh := \text{root}(fhh(x1, a1), x1) \quad E5hh = 0.016$$

$$x1 := 0.041$$

$$E7hh := \text{root}(fhh(x1, a1), x1) \quad E7hh = 0.05$$

Парні розв'язання для важкої дірки (перші чотири рівні $n=2, 4, 6, 8$)

$$x2 := 0.0025$$

$$E2hh := \text{root}(f1hh(x2, a1), x2) \quad E2hh = 2.487 \times 10^{-3}$$

$$x2 := 0.01$$

$$E4hh := \text{root}(f1hh(x2, a1), x2) \quad E4hh = 9.941 \times 10^{-3}$$

$$x2 := 0.023$$

$$E6hh := \text{root}(f1hh(x2, a1), x2) \quad E6hh = 0.022$$

$$x2 := 0.04$$

$$E8hh := \text{root}(f1hh(x2, a1), x2) \quad E8hh = 0.04$$

Розрахунок коефіцієнтів розкладення хвильових функцій важких дірок

$$A1hhe(EEhh) := \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{k2hh(EEhh)} \cdot (k2hh(EEhh) \cdot a1 + \sin(k2hh(EEhh) \cdot a1) \cdot \cos(k2hh(EEhh) \cdot a1)) + \frac{1}{\text{kapahh}(EEhh)} \cdot (\cos(k2hh(EEhh) \cdot a1))^2}}$$

$$A1hho(EEhh) := \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{k2hh(EEhh)} \cdot (k2hh(EEhh) \cdot a1 - \sin(k2hh(EEhh) \cdot a1) \cdot \cos(k2hh(EEhh) \cdot a1)) + \frac{1}{\text{kapahh}(EEhh)} \cdot (\sin(k2hh(EEhh) \cdot a1))^2}}$$

Розрахунок власних (хвильових) функцій для важких дірок, парних і непарних

$$\Psi hhe(z, EEhh) := \begin{cases} \left[A1hhe(EEhh) \cdot \cos(-a1 \cdot k2hh(EEhh)) \cdot e^{\text{kapahh}(EEhh) \cdot (z+a1)} \right] & \text{if } z < -a1 \\ \left[A1hhe(EEhh) \cdot \cos(a1 \cdot k2hh(EEhh)) \cdot e^{-\text{kapahh}(EEhh) \cdot (z-a1)} \right] & \text{if } z > a1 \\ A1hhe(EEhh) \cdot \cos(z \cdot k2hh(EEhh)) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\Psi hho(z, EEhh) := \begin{cases} \left[A1hho(EEhh) \cdot \sin(-a1 \cdot k2hh(EEhh)) \cdot e^{\text{kapahh}(EEhh) \cdot (z+a1)} \right] & \text{if } z < -a1 \\ \left[A1hho(EEhh) \cdot \sin(a1 \cdot k2hh(EEhh)) \cdot e^{-\text{kapahh}(EEhh) \cdot (z-a1)} \right] & \text{if } z > a1 \\ A1hho(EEhh) \cdot \sin(z \cdot k2hh(EEhh)) & \text{otherwise} \end{cases}$$

Розрахунок потенціалу квантового обмеження для важкої і легкої дірки

$$P2(z) := \begin{cases} -\frac{Eg1}{2} - V2 & \text{if } z < -a1 \\ -\frac{Eg1}{2} - V2 & \text{if } z > a1 \\ -\frac{Eg1}{2} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Розрахунок власних значень енергії відносно потенціалу квантового обмеження (для зручності подальшого графічного подання)

$$Eh(E, z) := \begin{cases} -\frac{Eg1}{2} - V2 & \text{if } z < -a1 \\ -\frac{Eg1}{2} - V2 & \text{if } z > a1 \\ -E - \frac{Eg1}{2} & \text{otherwise} \end{cases}$$

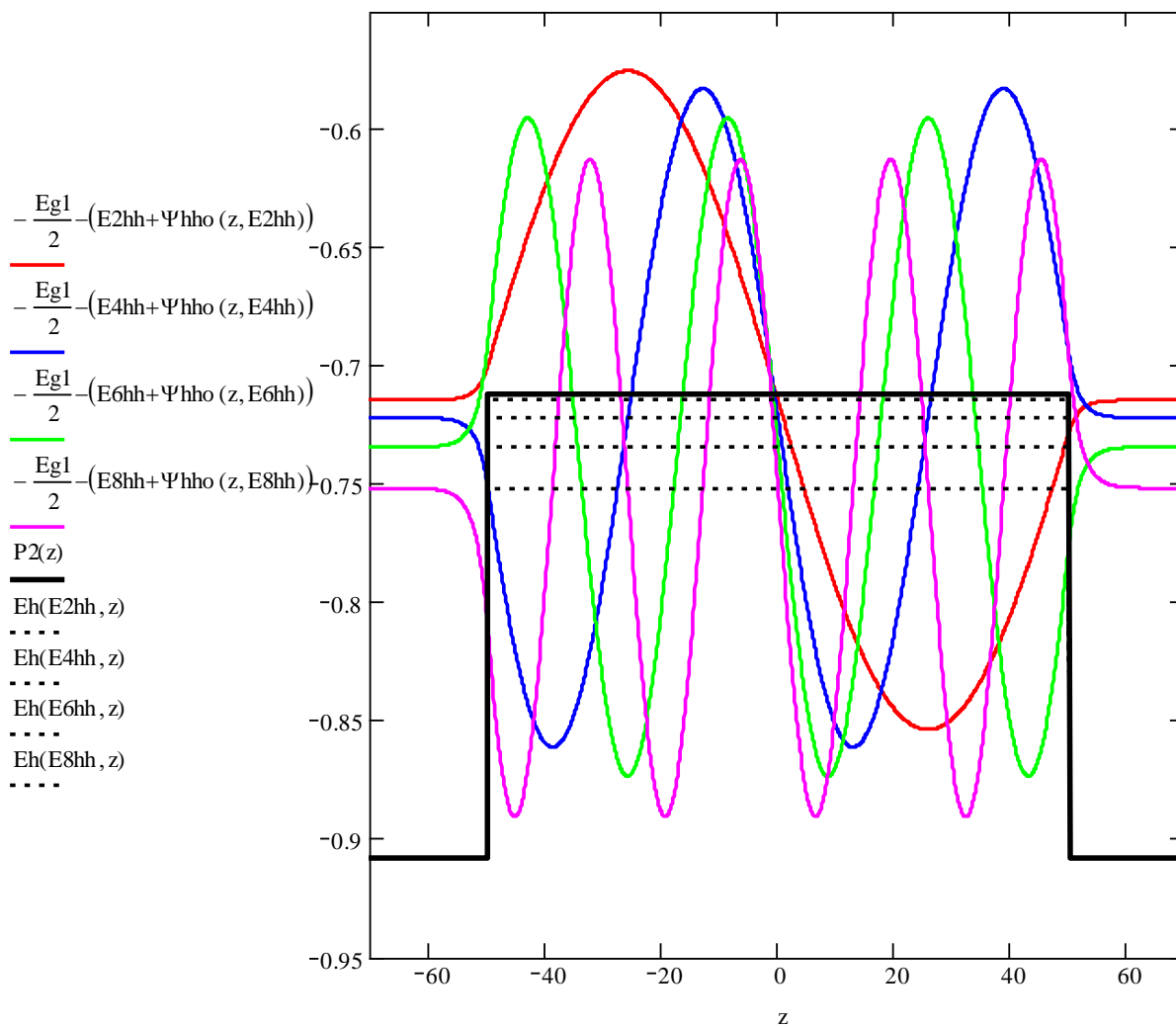


Рисунок Б.7 – Власні значення енергії і власні функції важких дірок (парні розв'язання)

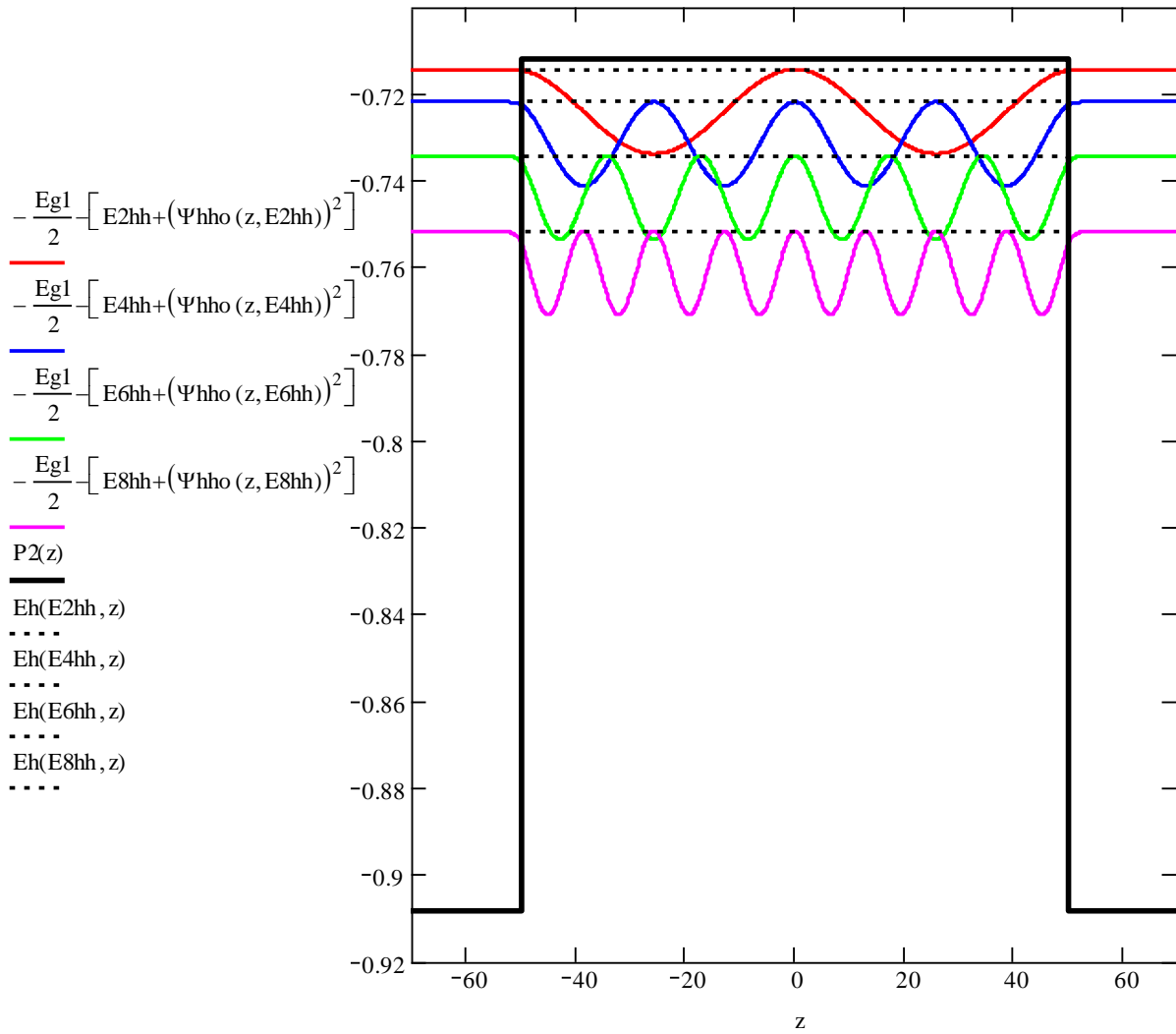


Рисунок Б.8 – Функція розподілу ймовірності в області квантового обмеження для важких дірок (парні розв’язання)

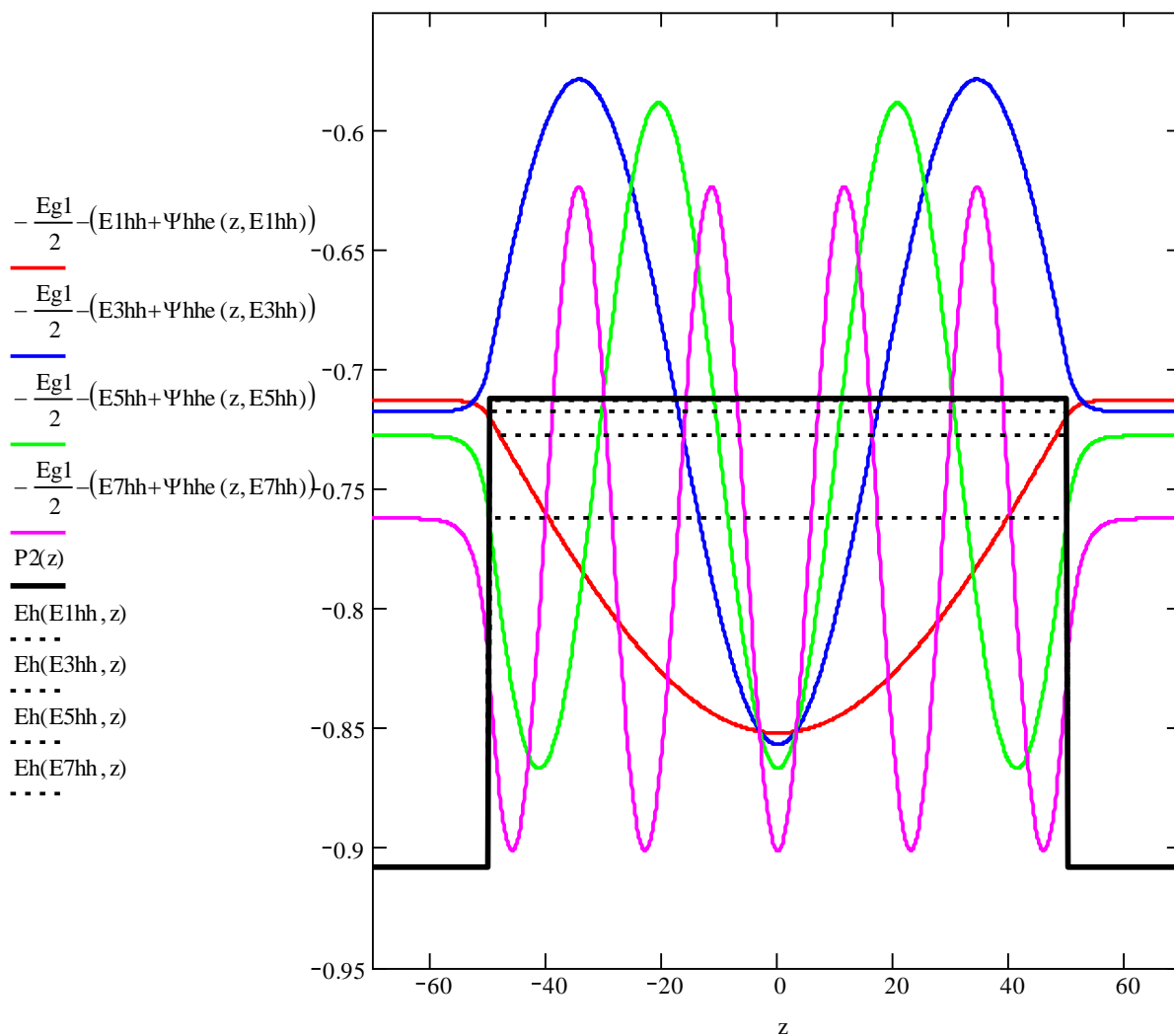


Рисунок Б.9 – Власні значення енергії і власні функції важких дірок (непарні розв'язання)

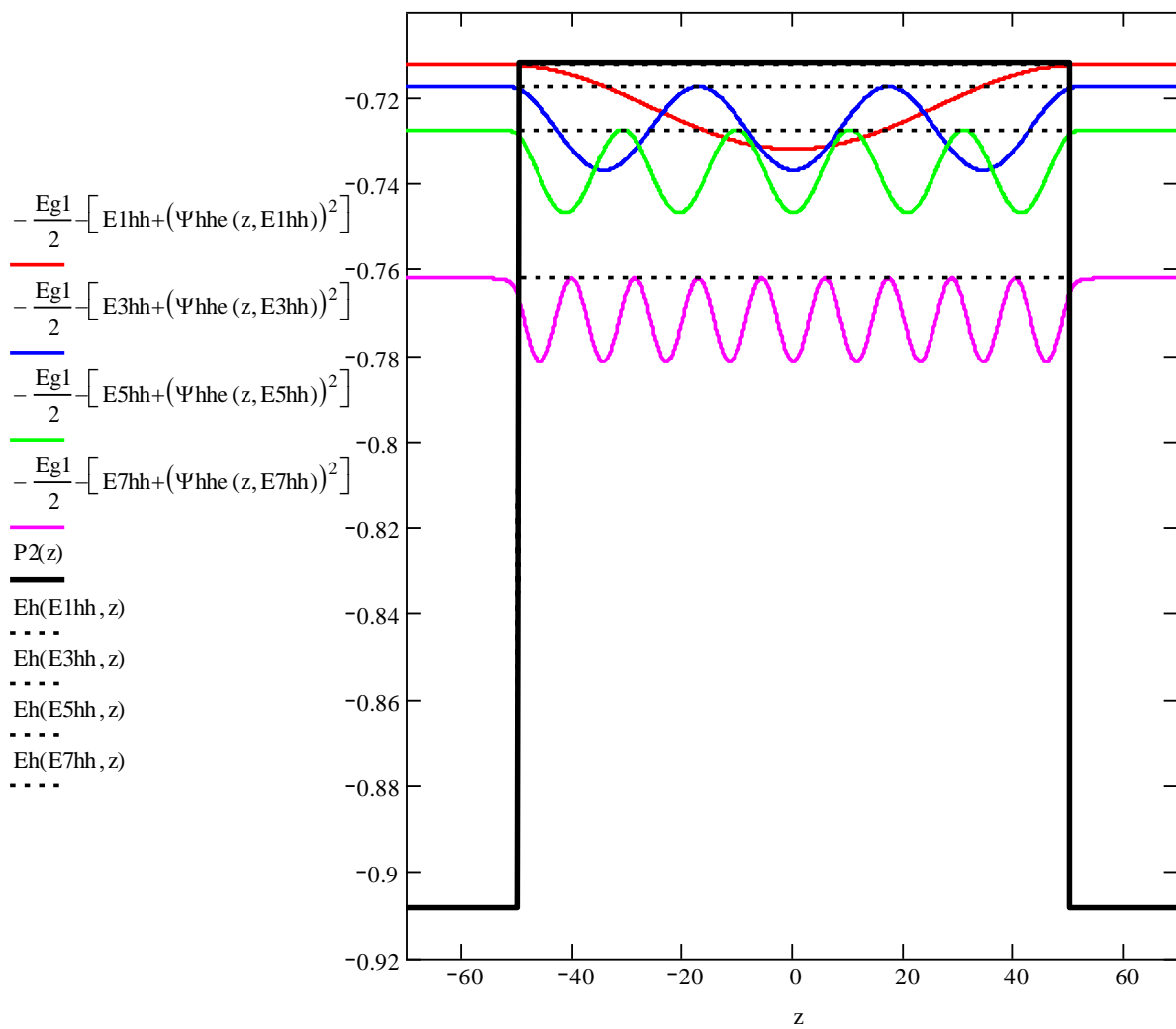


Рисунок Б.10 – Функція розподілу ймовірності в області квантового обмеження для важких дірок (непарні розв'язання)

Розв'язання для легкої дірки

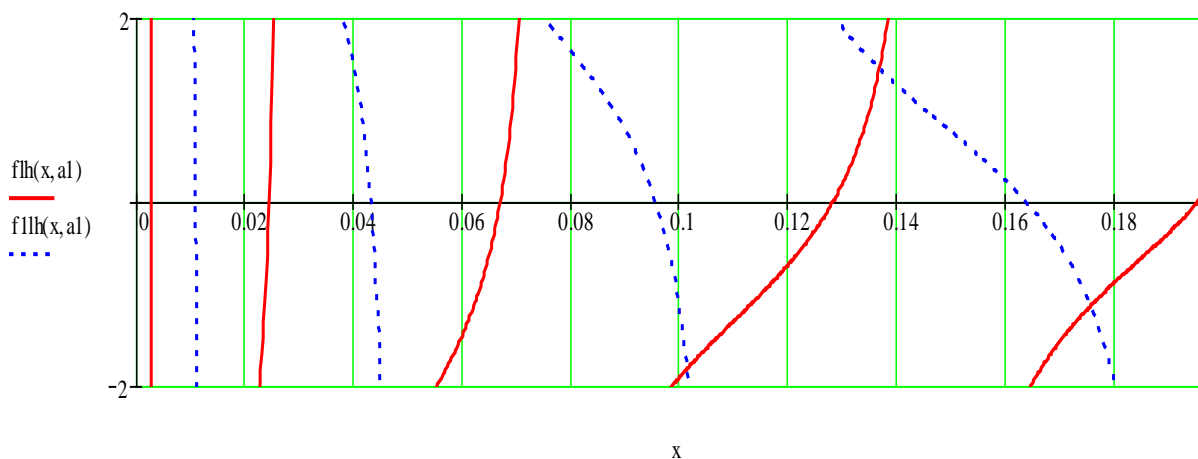


Рисунок Б.11 – Графічне розв'язання трансцендентних рівнянь щодо власних значень енергії легких дірок

Непарні розв'язання для легкої дірки (перші чотири рівні $n=1, 3, 5, 7$)

$$x1 := 0.0025$$

$$E1lh := \text{root}(f_{1h}(x1, a1), x1) \quad E1lh = 2.715 \times 10^{-3}$$

$$x1 := 0.025$$

$$E3lh := \text{root}(f_{1h}(x1, a1), x1) \quad E3lh = 0.024$$

$$x1 := 0.063$$

$$E5lh := \text{root}(f_{1h}(x1, a1), x1) \quad E5lh = 0.067$$

$$x1 := 0.13$$

$$E7lh := \text{root}(f_{1h}(x1, a1), x1) \quad E7lh = 0.128$$

Парні розв'язання для легкої дірки (перші чотири рівні $n=2, 4, 6, 8$)

$$x2 := 0.001$$

$$E2lh := \text{root}(f_{1lh}(x2, a1), x2) \quad E2lh = 0.011$$

$$x2 := 0.04$$

$$E4lh := \text{root}(f_{1lh}(x2, a1), x2) \quad E4lh = 0.043$$

$$x2 := 0.09$$

$$E6lh := \text{root}(f_{1lh}(x2, a1), x2) \quad E6lh = 0.096$$

$$x2 := 0.17$$

$$E8lh := \text{root}(f_{1lh}(x2, a1), x2) \quad E8lh = 0.164$$

Розрахунок коефіцієнтів розкладення хвильових функцій легких дірок

$$A1he(EElh) := \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{k2lh(EElh)} \cdot (k2lh(EElh) \cdot a1 + \sin(k2lh(EElh) \cdot a1) \cdot \cos(k2lh(EElh) \cdot a1)) + \frac{1}{kapalh(EElh)} \cdot (\cos(k2lh(EElh) \cdot a1))^2}}$$

$$A1ho(EElh) := \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{k2lh(EElh)} \cdot (k2lh(EElh) \cdot a1 - \sin(k2lh(EElh) \cdot a1) \cdot \cos(k2lh(EElh) \cdot a1)) + \frac{1}{kapalh(EElh)} \cdot (\sin(k2lh(EElh) \cdot a1))^2}}$$

Розрахунок власних (хвильових) функцій для легких дірок, парних і непарних

$$\Psi1he(z, EElh) := \begin{cases} \left[A1he(EElh) \cdot \cos(-a1 \cdot k2lh(EElh)) \cdot e^{kapalh(EElh) \cdot (z+a1)} \right] & \text{if } z < -a1 \\ \left[A1he(EElh) \cdot \cos(a1 \cdot k2lh(EElh)) \cdot e^{-kapalh(EElh) \cdot (z-a1)} \right] & \text{if } z > a1 \\ A1he(EElh) \cdot \cos(z \cdot k2lh(EElh)) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\Psi1ho(z, EElh) := \begin{cases} \left[A1ho(EElh) \cdot \sin[(-a1) \cdot k2lh(EElh)] \cdot e^{kapalh(EElh) \cdot (z+a1)} \right] & \text{if } z < -a1 \\ \left[A1ho(EElh) \cdot \sin[(a1) \cdot k2lh(EElh)] \cdot e^{-kapalh(EElh) \cdot (z-a1)} \right] & \text{if } z > a1 \\ A1ho(EElh) \cdot \sin(z \cdot k2lh(EElh)) & \text{otherwise} \end{cases}$$

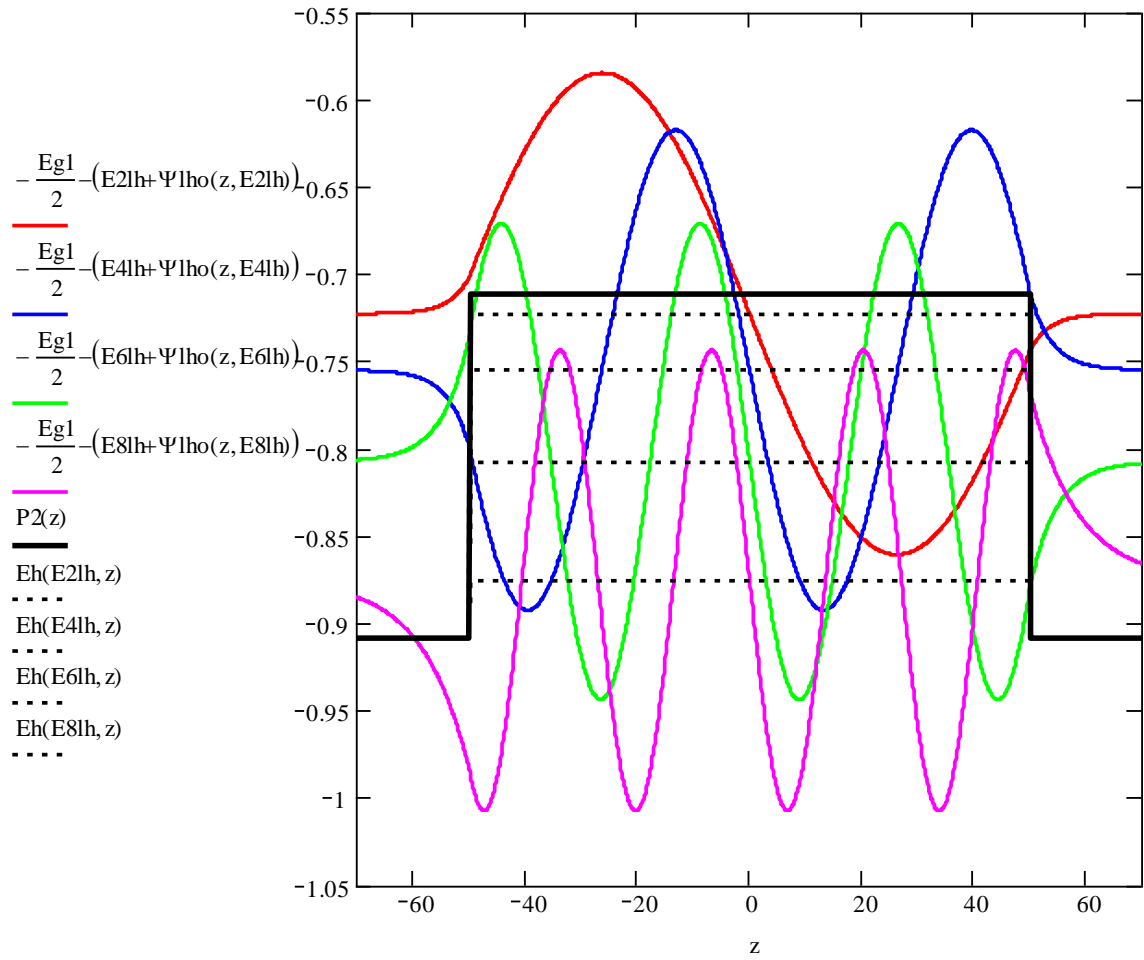


Рисунок Б.12 – Власні значення енергії і власні функції легких дірок (парні розв'язанні)

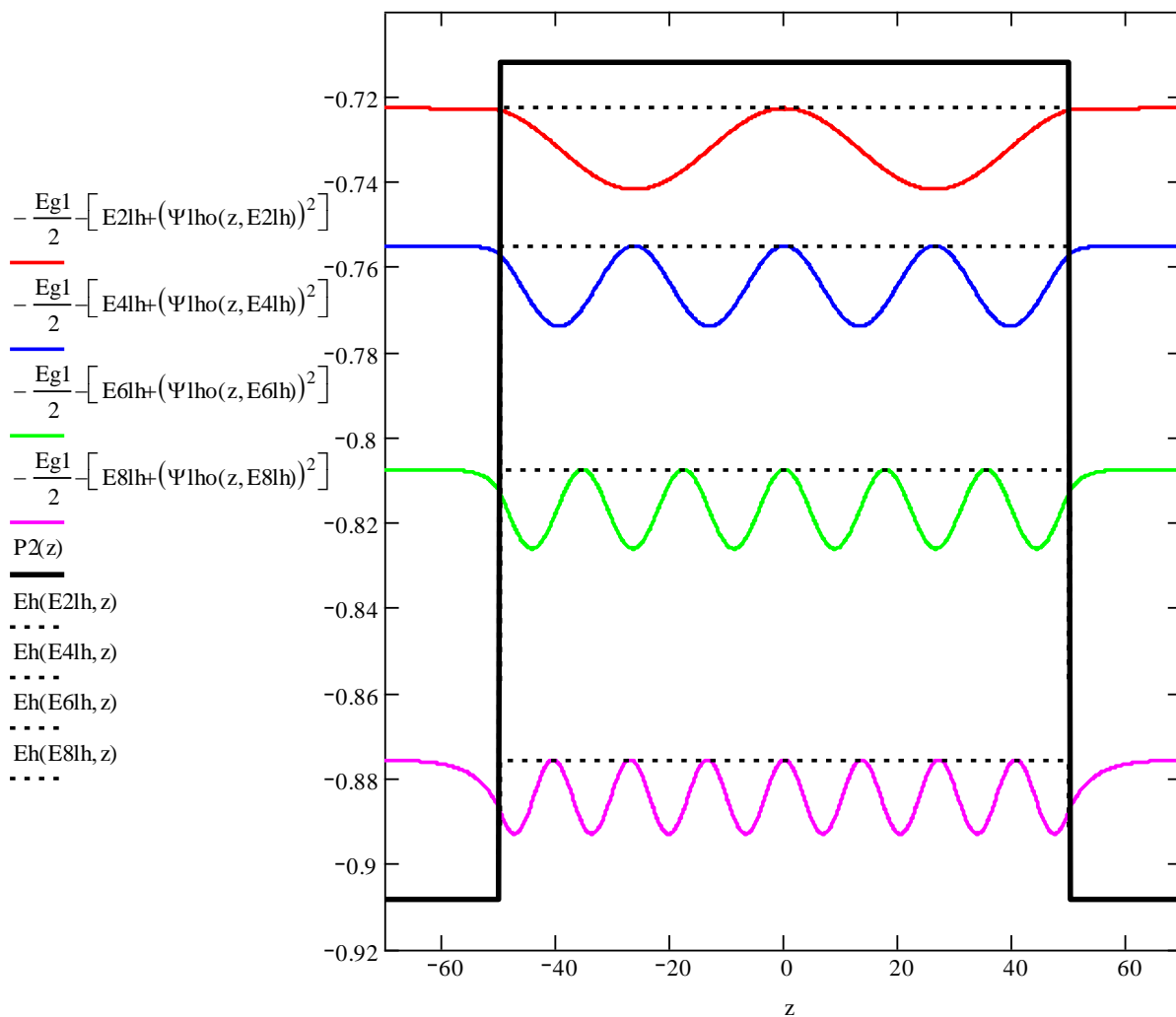


Рисунок Б.13 – Функція розподілу ймовірності в області квантового обмеження для легких дірок (парні розв'язання)

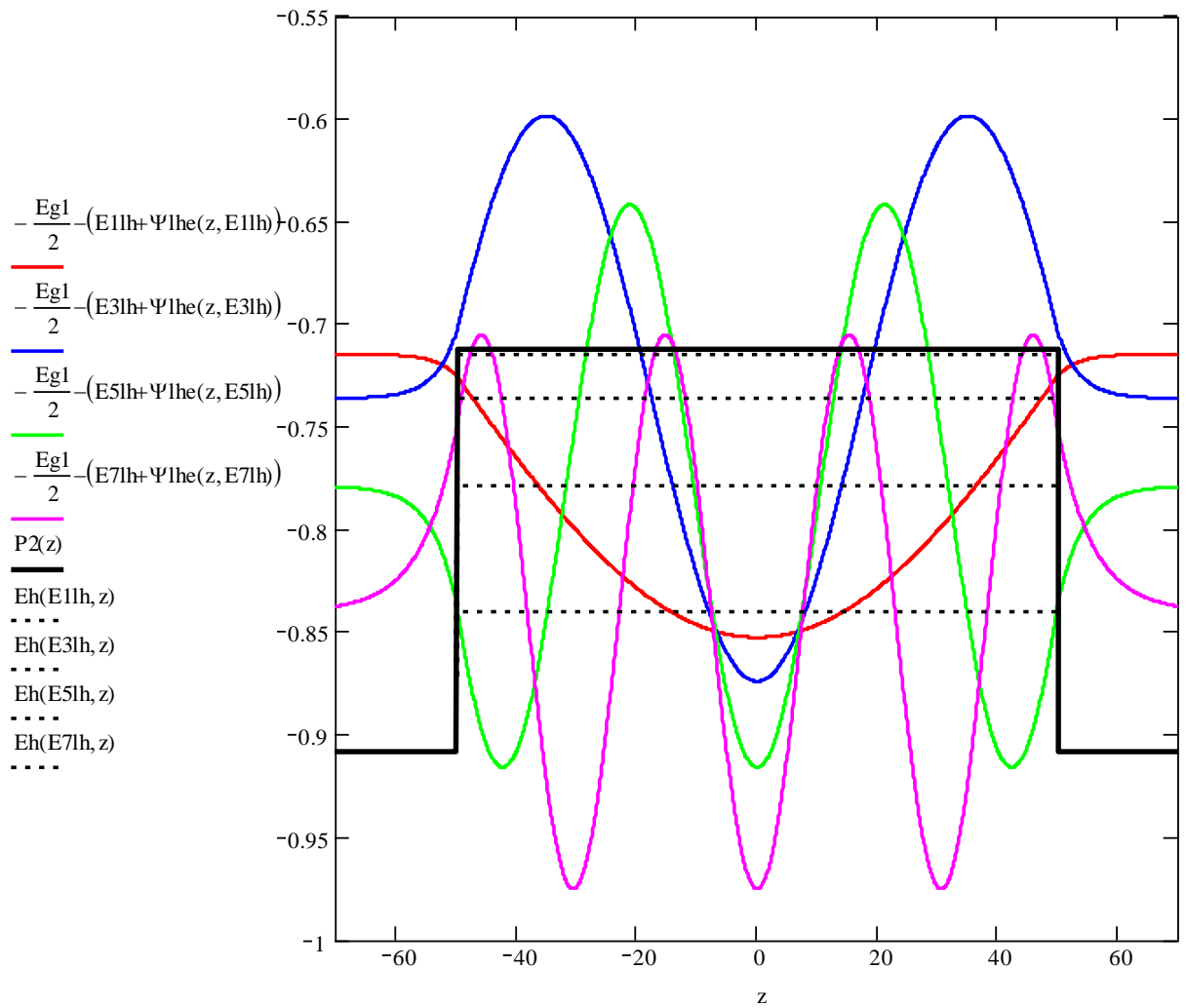


Рисунок Б.14 – Власні значення енергії і власні функції
легких дірок (непарні розв'язання)

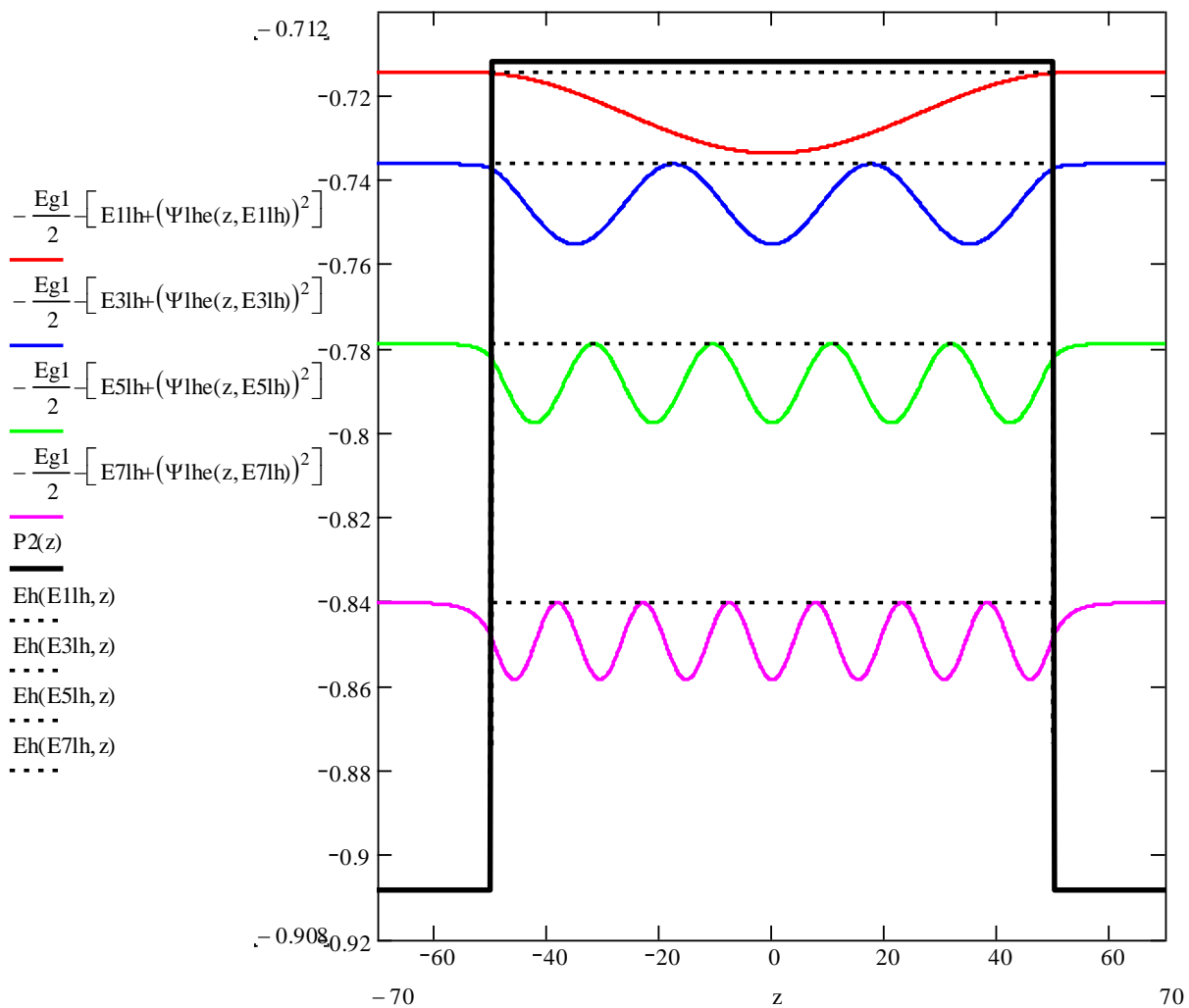


Рисунок Б.15 – Функція розподілу ймовірності в області квантового обмеження для легких дірок (непарні розв'язання)

Б.2 Власні значення енергії, власні функції і функції розподілу ймовірності для електронів, важких і легких дірок у квантоворозмірній структурі

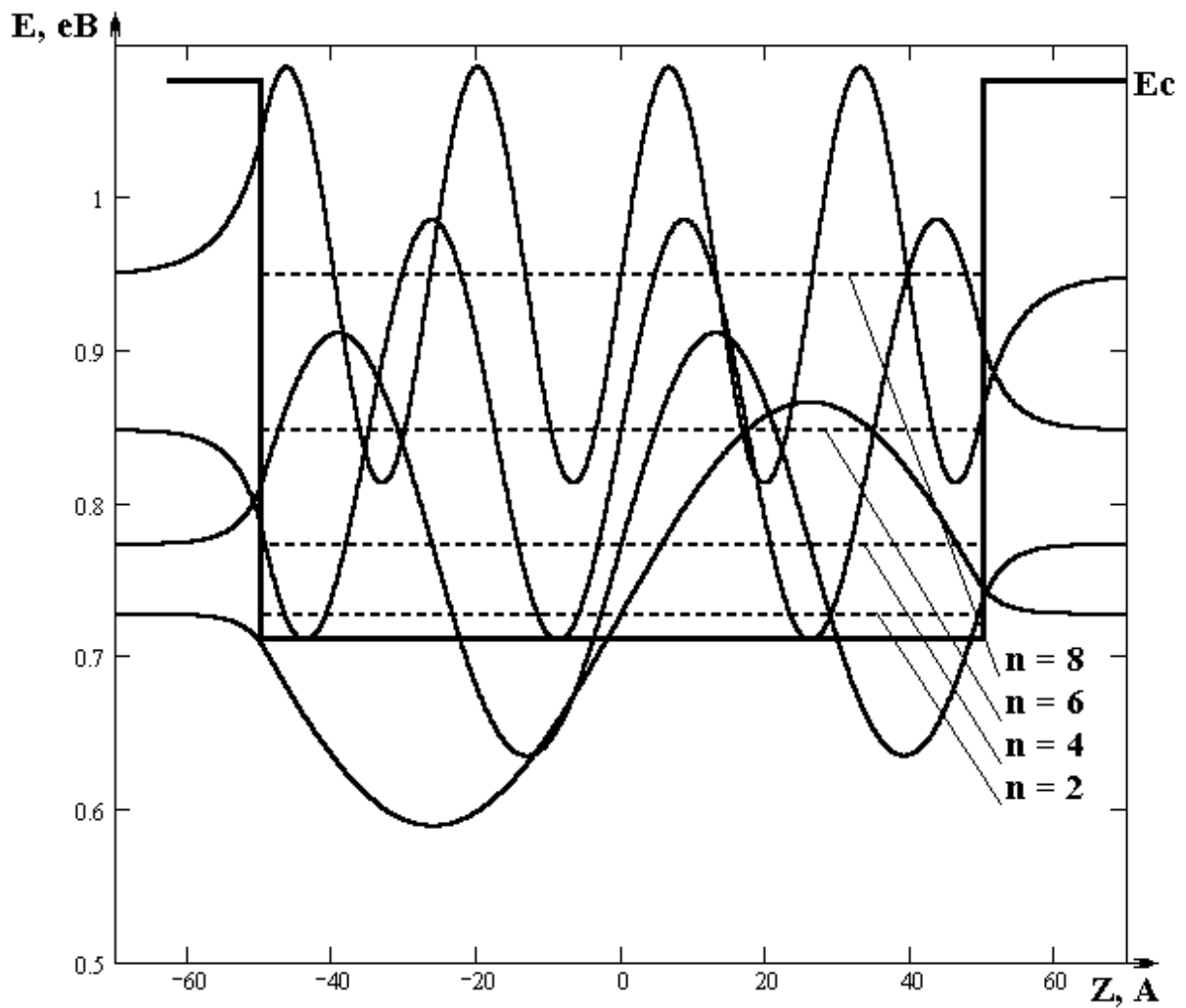


Рисунок Б.16 – Власні значення енергії і власні функції електронів (парні розв'язання)

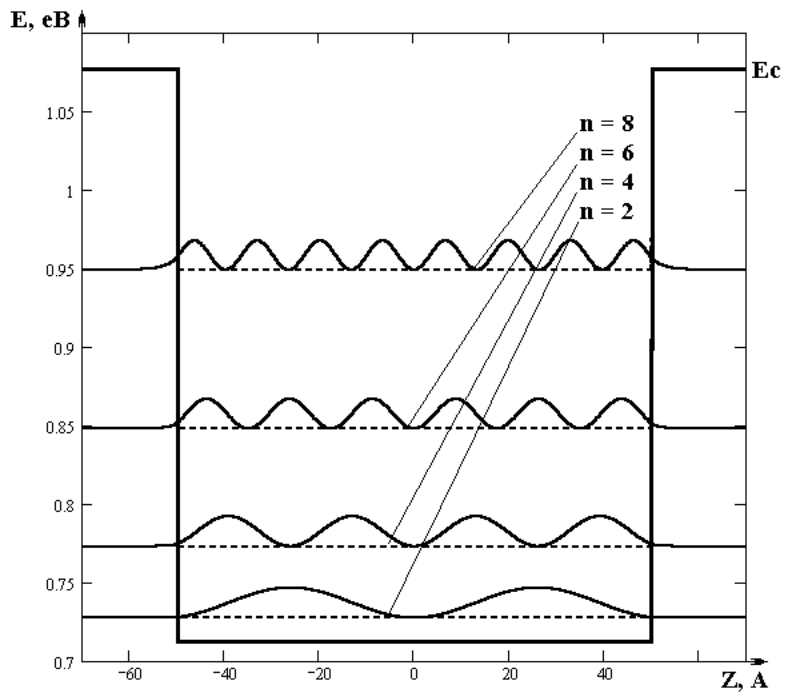


Рисунок Б.17 – Функція розподілу ймовірності в області квантового обмеження для електронів (парні розв'язання)

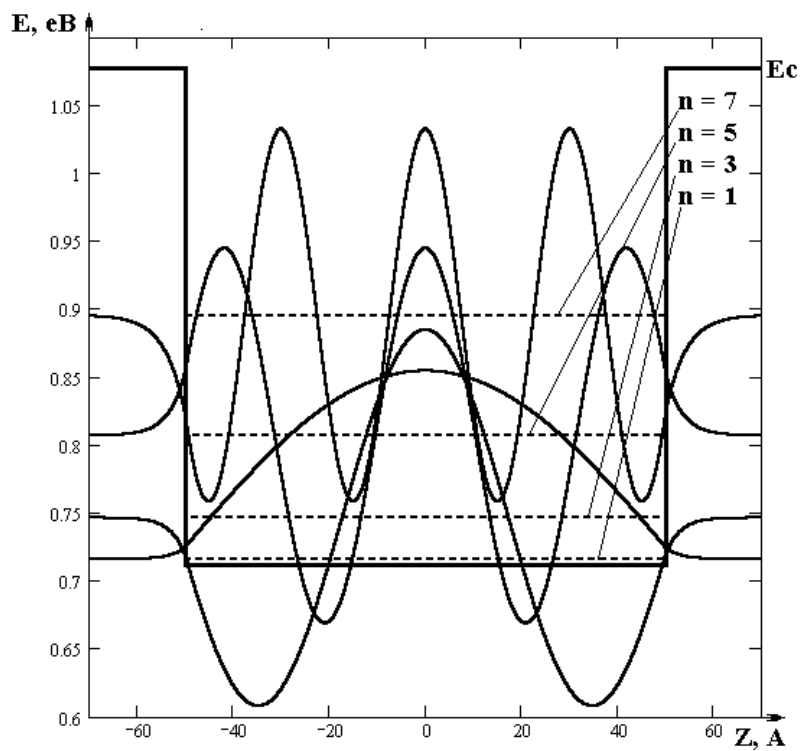


Рисунок Б.18 – Власні значення енергії і власні функції електронів (непарні розв'язання)

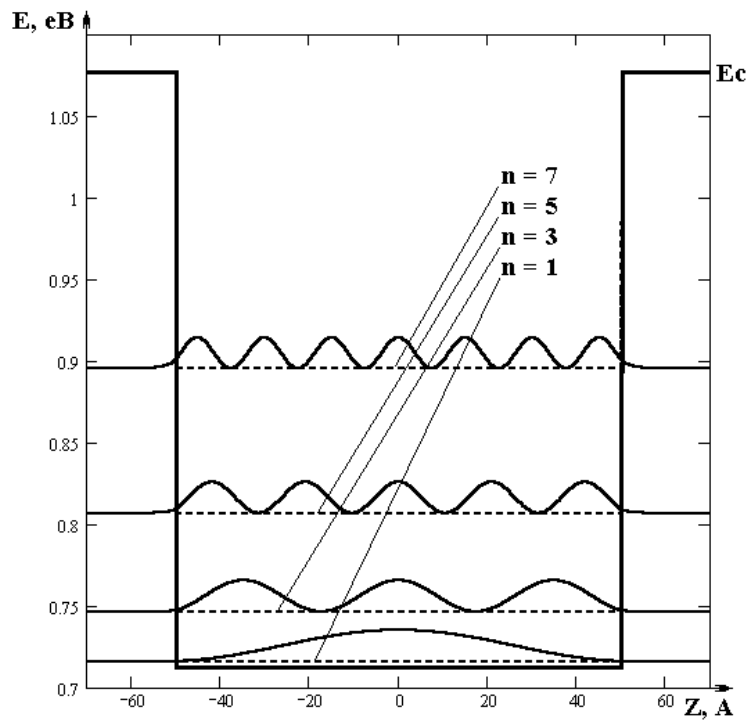


Рисунок Б.19 – Функція розподілу ймовірності в області квантового обмеження для електронів (непарні розв’язання)

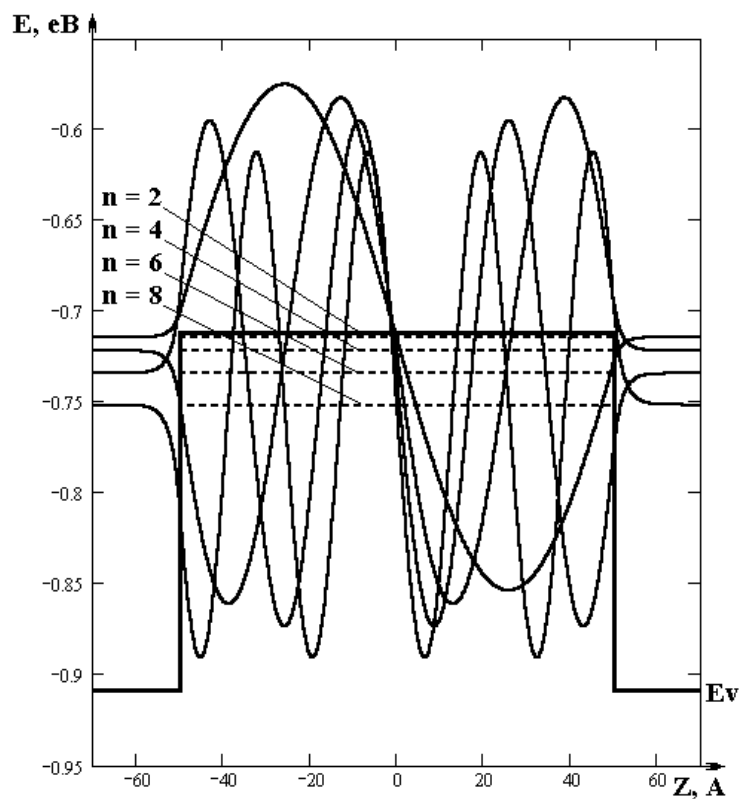


Рисунок Б.20 – Власні значення енергії і власні функції важких дірок (парні розв’язання)

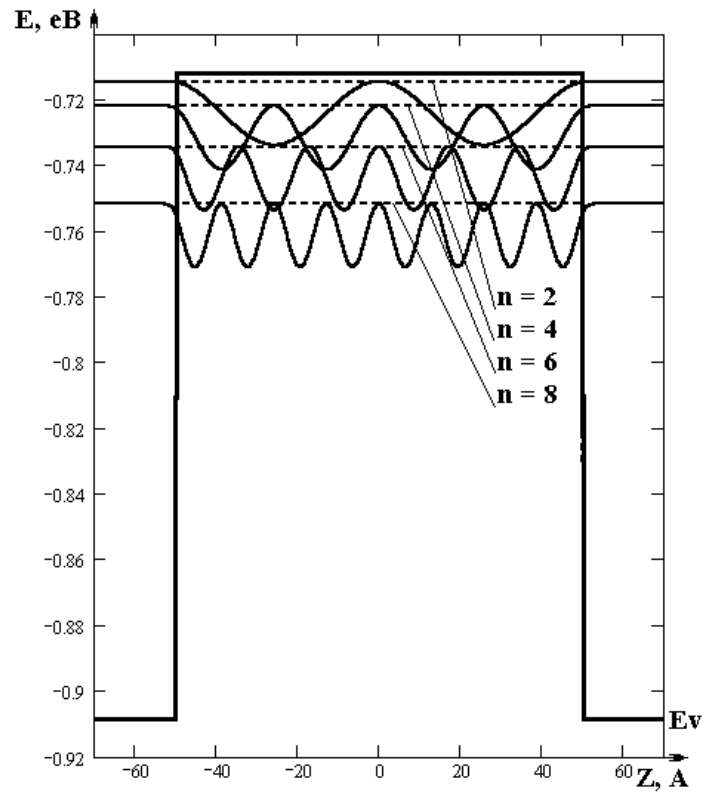


Рисунок Б.21 – Функція розподілу ймовірності в області квантового обмеження для важких дірок (парні розв'язання)

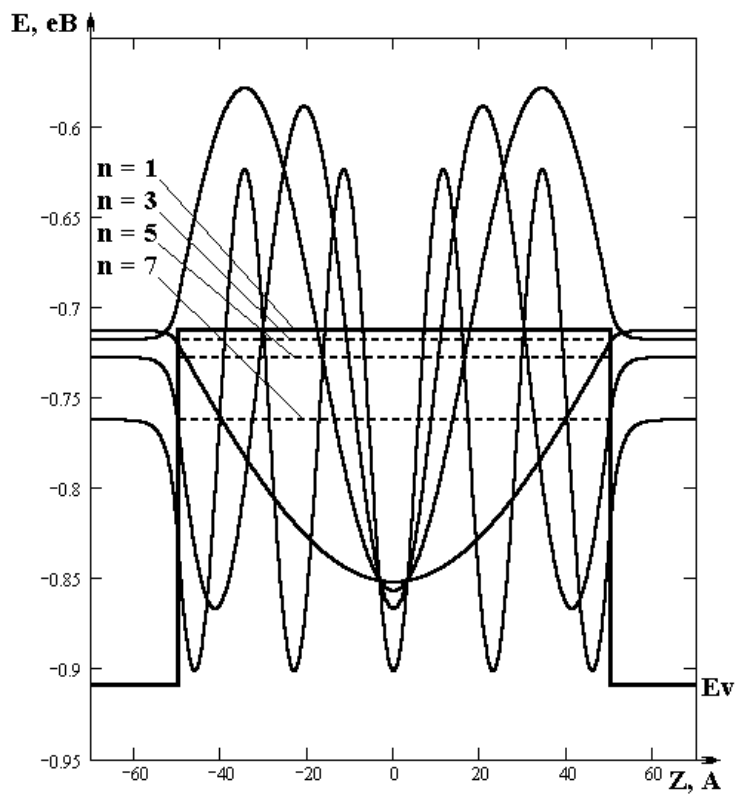


Рисунок Б.22 – Власні значення енергії і власні функції важких дірок (непарні розв'язання)

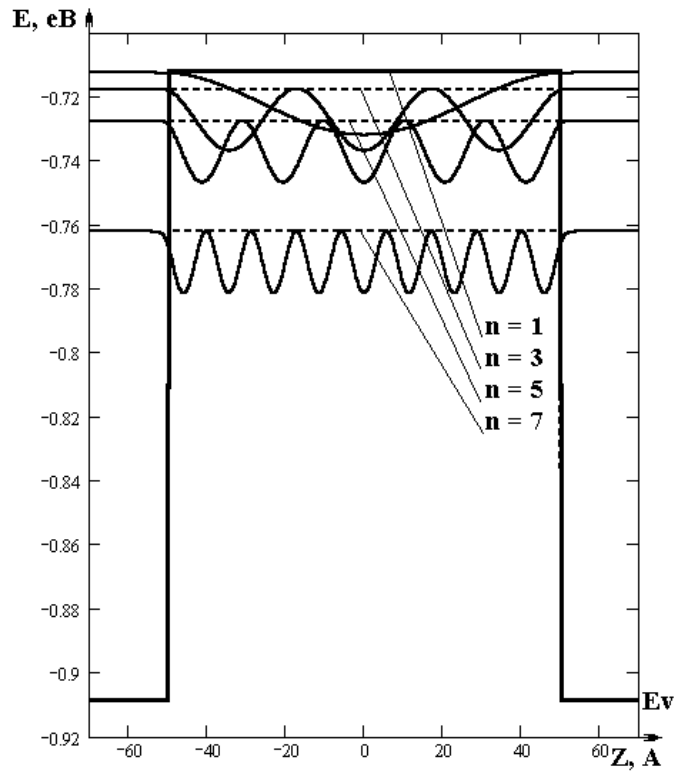


Рисунок Б.23 – Функція розподілу ймовірності в області квантового обмеження для важких дірок (непарні розв’язання)

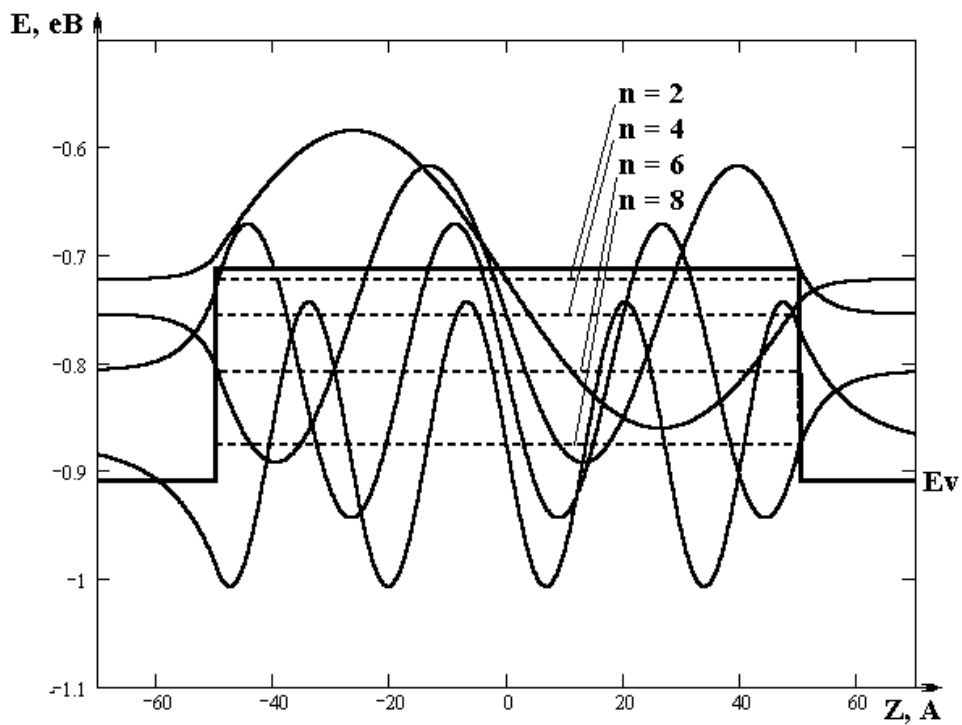


Рисунок Б.24 – Власні значення енергії і власні функції легких дірок (парні розв’язання)

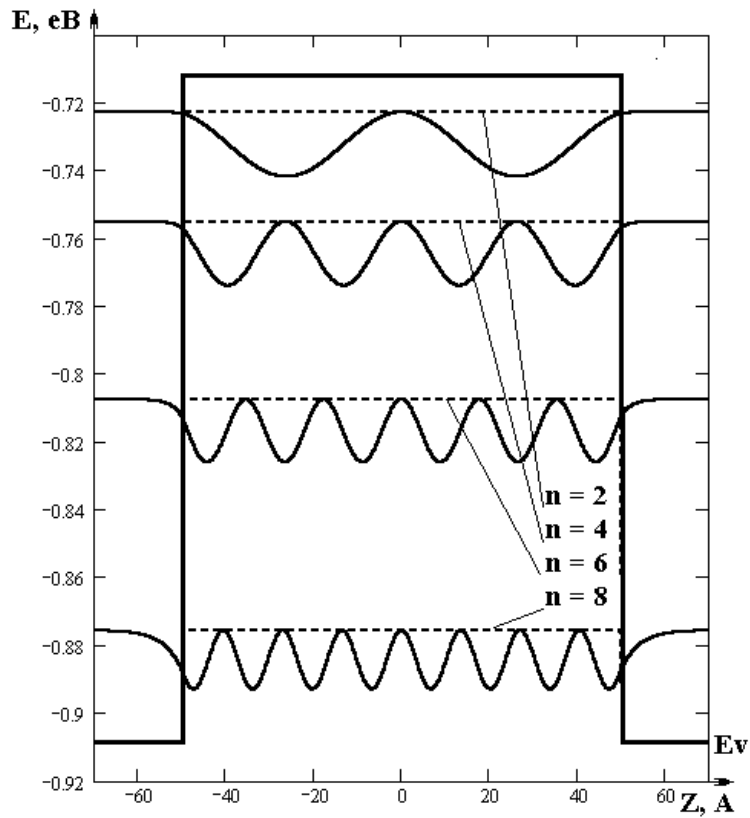


Рисунок Б.25 – Функція розподілу ймовірності в області квантового обмеження для легких дірок (парні розв’язання)

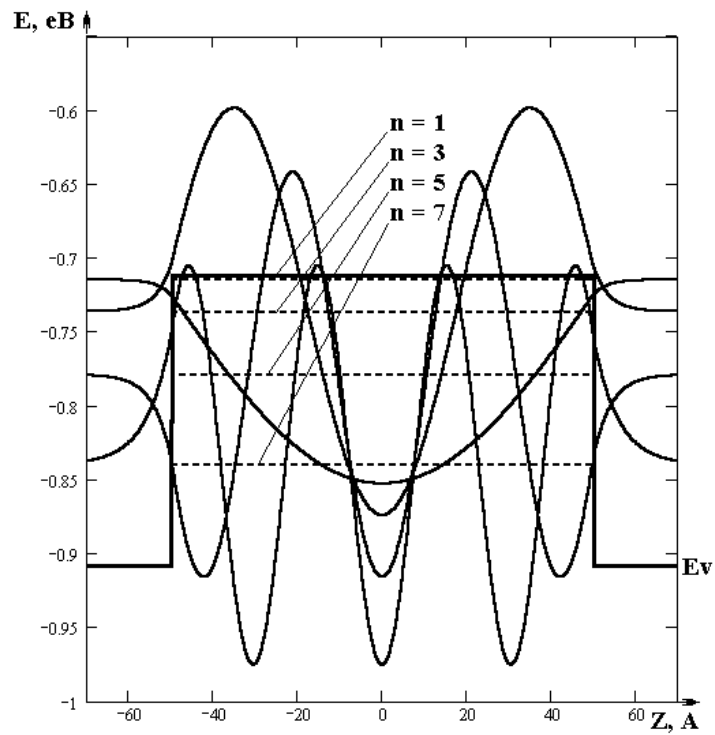


Рисунок Б.26 – Власні значення енергії і власні функції легких дірок (непарні розв’язання)

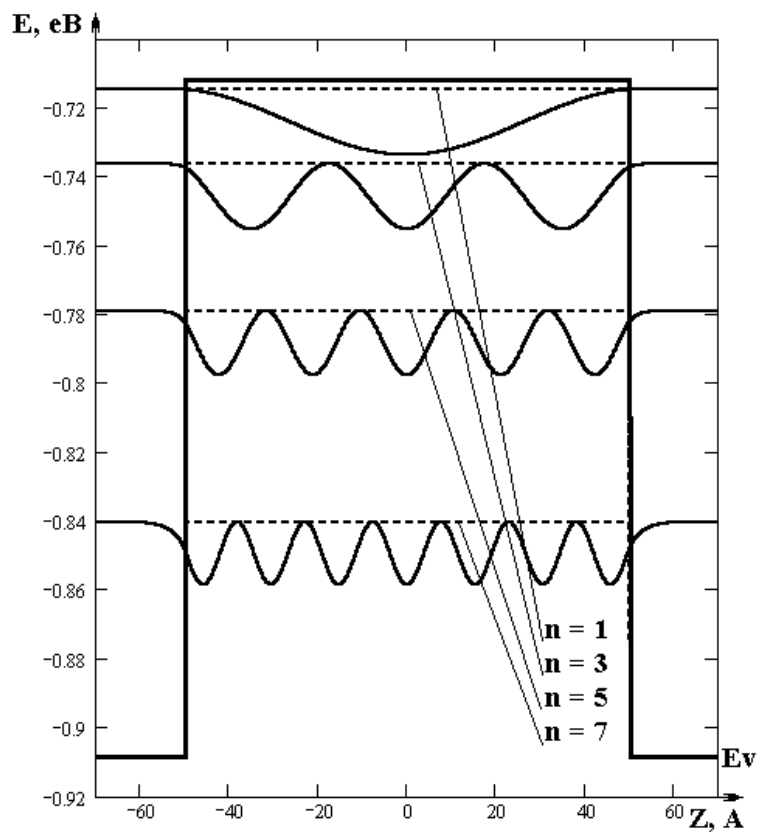


Рисунок Б.27 – Функція розподілу ймовірності в області квантового обмеження для легких дірок (непарні розв'язання)

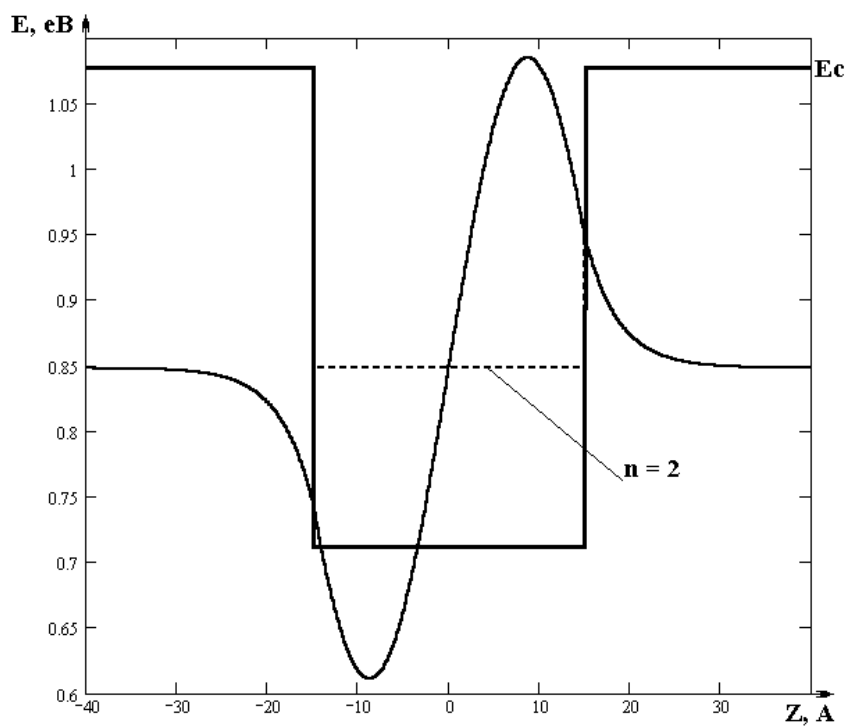


Рисунок Б.28 – Власні значення енергії і власні функції електронів (парні розв'язання)

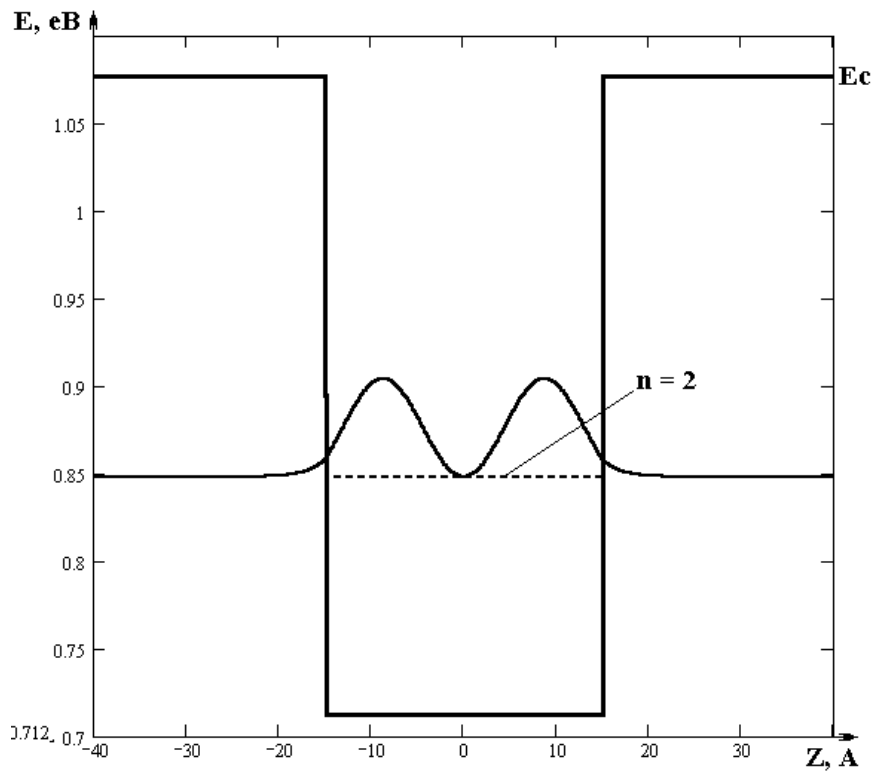


Рисунок Б.29 – Функція розподілу ймовірності в області квантового обмеження для електронів (парні розв'язання)

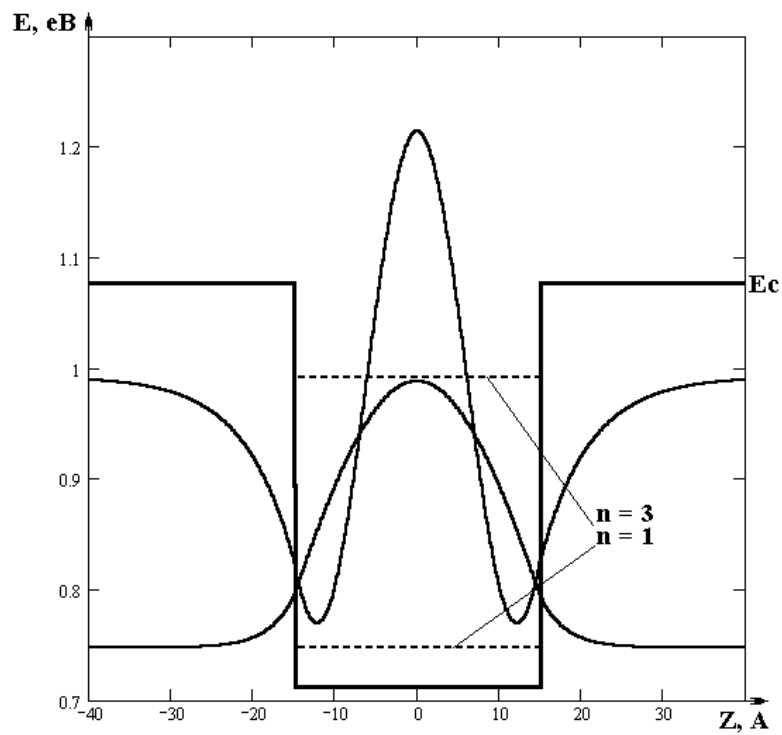


Рисунок Б.30 – Власні значення енергії і власні функції електронів (непарні розв'язання)

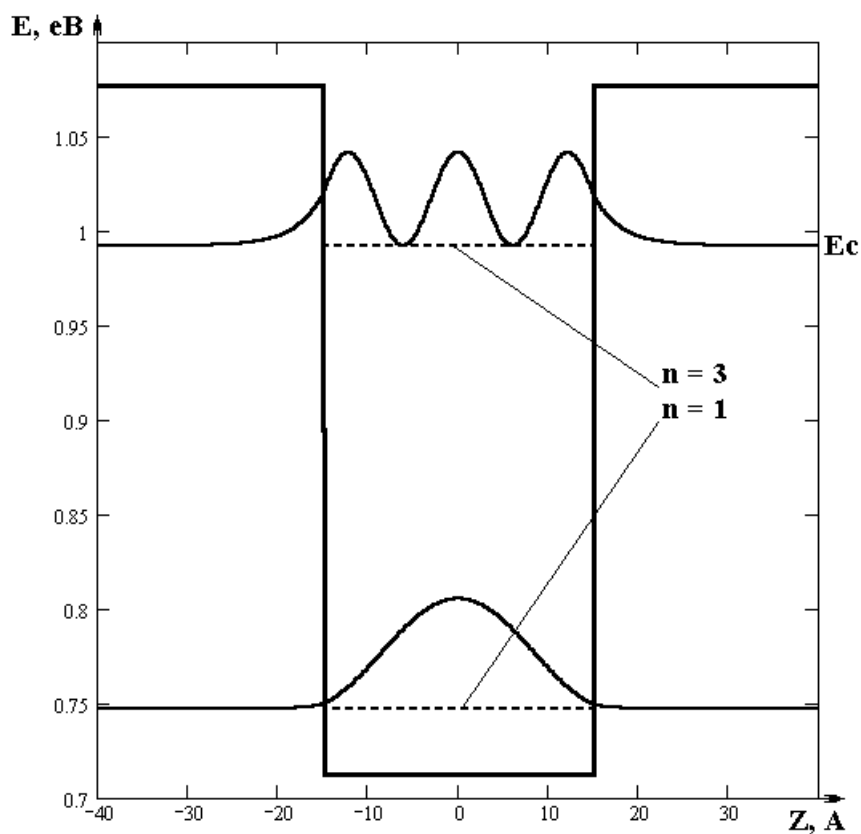


Рисунок Б.31 – Функція розподілу ймовірності в області квантового обмеження для електронів (непарні розв’язання)

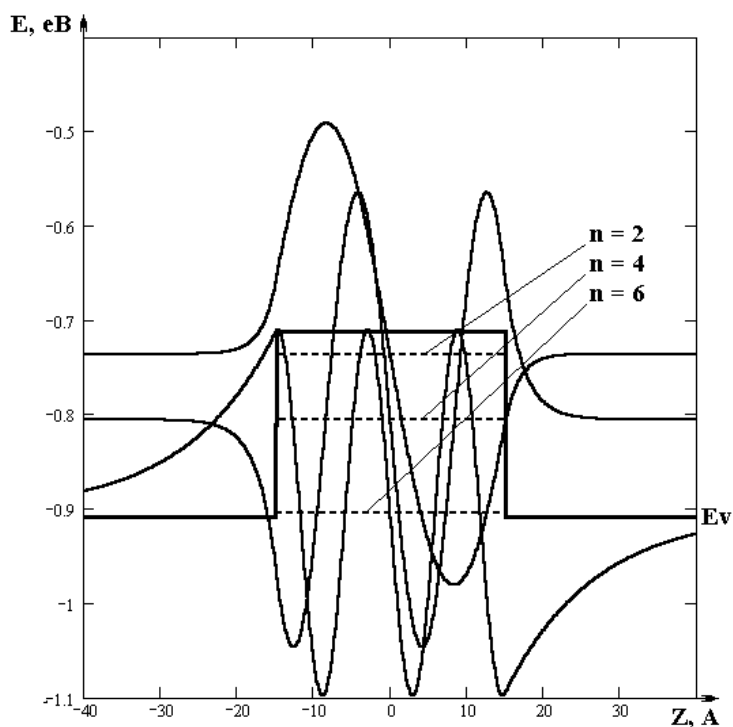


Рисунок Б.32 – Власні значення енергії і власні функції важких дірок (парні розв’язання)

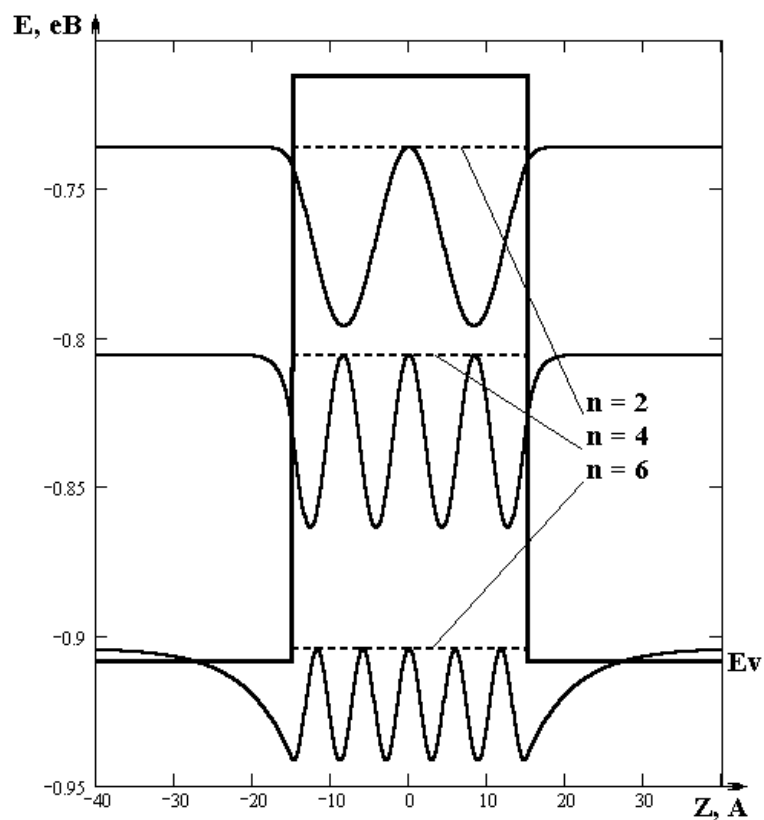


Рисунок Б.33 – Функція розподілу ймовірності в області квантового обмеження для важких дірок (парні розв’язання)

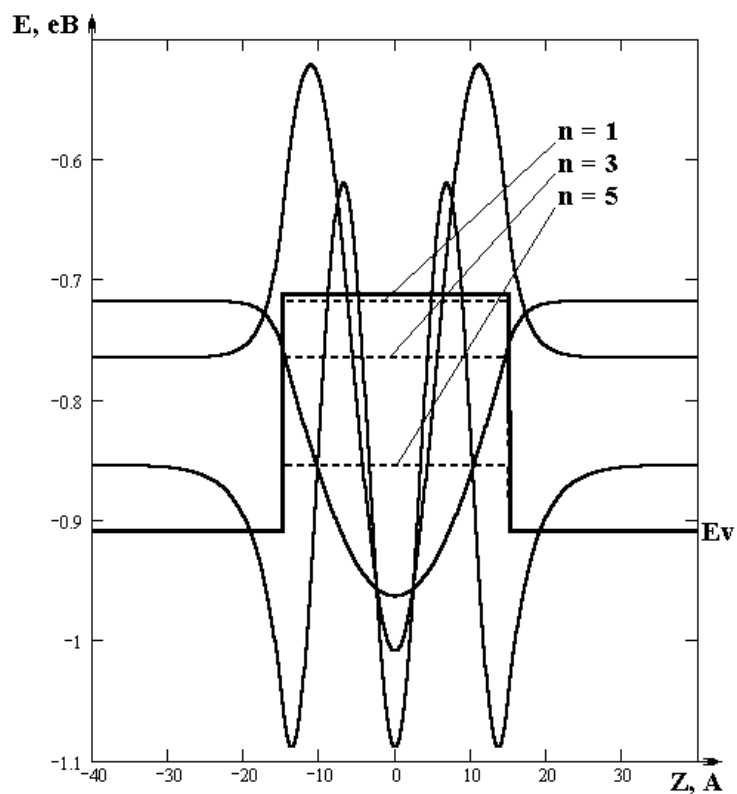


Рисунок Б.34 – Власні значення енергії і власні функції важких дірок (непарні розв’язання)

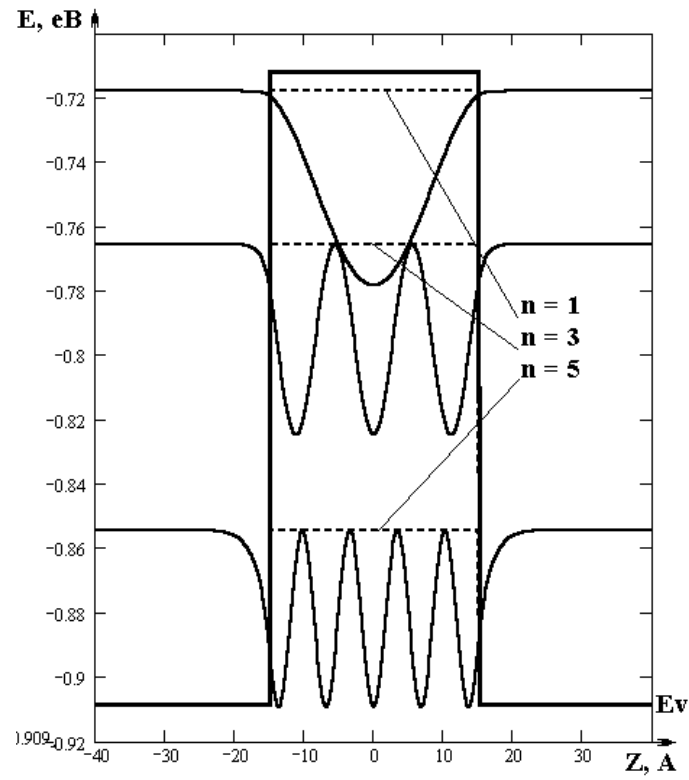


Рисунок Б.35 – Функція розподілу ймовірності в області квантового обмеження для важких дірок (непарні розв’язання)

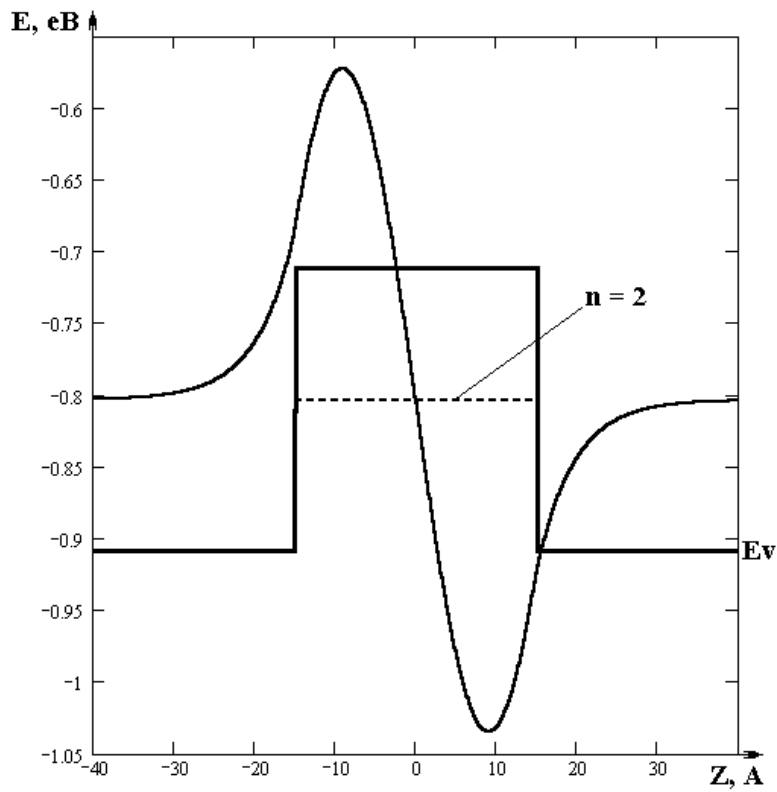


Рисунок Б.36 – Власні значення енергії і власні функції легких дірок (парні розв’язання)

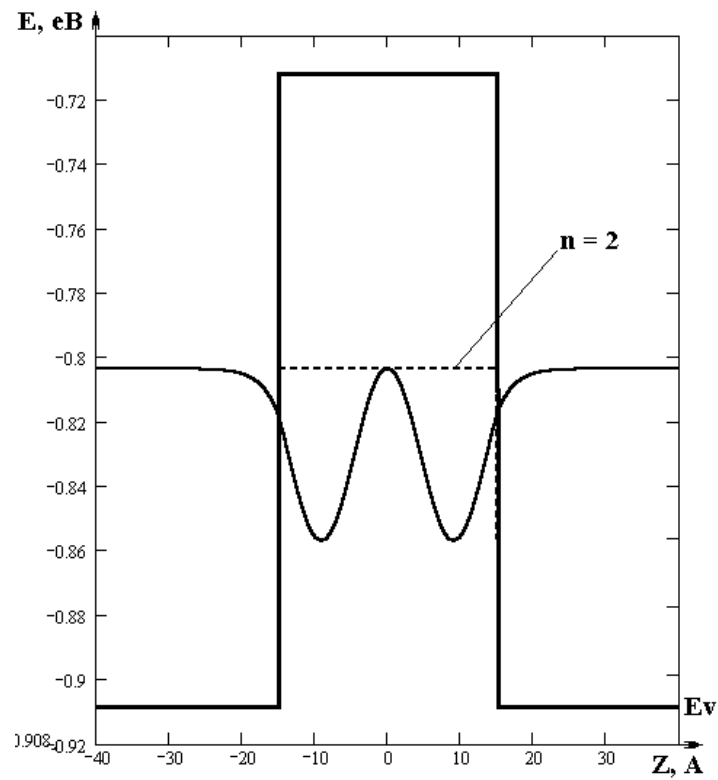


Рисунок Б.37 – Функція розподілу ймовірності в області квантового обмеження для легких дірок (парні розв'язання)

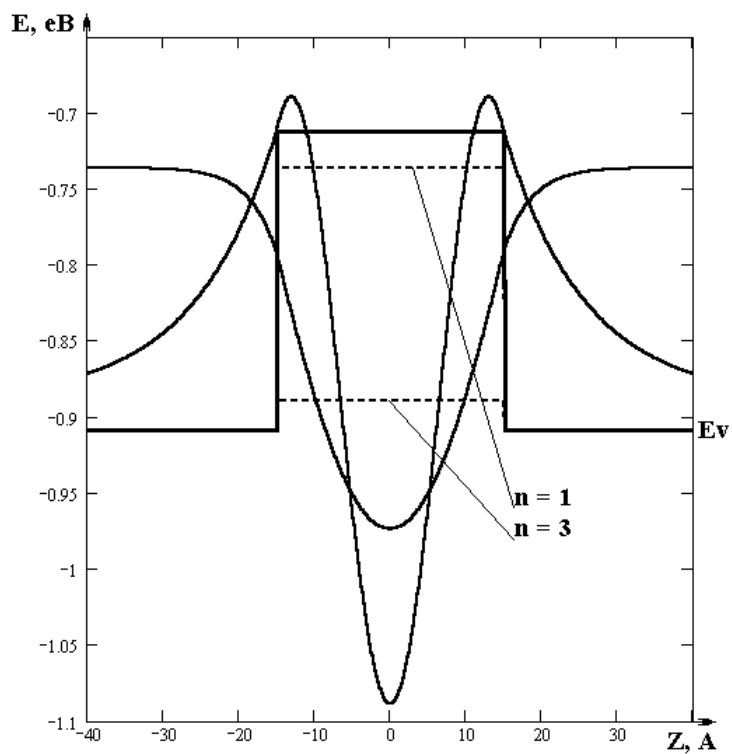


Рисунок Б.38 – Власні значення енергії і власні функції легких дірок (непарні розв'язання)

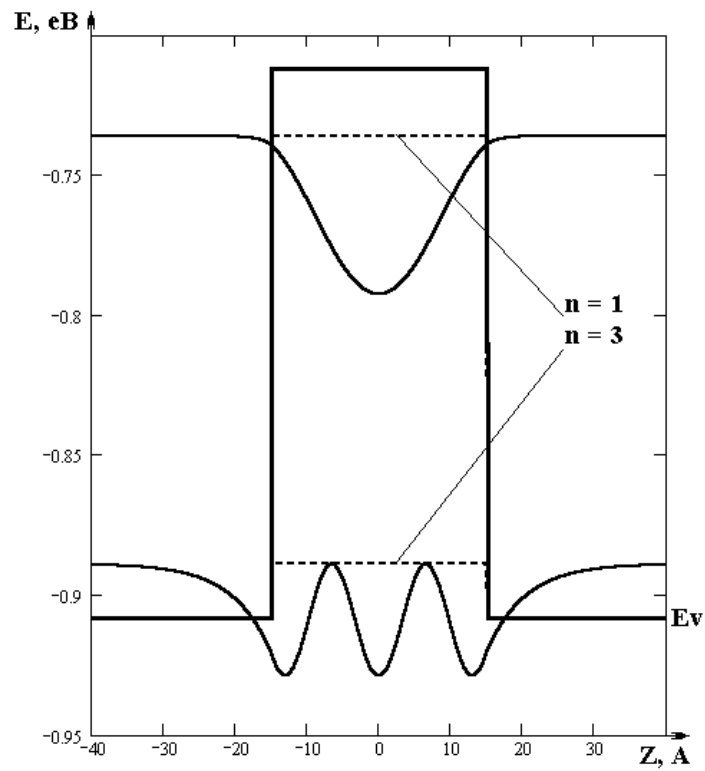


Рисунок Б.39 – Функція розподілу ймовірності в області квантового обмеження для легких дірок (непарні розв’язання)

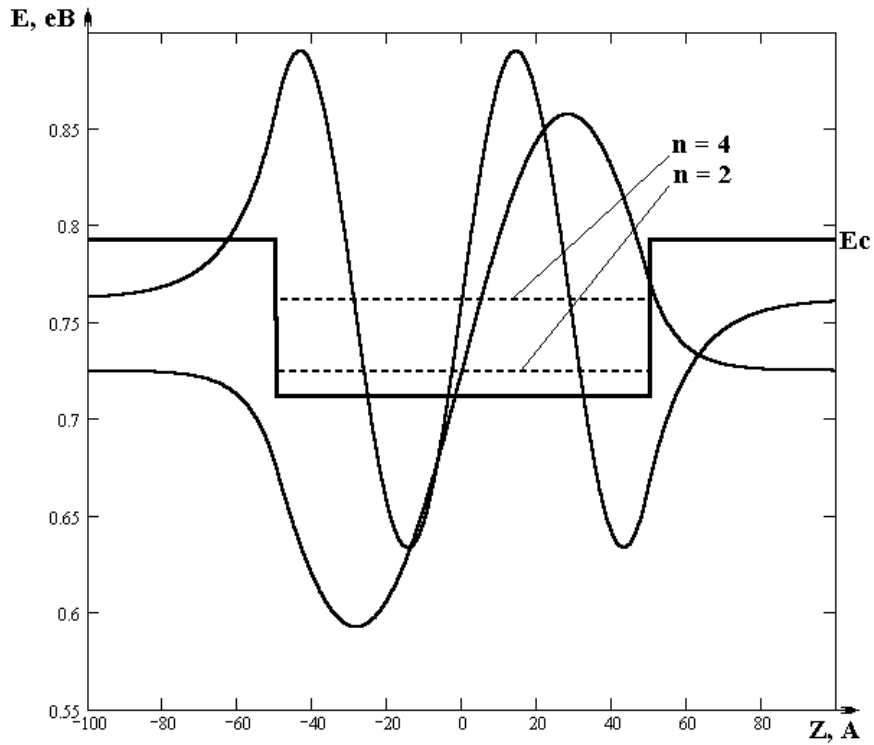


Рисунок Б.40 – Власні значення енергії і власні функції електронів (парні розв’язання)

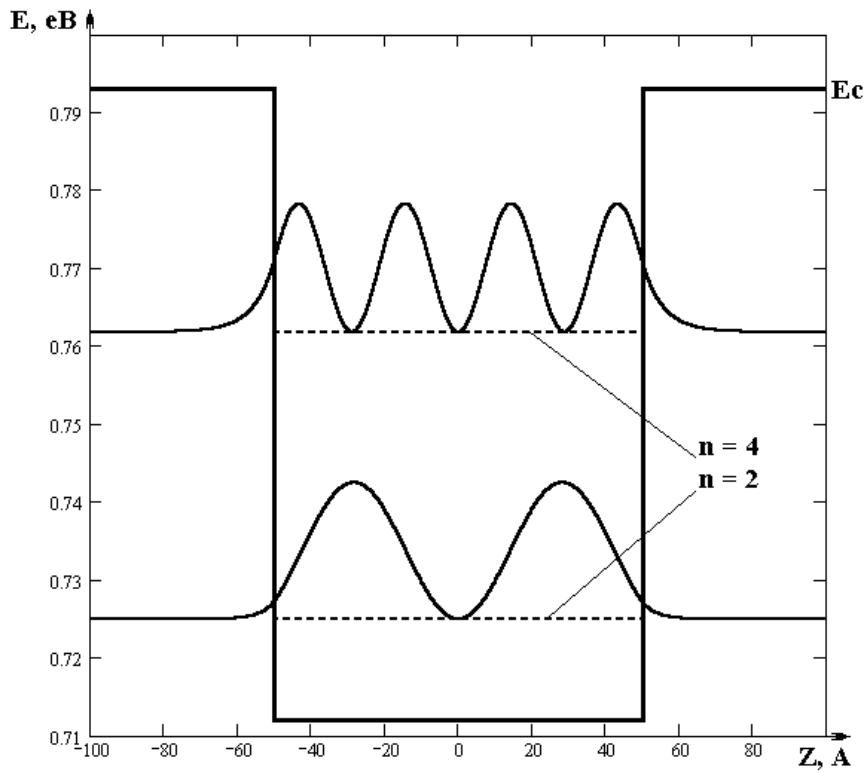


Рисунок Б.41 – Функція розподілу ймовірності в області квантового обмеження для електронів (парні розв’язання)

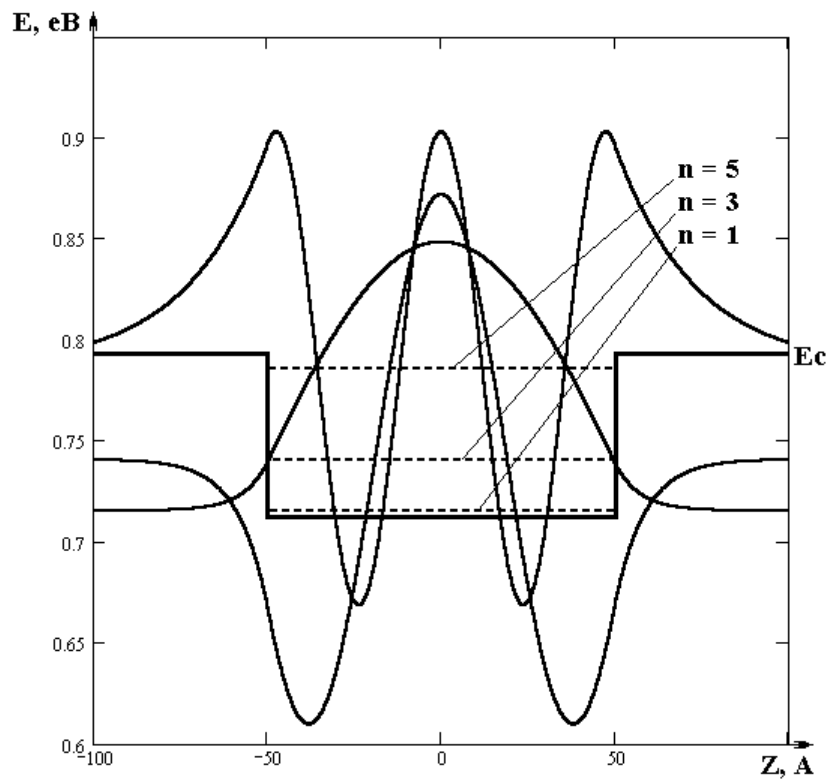


Рисунок Б.42 – Власні значення енергії і власні функції електронів (непарні розв’язання)

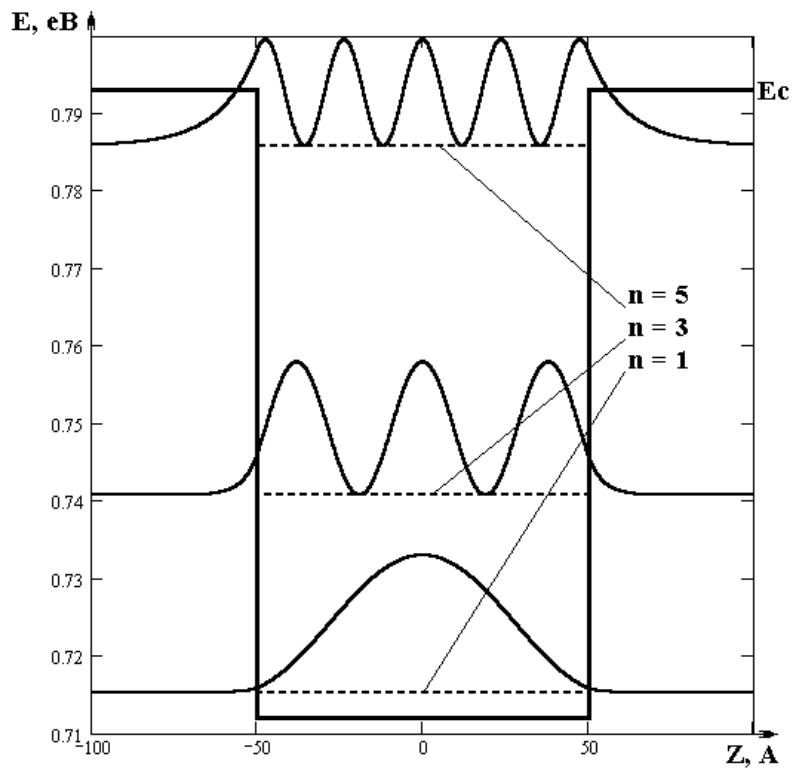


Рисунок Б.43 – Функція розподілу ймовірності в області квантового обмеження для електронів (непарні розв’язання)

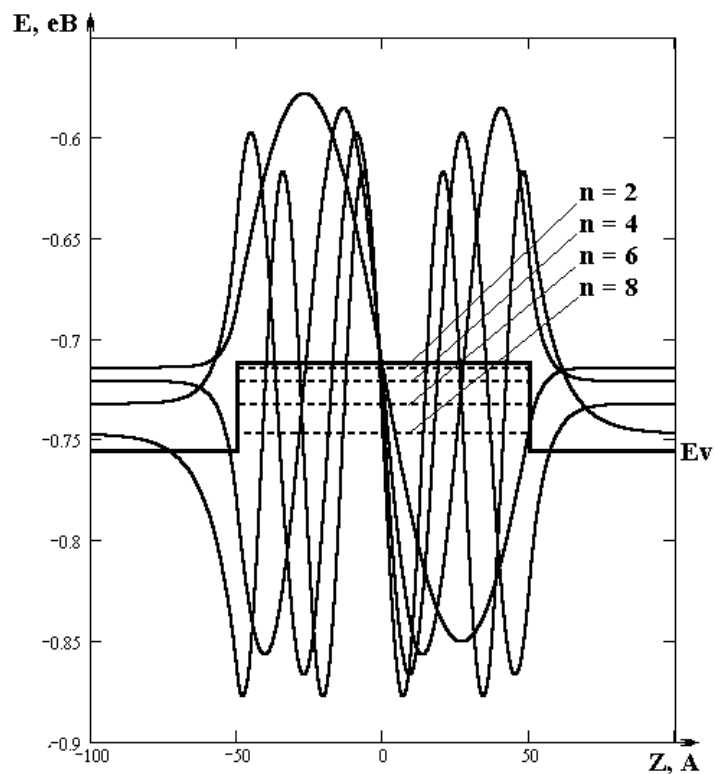


Рисунок Б.44 – Власні значення енергії і власні функції важких дірок (парні розв’язання)

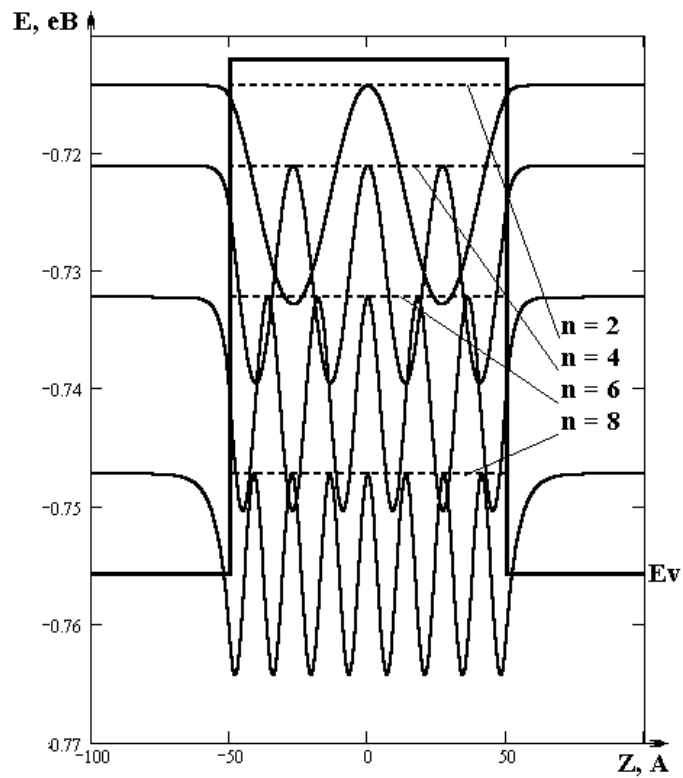


Рисунок Б.45 – Функція розподілу ймовірності в області квантового обмеження для важких дірок (парні розв'язання)

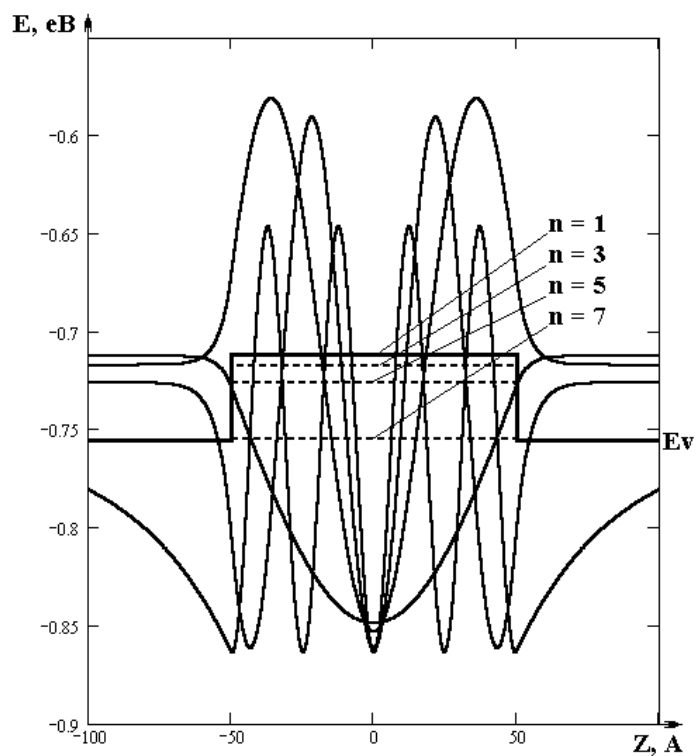


Рисунок Б.46 – Власні значення енергії і власні функції важких дірок (непарні розв'язання)

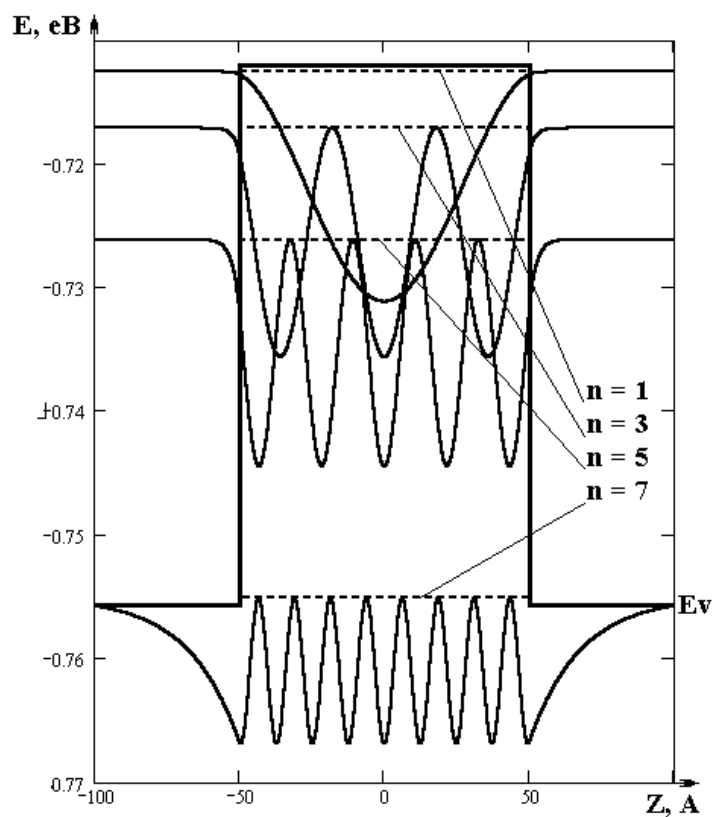


Рисунок Б.47 – Функція розподілу ймовірності в області квантового обмеження для важких дірок (непарні розв'язання)

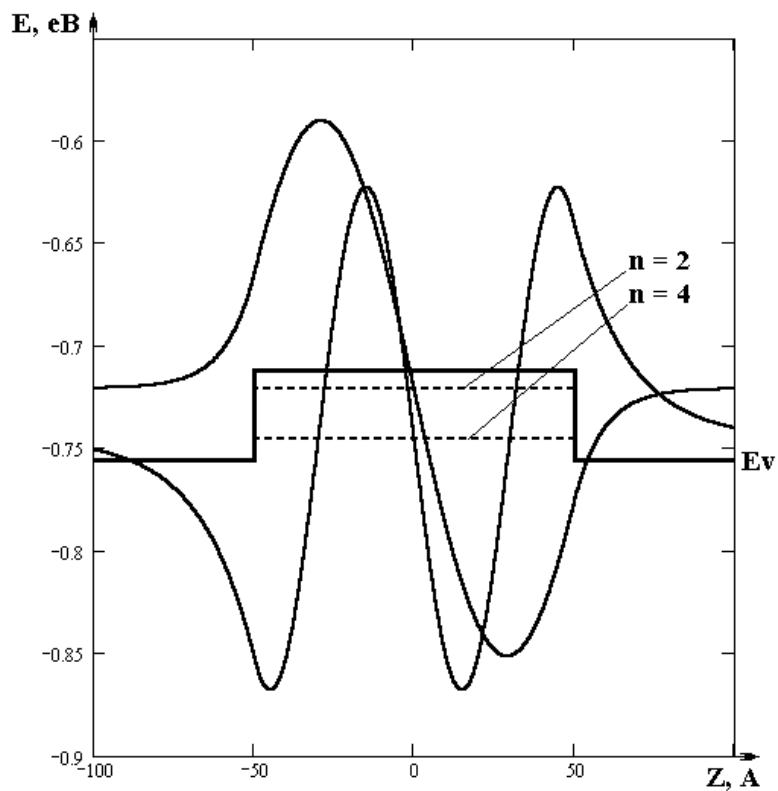


Рисунок Б.48 – Власні значення енергії і власні функції легких дірок (парні розв'язання)

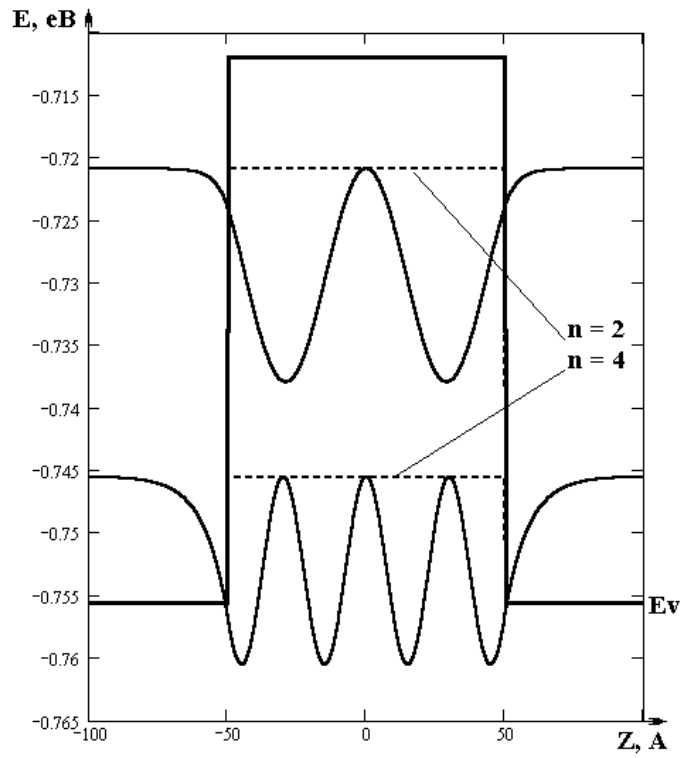


Рисунок Б.49 – Функція розподілу ймовірності в області квантового обмеження для легких дірок (парні розв’язання)

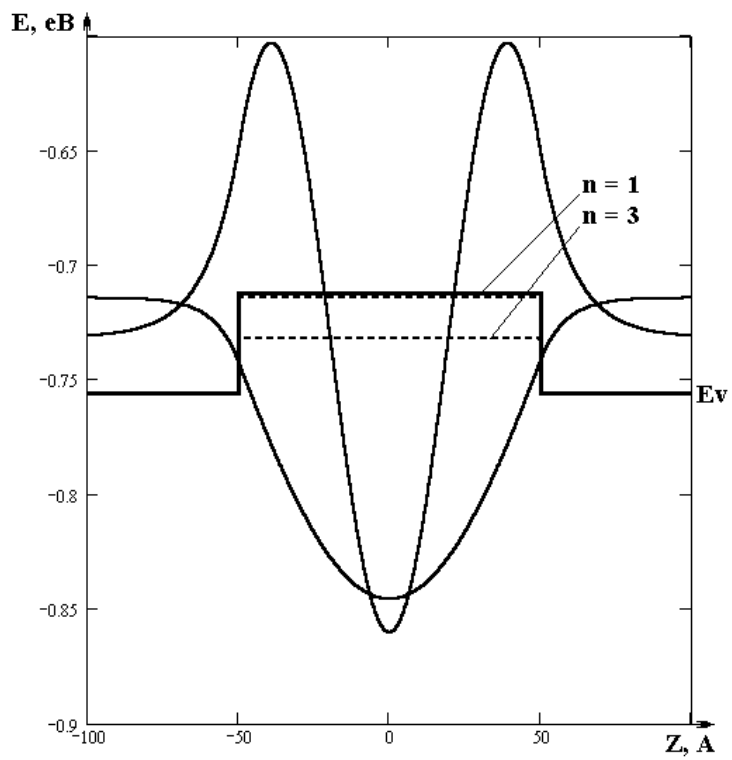


Рисунок Б.50 – Власні значення енергії і власні функції легких дірок (непарні розв’язання)



Рисунок Б.51 – Функція розподілу ймовірності в області квантового обмеження для легких дірок (непарні розв’язання)

Навчальне видання

ПАЩЕНКО Олексій Георгійович
ГАЛАТ Олександр Борисович
БАБИЧЕНКО Оксана Юріївна

НАПІВПРОВІДНИКОВІ КВАНТОВІ ГЕНЕРАТОРИ З НАНОСТРУКТУРАМИ

Навчальний посібник

Відповідальний випусковий	І.М. Бондаренко
Редактор	Б.П. Косіковська
Комп'ютерна верстка	Л.Д. Медведєва

План 2019 (перше півріччя), поз. 7

Підп. до друку 02.01.19.

Умов. друк. арк. 14,1.

Зам. № 1-7.

Формат 60×84 1/16.

Облік. вид. арк. 11,9.

Ціна договірна.

Спосіб друку – ризографія.

Тираж 50 прим.

ХНУРЕ. Україна. 61166, Харків, просп. Науки, 14

Віддруковано в редакційно-видавничому відділі ХНУРЕ
61166, Харків, просп. Науки, 14