УДК 62.506.2

Е. П. ПУТЯТИН, д-р техн. наук, *Т. Г. ДОЛЖЕНКОВА*

ВОПРОСЫ НОРМАЛИЗАЦИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ
СООБЩЕНИЕ 1

В работах [1—3] рассмотрены вопросы нормализации изображений в классах эквивалентности, порождаемых группами преобразований. Примерами таких групп являются смещения, повороты, растяжения изображений, их аффинные преобразования.

В данном сообщении общие идеи нормализации изображений распространяются на отдельные классы нелинейных преобразований.

Пусть M — некоторое множество изображений, заданных функцией $B(x, y)$ распределения яркости на плоскости. Задано разбиение множества M на подмножества $\{m_\alpha\}$. Разбиение, как известно, определяет на множестве M отношение эквивалентности, т. е. некоторые изображения B_1 и B_2 будут эквивалентны, если найдется такое m_α, что $B_1, B_2 \in m_\alpha$.

Выделим в каждом классе эквивалентности по одному элементу B_0, который назовем эталонным изображением. Пусть M_0 — множество таких эталонов. Тогда согласно общему определению, приведенному в [1], нормализатор есть отображение вида $F: M \to M_0$.

Пусть изображение $B(x)$, определенное на отрезке $[c, b]$, получено из эталонного изображения $B_0(x)$ с помощью следующего преобразования

$$B(x) = B_0(ax^2), \; x \geqslant 0. \tag{1}$$

Для определения параметра a воспользуемся следующим интегральным функционалом

$$\Phi(B) = \int_c^b B(x)\, x dx. \tag{2}$$

В качестве функционала эталона возьмем $\Phi(B_0) = \int_c^b B_0(x)\, dx$. Используя соотношение (1), запишем выражение (2) в виде $\Phi(B) = \int_c^b B_0(ax^2)\, x dx$.

В полученном интеграле выполним замену переменной $ax^2 = u$. Полагаем, что всевозможные преобразования типа (1) не выводят изображение $B(x)$ за пределы области определения. Следовательно, область интегрирования при замене переменной не изменится. Тогда

$$\Phi(B) = \int_c^b B_0(u) \sqrt{\frac{u}{a}} \frac{du}{2a\sqrt{\frac{u}{a}}} = \frac{1}{2a} \Phi(B_0).$$

Откуда $a = \Phi(B_0)/[2\Phi(B)]$. Для рассматриваемого преобразования оператор нормализации F находится, как результат суперпозиции двух операторов

$$F = F_2 F_1 [B(x)] = F_2 \left[B_0 \left(\frac{2\Phi(B)}{\Phi(B_0)} ax^2 \right) \right] = F_2 [B_0(x^2)] = B_0(x), \tag{3}$$

где F_1 — оператор преобразования, приводящий изображение $B(x)$ к изображению $B_0(x^2)$; F_2 — оператор преобразования, приводящий изображение $B_0(x^2)$ к эталонному $B_0(x)$.

Рассмотрим случай, когда функция $B(x)$ связана с эталонной функцией $B_0(x)$ зависимостью

$$B(x) = B_0(a_1x^2 + a_2), \quad x \geqslant 0. \tag{4}$$

Для нахождения параметров a_i $(i = 1, 2)$ используем интегральные функционалы

$$\Phi_i(B) = \int_c^b B(x)K_i(x)\,dx \quad (i = 1, 2), \tag{5}$$

где $K_i(x)$ — некоторые функции, имеющие следующий вид:

$$K_1(x) = x; \quad K_2(x) = x^3. \tag{6}$$

Полагаем, что эталонные функционалы также представляются в интегральной форме

$$\Phi_i(B_0) = \int_c^b B_0(x)K_i^0(x)\,dx \quad (i = 1, 2), \tag{7}$$

где

$$K_1^0(x) = 1; \quad K_2^0(x) = x. \tag{8}$$

Выполнив в выражении (4) замену переменной $a_1x^2 + a_2 = u$ и учитывая (5)—(8), получим

$$\Phi_1(B) = \int_c^b B_0(u)\sqrt{\frac{u-a_2}{a_1}}\,\frac{du}{2a_1\sqrt{\frac{u-a_2}{a_1}}} = \frac{1}{2a_1}\Phi_1(B_0); \tag{9}$$

$$\Phi_2(B) = \int_c^b B_0(u)\left(\sqrt{\frac{u-a_2}{a_1}}\right)^3\frac{du}{2a_1\sqrt{\frac{u-a_2}{a_1}}} =$$

$$= \frac{1}{2a_1^2}\left[\Phi_2(B_0) - a_2\Phi_1(B_0)\right].$$

Откуда искомые параметры a_i $(i = 1, 2)$ определяются следующим образом:

$$a_1 = \frac{\Phi_1(B_0)}{2\Phi_1(B)}; \quad a_2 = \frac{2\Phi_1^2(B)\Phi_2(B_0) - \Phi_2(B)\Phi_1^2(B_0)}{2\Phi_1^2(B)\Phi_1(B_0)}.$$

Оператор нормализации для преобразования (4) имеет вид

$$F = F_2F_1[B(x)] = F_2\left\{B\left[\frac{2\Phi_1(B)}{\Phi_1(B_0)}x^2 -\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\frac{2\Phi_1^2(B)\Phi_2(B_0) - \Phi_2(B)\Phi_1^2(B_0)}{2\Phi_1^2(B)\Phi_1(B_0)}\right)\right]\right\} = F_2[B_0(x^2)] = B_0(x). \tag{10}$$

Перейдем к рассмотрению более сложных преобразований. Пусть изображение (зрительная картина), однозначно характеризуемое функцией яркости $B(x, y)$ в поле зрения D, задано в декартовой системе координат и получено из эталонного $B_0(x, y)$ с помощью преобразования

$$B(x, y) = B_0(a_1x^2, a_2y^2), \; x, y \geqslant 0. \tag{11}$$

Пользуясь рассуждениями, изложенными выше для преобразований (1), (4), строим интегральные функционалы

$$\Phi_i(B) = \iint_D B(x, y) K_i(x, y)\, dxdy =$$
$$= \iint_D B_0(a_1x^2, a_2y^2) K_i(x, y)\, dxdy \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{12}$$

Выполним в выражениях (12) замену переменных:

$$a_1x^2 = u; \quad a_2y^2 = v. \tag{13}$$

Полагая, как и ранее, что все преобразования вида (13) не выводят изображение $B(x, y)$ за пределы поля зрения D, получим:

$$x = \sqrt{\gamma_1 u}; \quad y = \sqrt{\gamma_2 v}, \tag{14}$$

где γ_1, γ_2 — параметры преобразования, обратные искомым параметрам a_1 и a_2.

Якобиан преобразования (14) равен

$$I(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\gamma_1\gamma_2}{4\sqrt{\gamma_1 u}\sqrt{\gamma_2 v}}. \tag{15}$$

Обозначим $\frac{1}{4}\gamma_1\gamma_2 = \Delta$.

Функции $K_i(x, y)$ в выражениях (12) необходимо подбирать так, чтобы можно было разрешить уравнения $\Phi_i(B) = f(\gamma_j, \Phi_k(B_0))$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, l;\ k = 1, 2, \ldots, m)$ относительно параметров γ_j. Здесь $\Phi_k(B_0)$ — функционалы эталонных изображений.

Рассматриваемое семейство преобразований (11) — двухпараметрическое $(l = 2)$. В этом случае, как легко убедиться, минимальное число независимых функционалов равно трем $(n = 3)$.

В качестве функций $K_i(x, y)$ возьмем следующий набор линейно независимых полиномов от двух переменных:

$$K_1(x, y) = xy; \quad K_2(x, y) = xy^3; \quad K_3(x, y) = x^3y. \tag{16}$$

После замены переменных, как показано в формулах (13)—(15) и с учетом (16), выражения (12) примут вид:

$$\Phi_1(B) = \Delta \iint_D B_0(u) \frac{\sqrt{\gamma_1 u}\sqrt{\gamma_2 v}}{\sqrt{\gamma_1 u}\sqrt{\gamma_2 v}}\, dudv = \Delta \iint_D B_0(u, v)\, dudv; \tag{17}$$

$$\Phi_2(B) = \Delta \iint_D B_0(u) \frac{\sqrt{\gamma_1 u}(\sqrt{\gamma_2 v})^3}{\sqrt{\gamma_1 u}\sqrt{\gamma_2 v}}\, dudv = \Delta\gamma_2 \iint_D B_0(u, v)\, vdudv;$$

$$\Phi_3(B)=\Delta\iint_D B_0(u)\frac{(\sqrt{\gamma_1 u})^3\sqrt{\gamma_2 v}}{\sqrt{\gamma_1 u}\sqrt{\gamma_2 v}}dudv=\Delta\gamma_1\iint_D B_0(u,\ v)\,ududv.$$

Функционалы эталонов $\Phi_k(B_0)$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ имеют вид, аналогичный (12). Анализируя (17) можно заключить, что ядра этих функционалов $K_k^0(x,\ y)$ в простейшем варианте следующие:

$$K_1^0(x,\ y)=1;\quad K_2^0(x,\ y)=y;\quad K_3^0(x,\ y)=x. \tag{18}$$

Здесь $m=3$.

Учитывая соотношения (18), выражения (17) перепишем следующим образом:

$$\Phi_1(B)=\Delta\Phi_1(B_0);\quad \Phi_2(B)=\Delta\gamma_2\Phi_2(B_0);\quad \Phi_3(B)=\Delta\gamma_1\Phi_3(B_0), \tag{19}$$

где

$$\Phi_1(B_0)=\iint_D B_0(x,\ y)\,dxdy;\quad \Phi_2(B_0)=\iint_D B_0(x,\ y)\,ydxdy;$$

$$\Phi_3(B_0)=\iint_D B_0(x,\ y)\,xdxdy.$$

Решая уравнения (19), определяем параметры γ_j $(j=1,\ 2)$:

$$\gamma_1=\frac{\Phi_3(B)\,\Phi_1(B_0)}{\Phi_1(B)\,\Phi_3(B_0)};\quad \gamma_2=\frac{\Phi_2(B)\,\Phi_1(B_0)}{\Phi_1(B)\,\Phi_2(B_0)}.$$

Зная γ_j, можно легко найти искомые параметры a_j преобразования (11). Оператор нормализации для данного преобразования строим с учетом разработанного ранее [4] подхода для конструирования операторов нормализации при аффинных преобразованиях. Полагаем, что матрица $A=\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix}$ — невырожденная, так же, как и вычисленная матрица $C=\begin{pmatrix}\gamma_1 & 0\\ 0 & \gamma_2\end{pmatrix}$. Таким образом,

$$F=F_2F_1[B(x,\ y)]=F_2\left[B\left(\frac{\Phi_3(B)\,\Phi_1(B_0)}{\Phi_1(B)\,\Phi_3(B_0)}x^2,\ \frac{\Phi_2(B)\,\Phi_1(B_0)}{\Phi_1(B)\,\Phi_2(B_0)}y^2\right)\right]=$$

$$=F_2\left[B_0\left(AC\begin{pmatrix}x^2\\ y^2\end{pmatrix}\right)\right]=F_2[B_0(x^2,\ y^2)]=B_0(x,\ y). \tag{20}$$

Список литературы: 1. *Путятин Е. П.* Теоретические предпосылки нормализации изображений. Сообщение I.— В кн.: Проблемы бионики. Харьков, 1973, вып. 10, с. 82—89. 2. *Путятин Е. П., Трепетин М. С.* Теоретические предпосылки нормализации изображений. Сообщение II.— В кн.: Проблемы бионики. Харьков, 1974, вып. 12, с. 78—85. 3. *Путятин Е. П., Трепетин М. С.* Теоретические предпосылки нормализации изображений. Сообщение III.— В кн.: Проблемы бионики. Харьков, 1974, вып. 12, с. 85—94. 4. Нормализация изображений при аффинных преобразованиях / *Е. П. Путятин, В. П. Юрченко, В. Б. Левиков, В. А. Берман.*— В кн.: Проблемы бионики. Харьков, 1972, вып. 8, с. 44—52.

Поступила 19 декабря 1978 года