

## МЕТОД R-ФУНКЦІЙ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ПЕРЕМІШУВАННЯ

Стаднікова Г.В.

Науковий керівник – канд. техн. наук, доц. Гибкіна Н.В.  
Харківський національний університет радіоелектроніки, каф. ПМ,  
м. Харків, Україна  
e-mail: [hanna.stadnikova@nure.ua](mailto:hanna.stadnikova@nure.ua)

The problem of mixing of a viscous liquid in multiply connected two-dimensional domain was considered. The approximate approach based on the Ritz method and the R-functions method was suggested to solve this problem.

Проблема чисельного аналізу математичних моделей перемішування в'язких рідин часто зустрічають в хімічній, фармацевтичній, харчовій промисловостях, а також в інших прикладних областях. Крім того, змішування рідин є фундаментальною науковою проблемою, тісно пов'язаною з сучасними концепціями хаотичної та регулярної динаміки. У той же час, більшість методів, що застосовуються в чисельному аналізі математичних моделей таких процесів, не мають властивості універсальності, й їх важко застосовувати для «непримітивних» областей.

Розглянемо в області  $\Omega$  плоску квазістаціонарну течію в'язкої нестисливої рідини. Нехай область  $\Omega$  є двозв'язною та її межа  $\partial\Omega$  складається з зовнішнього контуру  $\partial\Omega_0$  та внутрішнього контуру  $\partial\Omega_1$ ;  $\partial\Omega = \partial\Omega_0 \cup \partial\Omega_1$ , до того ж  $\partial\Omega_0 \cap \partial\Omega_1 = \emptyset$ . Вважатимемо, що межа  $\partial\Omega$  тверда, а течія в області викликана почережним рухом зовнішньої й внутрішньої меж зі сталими швидкостями.

Розв'язання першої частини задачі перемішування полягає в отриманні поля швидкостей  $(v_x, v_y)$  в області течії  $\Omega$ . Вважатимемо, що розглядувана течія є повзучою та нелінійними доданками у рівняннях Нав'є-Стокса можна знехтувати, тобто можна обмежитись розглядом наближення Стокса. Течію описуватимемо за допомогою функції течії  $\psi(x, y, t)$ , яку вводять у розгляд співвідношеннями

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Для функції течії  $\psi(x, y, t)$  можна поставити таку крайову задачу:

$$\Delta^2\psi = 0 \text{ у } \Omega, \quad \psi|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad \psi|_{\partial\Omega_1} = c(t), \quad \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega} = \begin{cases} g_0(t) & \text{на } \partial\Omega_0, \\ g_1(t) & \text{на } \partial\Omega_1, \end{cases} \quad (1)$$

де  $c(t)$  –деяка невідома наперед функція часу  $t$ ,  $\mathbf{n}$  – зовнішня нормаль до  $\partial\Omega$ ,  $\Delta^2$  – бігармонічний оператор.

Функції  $g_0(t)$  і  $g_1(t)$  задаються, виходячи з заданих швидкостей рідини на  $\partial\Omega_0$  та  $\partial\Omega_1$  відповідно.

Функцію  $c(t)$  можна знайти з умови однозначності тиску, що має вигляд

$$\int_{\partial\Omega_1} \frac{\partial\Delta\Psi}{\partial\mathbf{n}} ds = 0, \quad (2)$$

де  $\Delta$  – оператор Лапласа.

Для розв'язання задачі (1), (2) скористаємось принципом суперпозиції, методами R-функцій та Рітца [1 – 3]. Розв'язок задачі (1), (2) подамо у вигляді

$$\psi(x, y, t) = \psi_0(x, y, t) + c(t) \cdot \psi_1(x, y), \quad (3)$$

де  $\psi_0(x, y, t)$  – розв'язок задачі

$$\begin{aligned} \Delta^2\psi_0 &= 0 \text{ у } \Omega, \\ \psi_0|_{\partial\Omega} &= 0, \quad \frac{\partial\psi_0}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega} = \begin{cases} g_0(t) & \text{на } \partial\Omega_0, \\ g_1(t) & \text{на } \partial\Omega_1, \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

а  $\psi_1(x, y)$  – розв'язок задачі

$$\begin{aligned} \Delta^2\psi_1 &= 0 \text{ у } \Omega, \\ \psi_1|_{\partial\Omega_0} &= 0, \quad \psi_1|_{\partial\Omega_1} = 1, \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Розв'язання задачі (4) також зведемо до розв'язання двох стаціонарних задач. Подамо функцію  $\psi_0(x, y, t)$  у вигляді

$$\psi_0(x, y, t) = g_0(t)u(x, y) + g_1(t)v(x, y), \quad (7)$$

де  $u(x, y)$  – розв'язок задачі

$$\begin{aligned} \Delta^2u &= 0 \text{ в } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega} = \begin{cases} 1 & \text{на } \partial\Omega_0, \\ 0 & \text{на } \partial\Omega_1, \end{cases} \end{aligned} \quad (8)$$

а  $v(x, y)$  – розв'язок задачі

$$\begin{aligned} \Delta^2v &= 0 \text{ в } \Omega, \\ v|_{\partial\Omega} &= 0, \quad \frac{\partial v}{\partial\mathbf{n}}\Big|_{\partial\Omega} = \begin{cases} 0 & \text{на } \partial\Omega_0, \\ 1 & \text{на } \partial\Omega_1. \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

Тоді, підставляючи спочатку (7) у (3), а потім у (2), отримаємо, що

$$c(t) = -g_0(t) \frac{\int_{\partial\Omega_1} \frac{\partial\Delta u}{\partial\mathbf{n}} ds}{\int_{\partial\Omega_1} \frac{\partial\Delta\psi_1}{\partial\mathbf{n}} ds} - g_1(t) \frac{\int_{\partial\Omega_1} \frac{\partial\Delta v}{\partial\mathbf{n}} ds}{\int_{\partial\Omega_1} \frac{\partial\Delta\psi_1}{\partial\mathbf{n}} ds}.$$

Відповідно до методу R-функцій було побудовано структури

розв'язків крайових задач (5), (8) і (9). Нехай  $\omega(x, y) = 0$ ,  $\omega_0(x, y) = 0$ ,  $\omega_1(x, y) = 0$  – нормалізовані рівняння  $\partial\Omega$ ,  $\partial\Omega_0$ ,  $\partial\Omega_1$  відповідно. Тоді структура розв'язку задачі (8) має вигляд  $u = -\omega \frac{\omega_1}{\omega_0 + \omega_1} + \omega^2 \Phi_1$ , структура

розв'язку задачі (9) має вигляд  $v = -\omega \frac{\omega_0}{\omega_0 + \omega_1} + \omega^2 \Phi_2$  а структура розв'язку

задачі (5) має вигляд  $\psi_1 = \frac{\omega_0}{\omega_0 + \omega_1} - \omega D_1 \left( \frac{\omega_0}{\omega_0 + \omega_1} \right) + \omega^2 \Phi_3$ . Тут  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$  –

невизначені компоненти, а оператор  $D_1$  визначається рівністю

$$D_1 = \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Для апроксимації невизначених компонент в структурних формулах можна скористатися методом Рітца.

Для розв'язання другої частини задачі перемішування складено й розв'язано (з використанням чисельних методів розв'язання задачі Коші) систему рівнянь руху лагранжевої частинки:

$$\frac{dx}{dt} = v_x \equiv \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = v_y \equiv -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0. \quad (10)$$

Далі отримані траєкторії руху досліджують з точки зору наявності й характеру хаотичної поведінки за допомогою методів нелінійної динаміки (розшукують й аналізують стаціонарні точки, будують фазові портрети, досліджують еволюції лінійного й плоского елементів).

Таким чином, якісний аналіз системи (10) дозволяє виділити зони ефективного перемішування, що ілюструється результатами обчислювального експерименту.

Список використаних джерел:

1. Рвачёв В. Л. Теория R-функций и некоторые её приложения. Киев : Наукова думка, 1982. 552 с.

2. Стаднікова А. В. Метод численного анализа квазистационарных процессов перемешивания в многосвязных областях. *Радиоэлектроника и информатика*. 2014. № 1 (64). С. 31 – 34.

3. Gybkina N. V., Sidorov M. V., Stadnikova H. V. Mathematical modeling of the quasi-stationary processes of viscous mixture mixing in a rectangular area by the R-functions method. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія: Системний аналіз, управління та інформаційні технології. 2022. № 2 (8). С. 87-93. DOI: 10.20998/2079-0023.2022.02.14