УДК 62.506.2

Е. П. ПУТЯТИН, канд. техн. наук,
М. С. ТРЕПЕТИН, ст. науч. сотр.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ НОРМАЛИЗАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ. *СООБЩЕНИЕ II*

Настоящая статья является продолжением исследования [1].

Параллельная и последовательная нормализация

Введем необходимые понятия (не определяемые здесь и далее основные понятия теории групп изложены в монографии [2]).

Пусть M — некоторое множество изображений (называемых далее эталонами), G — некоторая группа. Множество $\mu = M{\circ}G$ всех пар $B{\circ}g \in M{\circ}G$, $B \in M$, $g \in G$ называется множеством изображений.

Эталонные изображения вида $B{\circ}e$, где e — единица группы G, отождествляются с самими эталонами, т. е. полагается $B{\circ}e = B$ для всех $B \in M$. Действие группы G на множество μ задается формулой

$$(B{\circ}g)\, f = B{\circ}gf \tag{1}$$

для всех $B \in M$, $g, f \in G$.

Определение 1. *Пусть G' — подгруппа группы G; F' — оператор вида $\mu \to \mu$. Если $F(B{\circ}g') = B$ для всякого $g' \in G'$, то оператор F' называется частичным нормализатором множества μ, соответствующим подгруппе G'.*

В частности, $F'(B{\circ}e) = B{\circ}e = B$ для любого $B \in M$. Отсюда вытекает что всякий частичный нормализатор, соответствующий подгруппе G', действует идемпотентно на множестве $M{\circ}G'$, т. е.

$$F'(F'(B{\circ}g)) = F'(B{\circ}g) \tag{2}$$

для всех $B \circ g \in M \circ G'$. Естественно считать, что условие (2) выполняется также для всех $B \circ g \in M \circ G'$. Далее предполагается, что каждый оператор частичной нормализации является идемпотентом. Если $G' = G$, то оператор $F = F'$ называется нормализатором (полным нормализатором) множества μ. Частичный нормализатор F', соответствующий подгруппе G' группы G, является нормализатором множества $M \circ G'$. Поэтому в дальнейшем F' будем называть (коротко) нормализатором множества $M \circ G'$.

Действие произвольного нормализатора F' множества $M \circ G'$ определяется отображением Φ' вида $M \circ G \to G'$, которое удовлетворяет условию

$$F'(B \circ g) = B \circ g \Phi'(B \circ g). \quad (3)$$

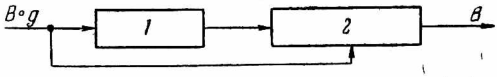

Рис. 1.

Задача о приведении произвольного изображения к эталонному виду сформулирована в работе [1].

Пусть заданы некоторые множество изображений $\mu = M \circ G$, нормализатор F и отображение Φ, удовлетворяющие при всяком $B \circ g \in \mu$ условию

$$B = B \circ e = F(B \circ g) = B \circ g \Phi(B \circ g). \quad (4)$$

Требуется описать процедуру нормализации изображений в случае, когда группа является произведением своих подгрупп. Для этого необходимо ввести

Определение 2. *Будем считать, что процедура нормализации изображения $B \circ g$ параллельна, если она осуществляется однократным применением оператора F нормализации для изображения $B \circ g$. Если эта процедура выполняется в несколько приемов, то такая нормализация называется последовательной. В последнем случае принимаем, что нормализатор F — суперпозиция нормализаторов F_i, выполняемых на каждом шаге.*

Параллельная нормализация схематически показана на рис. 1, последовательная — на рис. 2.

Нормализацию изображения $B \circ g \in M$, определяемую равенством (4), можно рассматривать как параллельную и последовательную.

Пусть группа G, действующая в μ, разлагается в произведение своих подгрупп $G_1, G_2, \ldots, G_n$. Тогда всякий элемент можно представить в виде произведения $g_1 g_2 \ldots g_n$, $g_i \in G_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Если нормализация $B \circ g \to B$ параллельна, то отображение Φ определяет все параметры преобразования g. Соответствующая параллельной нормализации схема (рис. 1) работает следующим образом. Анализатор *1* вычисляет параметры группы преобразований, т. е реализует отображение Φ: $\mu \to G$. Вычисленные в этом блоке параметры поступают в преобразователь *2*, где осуществляется нормализация. На выход преобразователя *2* подается эталонное изображение $B = F(B \circ g)$.

Если же нормализация $B \circ g \to B$ последовательна, то отобра жение Ф является произведением отображений $\Phi_r : \mu \to G_r$, оп ределяющих для всякого $r = 1,2, \ldots, n$ параметры r-й компо ненты $g_r \in C_r$ разложения элемента g в группе G. В свою очередь каждому отображению Φ_r на основании (3) соответствует час тичный нормализатор F_r $(r = 1,2, \ldots, n)$, а произведению Ф $\Phi_{n-1} \ldots \Phi_1$ — суперпозиция нормализаторов $F_1 F_2 \ldots F_n$, равная F

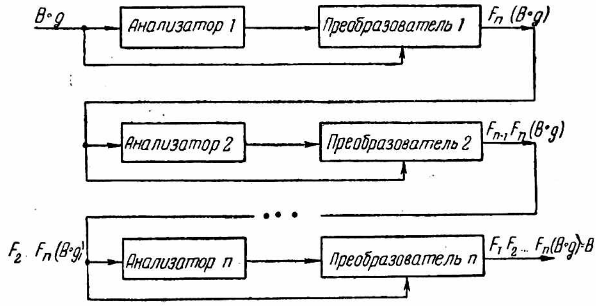

Рис. 2.

Представленная на рис. *2* схема состоит из ряда параллель ных, последовательно работающих нормализаторов. На вход по ступает изображение вида $B \circ g = B \cdot g_1 g_2 \ldots g_n$. Анализатор *1* опре деляет параметры преобразования $g_n \in G_n$. Преобразователь *1* подвер гает изображение $B \circ g$ преобразованию g_n^{-1} и приводит его к вид $F_n(B \cdot g) = B \circ g_1 g_2 \ldots g_{n-1}$. Изображение $F_n(B \circ g)$ поступает н входы анализатора *2* и преобразователя *2*. Анализатор *2* вычи сляет параметры преобразования g_{n-1}^{-1}, а преобразователь *2* вы дает изображение $F_{n-1} F_n (B \circ g) = B \circ g_1 g_2 \ldots g_{n-2}$ и т. д. После n шагов на выходе n-го преобразователя Π_n получим изобра жение $F_1 F_2 \ldots F_n (B \cdot g) = F(B \cdot g) = B$.

Параллельная нормализация удобна, если число параметров группы G невелико (один, два). С увеличением числа параметров группы функционалы Ф, используемые в параллельной нормализации оказались сложными для вычислений и, главное, не универсальными. Параллельная нормализация в аффинной группе преобразований множества μ вообще невозможна. Поэтому для нормализации произвольных изображений необходимо разрабатывать схему последовательной нормализации. При этом можно увеличивать общее время нормализации и аппаратурные затраты.

Рассмотрим различные разложения афинной группы преобразований в произведение своих подгрупп.

Известно [3, с. 111], что группу T можно представить в виде произведения группы $G = \{(a_{13}, a_{23})\}$ смещений по осям и группы $S = \{(a_{ij})\}$, $i, j = 1, 2$ центроаффинных преобразований. Каждую вещественную матрицу $(a_{ij}) \in S$ можно разложить в произведение ортогональной и симметричной, а симметричную — в произведение диагональной и ортогональной [4, с, 263]. Поэтому всякая матрица S центроаффинной группы разлагается в произведение $I_1 D I_2$, где I_1, I_2 — матрицы ортогонального преобразования, D — диагональная матрица.

Найдем параметры определяющие матрицы I_1, D, I_2 в том случае, когда I_1, I_2 — матрицы чистого вращения. Обозначим последние через U_1, U_2. Тогда

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \sin\theta \\ -\sin\theta \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & o \\ o & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где θ — параметры преобразования вращения U_1;

λ, μ — параметры диагонального преобразования D;

φ — параметр вращения U_2.

Матричному соотношению (4) соответствуют уравнения

$$\begin{aligned} \lambda \cos\varphi &= a_{11} \cos\theta - a_{21} \sin\theta; \\ \lambda \sin\varphi &= a_{21} \cos\theta - a_{22} \sin\theta; \\ -\mu \sin\varphi &= a_{11} \sin\theta + a_{21} \cos\theta; \\ \mu \cos\varphi &= a_{12} \sin\theta + a_{22} \cos\theta. \end{aligned}$$

Разрешая их относительно параметров λ, μ, θ и φ, получаем

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{-2(a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22})}{a_{11}^2 + a_{12}^2 - a_{21}^2 - a_{92}^2}; \quad (5)$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{(2a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})}{a_{11}^2 + a_{21}^2 - a_{12}^2 - a_{22}^2}; \quad (6)$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{2}(a_{12}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2 + N) = \left(\frac{\Delta}{\mu}\right)^2, \quad (7)$$

$$\mu^2 = \frac{1}{2}(a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2 - N);$$

$$N^2 = (a_{11}^2 + a_{12}^2 - a_{21}^2 - a_{22}^2)^2 + 4(a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22})^2, \quad (8)$$

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Получены также другие расположения матрицы центроаффинного преобразования. Используя преобразование косого сдвига вдоль оси ординат Y, матрицу центроаффинных преобразований представим в виде $S = UDY$, т. е.

$$\begin{pmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \sin\theta \\ -\sin\theta \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ h & 1 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

причем параметры θ, λ, μ, h однозначно определяются соотношением (9).

Разложение центроаффинной группы, в которых используются преобразования косого сдвига и растяжения по осям, имеют вид

$$S = DXY,\ S = YDU,\ S = XDY,\ S = YDX, S = XDU. \quad (10)$$

При этом параметры разложений в каждом случае будут выражаться вполне определенными формулами.

В целях технической реализации удобно применять разложение диагональной матрицы вида

$$\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|\lambda| & 0\\ 0 & |\mu|\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\operatorname{sing}\lambda & 0\\ 0 & \operatorname{sing}\mu\end{pmatrix}, \qquad (11$$

где $\operatorname{sing}\lambda=\pm 1$; $\operatorname{sing}\mu=\pm 1$; $|\lambda|,\ |\mu|>0$. Обозначим

$$\begin{pmatrix}\pm 1 & 0\\ 0 & \pm 1\end{pmatrix}=I. \qquad (12$$

В свою очередь, диагональную матрицу с положительными элементами можно представить в виде произведения двух простейших матриц P и Q:

$$\begin{pmatrix}|\lambda| & 0\\ 0 & |\mu|\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P & 0\\ 0 & P\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q, & 0\\ 0 & \frac{1}{q}\end{pmatrix}=PQ, \qquad (13$$

$$\text{где } P=\sqrt{\lambda\mu}, \quad q=\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\,. \qquad (13)$$

Другим примером разложения произвольной диагональной матрицы является также разложение вида

$$\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \mu\end{pmatrix}. \qquad (14$$

Таким образом, аффинная группа преобразований носителя плоских изображений допускает различные разложения на подгруппы. Наиболее важны из них разложения

$$T=U_2IPQU_1C; \qquad (15)$$

$$T=UIPQYC. \qquad (16)$$

Нормализация при некоммутативных разложениях группы преобразований

Пусть, как и прежде, $\mu=M\circ G$ (M — некоторое множество эталонов, G — какая-либо группа), причем условие (1) выполнено. Условимся, что

$$B\cdot g=B_1 \Longleftrightarrow B=B_1 (g=e). \qquad (17$$

Физически условие (17) очевидно, если G — группа сдвигов. Если же элементами группы G являются повороты, то G есть однопараметрическая периодическая группа. В этом случае равенство (17) справедливо с точностью до периода поворота изображения $B\circ g$.

Из (1) и (17) вытекает, что

$$B\circ g=B_1\circ g_1 \Longleftrightarrow B=B_1\ (g=g_1). \qquad (18)$$

Действительно, умножим правую часть равенства $B \circ g = B_1 \circ g_1$ на g^{-1}. Тогда в силу (17) получаем $B = B \circ e = B \circ g g^{-1} = (B \circ g) g^{-1} = (B_1 \circ g_1) g^{-1} = B_1 g_1 g^{-1}$. Отсюда $B = B_1$, $e = g_1 g^{-1}$ и $g = g_1$. Таким образом, соотношение (18) выполнено.

Пусть группа G разлагается в произведение $G_1 \; G_2 \ldots G_n$ своих подгрупп $G_i \, (i = 1,2 \; , \ldots , n)$. Докажем, что нормализатор F и отображение Φ представляются в виде суперпозиции подходящих последовательностей нормализаторов и отображений.

Обозначим $G^{(1)} = G_1$, $G^{(2)} = G_1 G_2 \; , \ldots , G^{(n)} = G_1 G_2 \ldots G_n = G$. Обозначим также $M^{(r)} = M \circ G_r^{(r)}$, $r = 1,2 \; , \ldots , \; n$, $M = M_0 = M$. В силу этих обозначений $M^{(n)} = M \circ G^{(n)} = M \circ G = \mu$.

Определение 3. *Будем считать, что в разложении* $G = G_1 G_2 \ldots G_n$ *элементы группы* G *однозначно разлагаются на множители, если для любых* g_i, $f_i \in G$ $(i = 1, \; 2, \ldots , n)$ из $g_1 g_2 \ldots g_n = f_1 f_2 \ldots f_n$ следует $q_i = f_i (i = 1,2, \ldots , n)$.

Теорема 1. *Пусть* F — *нормализатор множества* $\mu = M \circ G$, *а группа* G — *произведение некоторых своих подгрупп* $G_1, G_2 \ldots , G_n$ *с однозначным разложением элементов на множители. Тогда существуют последовательности* $\{F_1, F_2 \; , \ldots , \; F_n\}$ *частичных нормализаторов и* $\{\Phi_1, \; \Phi_2 \; , \ldots , \; \Phi_n\}$ *отображений таких, что*

1) $F_{n-k} (B \circ g) \in M^{(n-k-1)}$ *для всех* $k = 0,1 \; , \ldots , \; n-1$, $B \circ g \in M^{n-k}$;

2) $\Phi_{n-k} (B \circ g) \in G_{n-k}$ *для всех* $k = 0,1 \; , \ldots , \; n-1$, $B \circ g \in M^{(n-k)}$;

3) $F_{n-k} (B \circ g) = B \circ g \Phi_{n-k} \langle B \circ g \rangle$ *для всех* $B \circ g \in M^{n-k}$, $k = 0,1,2 \; , \ldots , \; n-k$;

4) $F_1 F_2 \ldots F_n (B \circ g) = F (B \circ g)$ *для всех* $B \circ g \in M \circ G$.

Доказательство. Пусть $k = 0$ и $B \circ g \in M \circ G$.
Тогда

$$B \circ e = F (B \circ g) = B \circ g \Phi \langle B \circ g \rangle . \tag{19}$$

Отображение $\Phi^{-1} \langle B \circ g \rangle \in G$, причем каждый элемент из G можно разложить в произведение элементов $f_i \in G_i$ $(i = 1,2 \; , \ldots , \; n)$. Поэтому

$$\Phi^{-1} \langle B \circ g \rangle = f_1 f_2 \ldots f_n . \tag{20}$$

Полагаем

$$\Phi_n \langle B \circ g \rangle = f_n^{-1} ; \tag{21}$$

$$F_n (B \circ g) = B \circ g \Phi_n \langle B \circ g \rangle . \tag{22}$$

Тем самым условия 2), 3) теоремы 1 при $k = 0$ удовлетворяются. Покажем, что условие 1) также выполняется. Для этого заметим, что по определению нормализатора $F (B \circ g f_n^{-1}) = B \circ e$. Отсюда в силу (4)

$$B \circ e = B \circ g \Phi \langle B \circ g \rangle = F (B \circ g) = F (B \circ g f_n^{-1}) = B \circ g f_n^{-1} \Phi \langle B \circ g f_n^{-1} \rangle . \rangle \tag{23}$$

Следовательно,

$$\Phi (B \circ g) = f_n^{-1} \Phi \langle B \circ g f_n^{-1} \rangle , \tag{24}$$

и с учетом условия (20) получим

$$\Phi\langle B\circ gf_n^{-1}\rangle = f_n\Phi\langle B\circ g\rangle = f_n(\Phi^{-1}\langle B\circ g\rangle)^{-1} = f_{n-1}^{-1}f_{n-2}^{-1}\ldots f_1^{-1} = \\ = (f_1\ldots f_{n-2}f_{n-1})^{-1}. \quad (25)$$

Из (23) и (18) вытекает $gf_n^{-1}\Phi\langle B\circ gf_n^{-1}\rangle = e$ и, значит, $gf_n^{-1} = \Phi^{-1}\langle B\circ gf_n^{-1}\rangle$. Пользуясь определениями Φ_n, F_n и условием (25), выводим

$$F_n(B\circ g) = B\circ g\Phi_n\langle B\circ g\rangle = B\circ gf_n^{-1} = B\circ\Phi^{-1}\langle B\circ gf_n^{-1}\rangle = \\ = B\circ f_1f_2\ldots f_{n-1}.$$

По определению $B\circ f_1f_2\ldots f_{n-1}\in M^{n-1}$. Таким образом, условие 1) теоремы 1 при $k=0$ выполняется.

Допустим, что для всех $h<k$ нормализаторы F_{n-k} и отображения Φ_{n-k} построены и условия 1)—3) для них выполнены. Покажем, что на k-м шаге существуют Φ_{n-k} и F_{n-k}, которые удовлетворяют условиям 1)—3) теоремы 1.

Пусть $B\circ g\in M^{(n-k)}$, т. е. $g = f_1f_2\ldots f_{n-k}$, где $f_i\in G_i$. Из (4) имеем $\Phi^{-1}\langle B\circ g\rangle = g$. Положим

$$\Phi_{n-k}\langle B\circ g\rangle = f_{n-k}^{-1}; \quad (26)$$

$$F_{n-k}(B\circ g) = B\circ g\Phi_{n-k}\langle B\circ g\rangle, \quad (27)$$

где f_{n-k} — $(n-k)$-я компонента в разложении (20) элемента $\Phi^{-1}\langle B\circ g\rangle$. Вследствие однозначности этого разложения в группе G отображения Φ_{n-k} и F_{n-k} определены корректно.

Покажем, что F_{n-k} является частичным нормализатором, соответствующим некоторой подгруппе группы G. Действительно, пусть $g\in G_{n-k}$. Очевидно, что $g = e_1e_2\ldots e_{n-k-1}g$ (здесь $e_i = e$ — единица подгрупп G_i). Отсюда ввиду однозначности разложения в группе G следует, что g является своей собственной $(n-k)$-й компонентой. Следовательно, по определению Φ_{n-k} (см. (26)) имеем $\Phi_{n-k}\langle B\circ g\rangle = g^{-1}$ для всякого $B\in M$, Отсюда с учетом (27) получаем $F_{n-k}(B\circ g) = B\circ g\Phi_{n-k}\langle B\circ g\rangle = B\circ gg^{-1} = B\circ e$, т. е. F_{n-k} — частичный нормализатор, соответствующий подгруппе G_{n-k} группы G.

Итак, на основании (26), (27) и условий 2) —3) теоремы 1 на k-м шаге выполняется.

Покажем, что условие 1) также выполняется. С помощью (4) получаем

$$B\circ e = F(B\circ g) = F(B\circ gf_n^{-1}) = B\circ gf_n^{-1}\Phi\langle B\circ gf_n^{-1}\rangle. \quad (28)$$

Отсюда из (17), (18) следует $g^{-1} = \Phi\langle B\circ g\rangle = f_{n-k}^{-1}\Phi\langle B\circ gf_{n-k}^{-1}\rangle$.

Так как $g = f_1f_2\ldots f_{n-k}$, после сокращения предыдущего равенства на f_{n-k}^{-1} получаем

$$\Phi\langle B\circ gf_{n-k}^{-1}\rangle = f_{n-k-1}^{-1}f_{n-k-2}^{-1}\ldots f_1^{-1}. \quad (29)$$

Отсюда с учетом (26), (28)

$$F_{n-k}(B\circ g) = B\circ g\Phi_{n-k} = \langle B\circ g \rangle = B\circ g f_{n-k}^{-1} =$$
$$= B\circ\Phi^{-1} \langle B\circ g f_{n-k}^{-1} \rangle = B\circ f_1 f_2 \ldots f_{n-k-1} \in M^{n-k-1},$$

т. е. условие 1) на k-м шаге выполняется.

Покажем справедливость условия 4) теоремы. По доказанному,

$$F_n(B\circ g)\in M^{(n-1)},\ F_{n-1}F_n(B\circ g)\in M^{(n-2)},\ \ldots,\ F_{n-k+1}\times$$
$$\times F_{n-k+2}\cdots F_n(B\circ g)\in M^{(n-k)},\ F_{n-k} = F_{n-k+1}\cdots F_n\times$$
$$\times(B\circ g)\in M^{(n-k-1)},\ \ldots,\ F_1F_2\cdots F_n(B\circ g)\in M^{(0)} = M.$$

Следовательно, $F_1F_2\cdots F_n(B\circ g) = B\circ e = F(B\bullet g)$. На основании произвольности изображения $B\circ g$ произведение $F_1F_2\ldots F_n$ является нормализатором множества $M\circ G$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть нормализатор F множества $M\circ G$ — суперпозиция частичных нормализаторов $F_1, F_2 \ldots F_n$, множеств соответственно $M\circ G_1, \ldots, M\circ G_n$,* где G_i $(i=1,2, \ldots, n)$ *— подгруппы, группы G. Тогда $G = G_1G_2\ldots G_n$.*

Доказательство. Обозначим $\Phi_n\langle B\circ g\rangle = g_n$, $\Phi_{n-1}\times(B\circ gg_n) = g_{n-1}$, $\Phi_{n-2}\langle B\circ gg_ng_{n-1}\rangle = g_{n-2}, \ldots, \Phi_1\langle B\circ gg_1\times g_2\ldots g_n\rangle = g_1$. Тогда $B\circ e = F(B\circ g) = F_1F_2\ldots F_n(B\circ g) = F_1F_2\ldots F_{n-1}(B\circ gg_n) = F_1F_2\ldots F_{n-2}(B\circ gg_ng_{n-1}) = \ldots = F_1\times(B\circ g_ng_{n-1}\ldots g_2) = B\circ gg_ng_{n-1}\ldots g_1$.

Отсюда

$$g = (g_ng_{n-1}\ldots g_2g_1)^{-1} = g_1^{-1}g_2^{-1}\ldots g_{n-1}^{-1}g_n^{-1}. \tag{30}$$

Однако Φ_i — отображение вида $M\circ G\to G_i$ для всех $i = 1,2, \ldots, n$. Поэтому из (30) следует, что $g\in G_1G_2\ldots G_n$, т. е. $G\subseteq G_1G_2\ldots G_n$. Но $G_1G_2\ldots G_n\subseteq G$ (G_i — по условию подгруппы группы G, $i = 1, \ldots, n$); следовательно, $G = G_1G_2\ldots G_n$. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Путятин Е. П. Теоретические предпосылки нормализации изображений. Сообщение I.— В сб.: Проблемы бионики. Вып. 11. Харьков, 1973, с. 19—28.
2. Путятин Е. П., Трепетин М. С. Теоретические предпосылки нормализации изображений. Сообщение II (см. ст. в настоящем сборнике).
3. Курош А. Г Теория групп. М., «Наука», 1967. 648 с.
4. Путятин Е П., Юрченко В. П., Левиков В. Б., Берман В. И. Нормализация изображений при аффинных преобразованиях.— В сб.: Проблемы бионики. Вып. 9. Харьков, 1972, с. 23—37.

УДК 62. 506. 2

Е. П. ПУТЯТИН, канд. техн. наук,
М. С. ТРЕПЕТИН, ст. науч. сотр.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ НОРМАЛИЗАЦИИ ИЗОБРАЖЕНИЙ. *СООБЩЕНИЕ III*

Настоящее сообщение является завершением исследований, начатых в [1, 2]. Используются терминология и обозначения, принятые в [2].