Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет _____Електронної та біомедичної інженерії_____
(повна назва)

Кафедра _____Мікроелектроніки, електронних приладів та пристроїв_____
(повна назва)

АТЕСТАЦІЙНА РОБОТА
Пояснювальна записка

_____другий (магістерський)_____
(рівень вищої освіти)

_____
(позначення документа)

Ефект Вавилова-Черенкова під час взаємодії електрона з діелектричним хвилеводом.

_____.
(тема)

Виконав:
студент _2_курсу, групи ___ЕППм 18-1___
_____Приходько С.В._____
(прізвище, ініціали)
Спеціальність 171 Електроніка
(код і повна назва спеціальності)
Тип програми освітньо-професійна
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)
Освітня програма «Електронні прилади та пристрої»_____
(повна назва освітньої програми)

Керівник _____проф. Прокопенко Ю.В._____
(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри _____ Бондаренко І.М._____
(підпис) (прізвище, ініціали)

2019 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет_____Електронної та біомедичної інженерії_____
(повна назва)

Кафедра_____Мікроелектроніки, електронних приладів та пристроїв_____
(повна назва)

Рівень вищої освіти_____другий (магістерський)_____

Спеціальність___171 «Електроніка»_____
(код і повна назва)

Тип програми_____освітньо-професійна_____
(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма ___«Електронні пристрої та системи»_____
(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:
Зав. кафедри _____
(підпис)
«_____»_____ 20 ___ р.

ЗАВДАННЯ

НА АТЕСТАЦІЙНУ РОБОТУ

студентові_____Приходьку Сергію Володимировичу_____
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи «Ефект Вавилова-Черенкова під час взаємодії електрона з діелектричним хвилеводом»

затверджена наказом по університету від 4.11_____2019 р. № _1635Ст____

2. Термін подання студентом роботи до екзаменаційної комісії ____ _грудня___ 2019 р.

3. Вихідні дані до роботи Матеріал діелектричного циліндра - полікор ,ε = 9,6, радіус циліндра ρ_c = 0,5 см. Швидкість і радіус орбіти електрона v_0 = 0,387 і ρ_0 = 0,6 см

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі: аналіз літературних джерел, процеси при взаємодії електрона з діелектричним циліндром, ефект Вавилова–Черенкова на основі розв'язання рівнянь Максвелла з урахуванням рівняння руху зарядженої частинки та матеріальних рівнянь, величини цих втрат від значень азимутального і радіального модових індексів, аналіз отриманих результатів.

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій (слайдів): титульний аркуш, мета дослідження, втрати енергії електрона в одиницю часу, _____
_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____
_____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Термін виконання етапів плану	Приміт ка
1	Огляд літературних джерел за темою роботи		Виконано
2	Аналіз процесів		Виконано
3	Аналіз виникненя ефекту		Виконано
	Вавилова-Черенкова в ізотропному та		
	анізотропномусередовищах		
4	Аналіз ефекту Вавилова-Черенкова		Виконано
	у хвилеводах		
5	Аналіз втрат енергії заряджених частинок		Виконано
	при взаємодії з діелектричні циліндром		
6	Написання пояснювальної записки та		Виконано
7	Подання на кафедру, підготовка доповіді		Виконано
	Захист атестаційної роботи		Виконано

Студент _____
(підпис)

Керівник роботи _____ _____
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка 67 стрінок, 8 рисунків, 31 джерел, 2 додатки. Графічна частина 8 слайдів.

ЗАРЯДЖЕНА ЧАСТИНКА, ЕФЕКТ ВАВИЛОВА–ЧЕРЕНКОВА, ВЛАСНІ ХВИЛІ ТА КОЛИВАННЯ, МЕХАНІЗМ ГЕНЕРУВАННЯ ВИПРОМІНЮВАННЯ

Об'єкт дослідження - процеси взаємодії електронної частинки, яка рухається в середовищі.

Мета роботи - дослідження ефекту Вавилова-Черенкова внаслідок взаємодії електрона з циліндричним діелектричним хвилеводом

Методи дослідження базуються на використанні рівнянь Максвелла, рівняння руху електрону у вільному просторі і матеріальних рівнянь.

Виконано аналіз досліджень електродинамічної системи, в якій здійснюється взаємодія електрона, що рухається рівномірно та прямолінійно у вільному просторі паралельно твірній діелектричного циліндра, з полями його власних електромагнітних хвиль в умовах резонансів Вавилова–Черенкова

Проаналізовано вираз для втрат енергії випромінювання електрона на збудження власних об'ємно-поверхневих мод у діелектричному циліндрі. Вивчено величини цих втрат від значень азимутального і радіального модових індексів.

Освоєно метод аналізу ефекту Вавилова–Черенкова на основі розв’язання рівнянь Максвелла з урахуванням рівняння руху зарядженої частинки та матеріальних рівнянь

ABSTRACT

Explanatory note 67 pages, 8 figures, 31 sources, 2 annexes. Graphic part 8 slides.

CHARGED PARTICLES, EFFECTS VAVILOV-CERENKOV,OWN WAVES AND VIBRATIONS, MECHANISM OF RADIATION GENERATION

The object of study - the process of interaction of electronic particle that moves in the environment.

Objective operation - study effect Vavilov-Cherenkov during interaction with electrons dielectric waveguide.

Methods based on the use of Maxwell's equations, the equations of motion of electrons and Sterroka rules.

The analysis of research electrodynamic system in which the interaction of an electron moving uniformly straight and parallel in free space generating dielectric cylinder with its own fields of electromagnetic waves in terms of Vavilov-Cherenkov resonances.

Analyzed expression for the loss of radiation energy electron excitation on their body-surface modes in dielectric cylinder. Studied magnitude of these losses on the values of the azimuthal and radial modal indices.

Mastered analysis method Vavilov-Cherenkov effect from solving Maxwell's equations based equations of motion of a charged particle and material equations

ЗМІСТ

ВСТУП 8
РОЗДІЛ 1 ЕФЕКТ ВАВИЛОВА–ЧЕРЕНКОВА В ІЗОТРОПНОМУ СЕРЕДОВИЩІ 10
1.1 Рівняння Максвелла 10
1.2. Діелектрична стала..... 13
1.3 Якісний розгляд 14
1.4 Поле зарядженої частинки, що рухається 19
1.5. Втрати енергії зарядженої частинки 23
РОЗДІЛ 2 ЕФЕКТ ВАВИЛОВА–ЧЕРЕНКОВА В АНІЗОТРОПНОМУ СЕРЕДОВИЩІ..... 27
29
2.1 Матеріальні рівняння..... 29
2.2. Поле зарядженої частки, що рухається 30
2.3 Фазова і групова швидкості хвиль Вавилова–Черенкова у кристалі 31
2.4. Ефект Вавилова–Черенкова в ізотропному оптичному активному середовищі 32
2.5 Ефект Вавилова–Черенкова в електронній плазмі, яка знаходиться у зовнішньому магнітному полі..... 34
РОЗДІЛ 3 ЕФЕКТ ВАВИЛОВА–ЧЕРЕНКОВА У ХВИЛЕВОДАХ 37
3.1 Хвилевод, що заповнено ізотропним діелектриком 37
3.2 Хвилевод, який частково заповнено ізотропним діелектриком 40
3.3 Хвилевод, який заповнено анізотропним діелектриком 44
РОЗДІЛ 4 ВТРАТИ ЕНЕРГІЇ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК ВНАСЛІДОК ВЗАЄМОДІЇ З ДІЕЛЕКТРИЧНИМ ЦИЛІНДРОМ 50
4.1. Постановка завдання і основні рівняння ……. 50
4.2 Чисельний аналіз втрат енергії електрона 59
ВИСНОВКИ …… 64

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ …….. 65
ДОДАТОК А Відомість атестаційної роботи магістра……. 68
ДОДАТОК Б Презентація …….. 69

ВСТУП

Ефект Вавилова-Черенкова до теперішнього часу зберігає свою актуальність в зв'язку з різними напрямками його застосування, про що свідчить великий список літератури з даної тематики, наприклад [1–10].

Спонтанний ефект Вавилова-Черенкова отримав теоретичне обґрунтування в роботах І.Є. Тамма і І.М. Франка [3]. Вираз для інтенсивності випромінювання було отримано шляхом рішення рівнянь класичної електродинаміки в середовищі. При цьому інтенсивність випромінювання визначалася як потік вектора Пойнтінга через циліндричну поверхню, яка охоплювала траєкторію зарядженої частинки. Дана задача має важливе методичне значення, оскільки її висновки якісно узагальнюються на більш складні види руху заряду.

Історія відкриття. У 1934 році 30-річний радянський аспірант Павло Олексійович Черенков виконував в лабораторії Сергія Івановича Вавилова серію практичних експериментів з вивчення нетеплового випромінювання прозорих рідин під дією гамма-випромінювання. Досліджуване випромінювання було слабким з синюватим відтінком. Спочатку вважалося, що подібне випромінювання є люмінесценцією. Як відомо люмінесценція є випромінювання, яке викликане переходом електронних оболонок атомів з одного енергетичного стану (орбіти) в інше енергетичний стан (орбіту). Однак детальне вивчення П.А. Черенковим випромінювання рідин з синюватим відтінком показало, що воно являє собою потоки електронів, що рухаються зі швидкостями, що перевищують фазову швидкість світла в повітрі. Фактично високоенергетичні фотони гамма-випромінювання вибивали електрони з електронних оболонок атомів молекул рідини і відправляли їх вільне плавання. Цей факт вдалося з'ясувати на основі безлічі відмінностей від люмінесценції:

-випромінювання спостерігалося у всіх прозорих рідин;

-випромінювання не змінювалося при зміні хімічного складу прозорих рідин;

-випромінювання спостерігалася поляризація, в напрямку вектора поширення частинок;

-випромінювання не спостерігалося жодного з видів гасіння. Гасінням називається властивість люмінесценції зменшувати інтенсивність випромінювання під дією змін температури або різних коливальних рухів.

Спочатку виявлення нового випромінювання було сприйнято науковим співтовариством з великим скепсисом. Так проводилася аналогія з помилковою інтерпретацією так званих N-променів. У зв'язку з цим редактори найбільш авторитетного наукового журналу «Nature» відмовилися опублікувати наукову статтю про відкрите явище [1, 2].

Першу теоретичну інтерпретацію виявленого випромінювання дав С.І. Вавилов. Він вважав, що випромінювання викликане рухом електронів в середовищі на відміну від звичайного теплового випромінювання, яке викликається рухом атомів. При цьому Вавилов спирався на класичну термодинаміку, один з постулатів якої звучав про те, що будь-яка заряджена частинка, яка рухається з прискоренням, є джерелом випромінювання. Гіпотезу С.І. Вавилова довелося відкинути, так як вона не пояснювала слабкої залежності інтенсивності черенковского випромінювання від порядкового номера хімічних елементів середовища в Періодичній таблиці Менделєєва. У 1937 році радянські фізики Ігор Євгенович Тамм і Ілля Михайлович Франк опублікували ряд теоретичних робіт з докладним обґрунтуванням механізму випромінювання, яке сьогодні прийнято в науковому світі за істину. В їх роботі черенковское випромінювання виникало внаслідок рівномірного і прямолінійного руху заряджених частинок зі швидкостями, які перевищують швидкість світла в середовищі.

1 ЕФЕКТ ВАВИЛОВА–ЧЕРЕНКОВА В ІЗОТРОПНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

1.1Рівняння Максвелла

Нехай через необмежене ізотропне середовище з діелектричною сталою ε і магнітною проникністю μ рухається рівномірно і прямолінійно точкова заряджена частинка. Швидкість частинки позначимо через **v**, заряд частинки — через q. Завдання полягає в тому, щоб визначити поля: електричне **E** і магнітне **H**, що виникають в середовищі при русі зарядженої частинки. Запишемо рівняння Максвелла і матеріальні рівняння:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \\ \operatorname{rot}\mathbf{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}; \\ \operatorname{div}\mathbf{B} &= 0,\ \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}; \\ \operatorname{div}\mathbf{D} &= 4\pi\rho,\ \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}. \end{aligned}\right\}. \tag{1.1}$$

У цих рівняннях ρ і **j** позначають густина заряду і густина струму, що обумовлені рухомим точковим зарядом. Якщо частинка в момент часу t перебуває в точці $x - \mathbf{v}t$, то ρ(x, t) і **j**(x, t) виражаються через дельта-функцпю від аргументу $x - \mathbf{v}t$:

$$\left.\begin{aligned} \rho &= q\delta(x - \mathbf{v}t) \\ \mathbf{j} &= q\mathbf{v}\delta(x - \mathbf{v}t) \end{aligned}\right\}. \tag{1.2}$$

Зручно перейти, як це завжди і робиться, від полів **E** і **H** до потенціалів **A** і φ, через які **E** і **H** визначаються наступним чином:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\operatorname{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}; \\ \mathbf{H} &= \frac{1}{c}\operatorname{rot}\mathbf{A} \end{aligned}\right\}. \tag{1.3}$$

Тоді від рівнянь для **E** і **H** можна перейти до рівнянь для вектор-потенціалу **A** і скалярного потенціалу φ**:**

$$\left.\begin{aligned} \Delta\mathbf{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c}\mathrm{j} + \mathrm{grad}\left(\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathrm{div}\mathbf{A}\right); \\ \varepsilon\left(\Delta\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\mathbf{A}\right) = -4\pi\rho \end{aligned}\right\}. \tag{1.4}$$

Як відомо, рівняння (1.4) не визначають **A** і φ однозначно, тому можна накласти на **A** і φ деякий додаткову умову, вибравши його так, щоб спростити систему (1.4). Якщо на потенціали накласти умову

$$\mathrm{div}\mathbf{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \ . \tag{1.5}$$

Система рівнянь (1.4) прийме наступний симетричний вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\mu}\left(\Delta\mathbf{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}\right) = -\frac{4\pi}{c}\ q\mathbf{v}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}t), \\ \varepsilon(\Delta\varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi q\partial(\mathbf{x} - \mathbf{v}t). \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

Ці рівняння для потенціалів поля, створеного точковою частинкою, найчастіше є вихідними для розгляду різних завдань, пов'язаних як з випромінюванням Вавилова–Черенкова, так взагалі з проходженням заряджених частинок через речовину.

Однак в деяких випадках (приклади будуть розібрані нижче) виявляється зручніше накласти на потенціали замість додаткової умови.

$$\mathrm{div}\mathbf{A} = 0. \tag{1.7}$$

При виконанні цієї умови система рівнянь (1.4) для **A** і φ набирає вигляду.

$$\varepsilon\Delta\varphi = -4\pi q\delta(\mathbf{x}-\mathbf{v}t),$$

$$\frac{1}{\mu}\left(\Delta\mathbf{A}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}\right) = -\frac{4\pi}{c}q\mathbf{v}\delta(x-vt)+\frac{\varepsilon}{c}\mathrm{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t}. \quad (1.8)$$

Зрозуміло, що обидві системи рівнянь, (1.6) і (1.8), дають для полів **E** і **H** одні й ті самі висловлювання, і з цієї точки зору байдуже, яку з них вирішувати. Тому, якщо необхідно визначити тільки **E** і **H**, зручніше користуватися системою рівнянь (1.6), так як в цьому випадку:

$$\mathbf{A} = \varepsilon\mu\frac{v}{c}\varphi. \quad (1.9)$$

Однак часто буває корисно знати не повне електромагнітне поле, а тількипоперечну його частина, $\mathbf{E}^{tr}$, **H**, що задовольняє співвідношенню $\mathrm{div}\mathbf{E}^{tr} = 0$. Ця частина поля описує випромінювання заряду, що проходить через діелектрик. При необхідності визначити поперечне поле зручніше користуватися системою рівнянь (1.8), так як вектор-потенціал **A**, що задовольняє системі рівнянь (1.8), відразу дає поперечне поле:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E}^{tr} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t},\\ \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\mathbf{A}\end{aligned}\right\}. \quad (1.10)$$

Надалі ми будемо користуватися як однією, так і іншої калібруванням потенціалів[4,5].

1.2. Діелектрична стала

Зупинимося тепер на значенні величин ε і μ -діелектричної постійної і магнітної проникності, що входять в рівняння поля. Якщо середовище, в якій рухається частинка, не володіє дисперсією та хвилі всіх частот поширюються в ній однаковим чином, то ε і μ можна вважати просто числами. При цьому

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{D} &= \varepsilon\mathbf{E},\\ \mathbf{B} &= \mu\mathbf{H},\end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

де **D** і **B**–електрична і магнітна індукції. Якщо ж середовище виявляється диспергируючим, то ε і μ мають різні значення в залежності від частоти електромагнітної хвилі, що розповсюджується в середовищі. Тому, для того щоб записати зв'язок, скажімо між **D** і **E**, потрібно обидві ці величини розкласти в інтеграли Фур'є за часом:

$$\mathbf{E}(x,t) = \int \mathbf{E}_\omega(\mathbf{x})e^{i\omega t}d\omega;$$

$$\mathbf{D}(x,t) = \int \mathbf{D}_\omega(\mathbf{x})e^{i\omega t}d\omega. \tag{1.12}$$

Зв'язок між $\mathbf{D}_\omega(\mathbf{x})$і $\mathbf{E}_\omega(\mathbf{x})$ виявляється простий:

$$\mathbf{D}_\omega = \varepsilon(\omega)\mathbf{E}_\omega,$$

де $\varepsilon(\omega)$ — діелектрична проникність.

У диспергуючому середовищі вираз $\varepsilon\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$ має сенс інтеграла по всім частотам :

$$\varepsilon\mathbf{E} = \int \varepsilon(\omega)\mathbf{E}_\omega e^{i\omega t}d\omega. \tag{1.13}$$

За формулами операційного обчислення $\varepsilon(\omega)$ можна винести за знак інтеграла, виконавши одночасно формальну заміну ω на $-i\frac{\partial}{\partial t}$. Тоді з (1.13) отримуємо

$$\varepsilon = \varepsilon\left(-i\frac{\partial}{\partial t}.\right) \tag{1.14}$$

Таким чином, діелектрична проникність у фур'є-представленні є функція частоти, а в координатному представленні — оператор, що залежить від диференціювання за часом [6]. Все сказане відноситься і до $\mu(\omega)$

1.3 Якісний розгляд

У цьому розділі ми розглянемо деякі якісні сторони явища проходження частинки через середовище. Для цього зручно скористатися рівняннями для потенціалів поля в формі (1.6).

Якщо заряд, рівномірно рухається в необмеженій однорідному середовищі, випромінює, то поле випромінювання має бути стаціонарно щодо заряду і переміщатися зі швидкістю заряду. Подивимося, за яких умов система рівнянь (1.6) для потенціалів поля може мати рішенням плоску електромагнітну хвилю і в якій поверхнями постійної фази є площини, перпендикулярні хвильовим вектором **k**.

$$e^{ik(x-vt)}. \tag{1.15}$$

Ці площини переміщаються в просторі зі швидкістю **v**, яка дорівнює швидкостухомого заряду (рисунок 1.1).

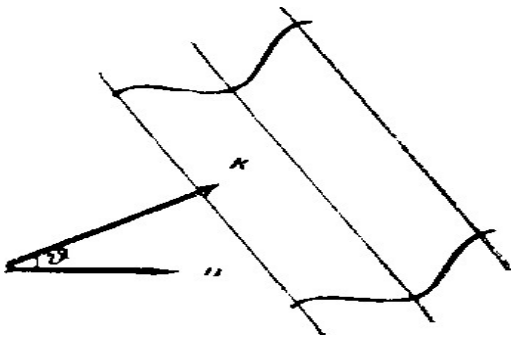

Рисунок 1.1- Площина яка переміщається в просторі

Зауважимо, що у всіх точках, крім точки $\mathbf{x} = \mathbf{vt}$, де знаходиться рухомий заряд, система рівнянь (1.6) є однорідною:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\mu}\left(\Delta \mathbf{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 A}{dt^2}\right) = 0, \\ \varepsilon\left(\Delta\varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.16}$$

Підставляючи в систему (1.16) плоску хвилю (1.15), знаходимо:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\mu(\mathbf{kv})}\left[k^2 - \varepsilon(\mathbf{kv})\mu(\mathbf{kv})\frac{(\mathbf{kv})^2}{c^2}\right] = 0, \\ \varepsilon(\mathbf{kv})\left[k^2 - \varepsilon(\mathbf{kv})\mu(\mathbf{kv})\frac{(\mathbf{kv})^2}{c^2}\right] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.17}$$

У цих рівняннях ε і μ залежать від частоти $\mathbf{kv}$ плоскої хвилі (1.15).

З рівнянь (1.17) бачимо, що із заданною швидкістю v в середовищі можуть розповсюджуватися два типи хвиль (1.15) з двома різними співвідношеннями між$\mathbf{k}$ і $\mathbf{v}$:

$$k^2 = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}(\mathbf{kv})^2, \tag{1. 18а}$$

$$\varepsilon(\mathbf{kv}) = 0. \tag{1.18б}$$

Електромагнітні хвилі, що задовольняють умові (1.18а), називаються хвилями Вавилова-Черенкова. Умові (1.18а) можна надати просту форму, скориставшись тим, що :$\mathbf{kv} = kv\cos\vartheta$

$$\left.\begin{aligned} \cos^2\vartheta = \frac{1}{\varepsilon\mu\beta^2}, \\ \cos\vartheta = \pm\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}\beta} = \pm\frac{v_\Phi}{v}, \end{aligned}\right\} \tag{1.19}$$

де $v_\Phi = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{n}$ – фазова швидкість електромагнітної хвилі в середовищі.

З двох знаків в (1.19) слід вибрати знак плюс, так як хвильової вектор хвилі, що розповсюджується повинен мати позитивну компоненту в напрямку швидкості. Таким чином, проекція хвильового вектора на швидкість частинки, або величина $\cos\vartheta$, визначена[7]. Залишається ще визначити компоненту k_r^2 хвильового вектора, перпендикулярну швидкості v. Для квадрата цієї компоненти, виходить таке значення:

$$k_r^2 = k^2 sin^2\vartheta.$$

Облік формул (1. 18а) і (1. 19) дає :

$$k_r^2 = \frac{(kv)^2}{v^2}(\varepsilon\mu\beta^2 - 1).$$

Звідси визначається з точністю до знака. Знак слід вибирати так, щоб потік електромагнітної енергії був направлений від шляху частинки. Умова (1.19) визначає реальну черенковську хвилю лише в тому випадку, якщо фазова швидкість електромагнітної хвилі менше швидкості зарядженої частинки.

$$\frac{1}{n\beta} = \frac{v_\varphi}{v} < 1. \qquad (1.20)$$

Умова (1. 19) можна отримати з простих фізичних міркувань, як це було зроблено І. М. Франком. Припустимо, що в кожній точці свого шляху електрон випромінює сферичні хвилі, що поширюються зі швидкістю $v_\phi = \frac{c}{n}$ (рисунок 1.2).

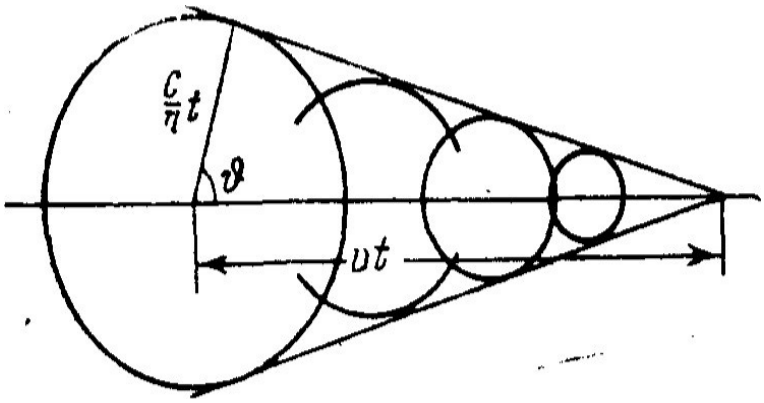

Рисунок 1.2-Інтерференція хвиль що розповсюджується під кутом до напрямку руху заряду

Інтерференція цих хвиль поведе до утворення хвилі, що розповсюджується під кутом до напрямку руху заряду, причому:

$$cos\vartheta = \frac{1}{n\beta}.$$

Фазова швидкість хвиль Вавилова-Черенкова така ж, як у всіх поперечних електромагнітних хвиль.

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{\mathbf{kv}}{k} = vcos\vartheta = \frac{c}{n}, \quad (1.21).$$

Як випливає з (1.20), фазова швидкість хвиль Вавилова-Черенкова завжди менше швидкості зарядженої частинки. Групова швидкість хвиль Вавилова–Черенкова[8,9].

$$v_g = \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}}{k}\frac{2cn}{2n^2+\omega\frac{dn^2}{d\omega}}. \quad (1.22)$$

В області нормальної дисперсії$(\frac{dn^2}{d\omega} > 0)$ групова швидкість хвиль Вавилова-Черенкова завжди менше фазової.

Умова (1.18б) також описує хвилі, які можуть випускатися зарядом, що рухається в середовищі рівномірно і прямолінійно. Ці хвилі у багатьох відношеннях відрізняються від хвиль Вавилова-Черенкова. Умова випромінювання Вавилова-Черенкова (1.20) може виконуватися в деякій області безперервної зміни частоти. Це означає, що випромінювання Вавилова-Черенкова в необмеженому середовищі має безперервним спектром. Навпаки, умова (1.18б) виконується, взагалі кажучи, $\omega = \mathbf{kv}$ для дискретних фіксованих значень, де a-номер кореня рівняння (1.18б).

$$\omega_a = (kv)_a,$$

Фазова швидкість хвиль, які відповідають умові (1.18б), визначається рівністю:

$$v_\Phi = \frac{\omega_a}{k} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(\omega_a)\mu(\omega_a)}} = \infty, \qquad (1.23)$$

Групова швидкість цих хвиль дорівнює нулю. Це означає, що енергія, витрачена рухомим зарядом на збудження таких хвиль в деякомуелементі обсягу середовища, не переноситься збудженими хвилями[10,11]. На відміну від хвиль Вавилова-Черенкова, енергія коливань «запасається» в середовищі, і виникають локальні коливання аналогічні поздовжнім коливанням електронної плазми з частотою.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m}}, \qquad (1.24)$$

де n–число електронів в одиниці об'єму,

e і m–заряд і маса електрону.

Хвилі, що задовольняють умові (1.186), називаються поляризаційними хвилями. Взагалі кажучи, ці хвилі можуть бути і затухаючими, так як умова

(1.18б) накладає обмеження лише на компоненту вілнового вектора, паралельну швидкості.

Таким чином, заряджена частка, що рухається в речовині одномірно і прямолінійно, може порушувати хвилі двох типів: хвилі Вавилова-Черенкова і поляризаційні. Поляризаційні хвилі іноді також називають Боровським. Нижче ми покажемо, що хвилі Вавилова-Черенкова є поперечними, а Боровські — поздовжніми [12].

1.4 Поле точкової зарядженої частинки, що рухається

Нижче ми будемо виходити з системи рівнянь (1.6) для потенціалівелектромагнітного поля. Буде також проведено рішення системи рівнянь (1.8), яке відразу дає поділ полів на поздовжні і поперечні В силу співвідношення (1.9) досить вирішити одне з двох рівнянь системи (1.6).

$$\partial(x - vt) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{ik(x-vt)}\,\mathbf{dk}. \qquad (1.25)$$

Рішення першого рівняння системи (1.6) «поділом» на оператор Даламбера відразу дає вираз для вектор-потенціалу **A**:

$$\mathbf{A} = \frac{q}{2\pi^2}\frac{v}{c}\int \frac{\mu(kv)e^{ik(x-vt)}}{k^2 - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}(kv)^2}\,\mathbf{dk}. \qquad (1.26)$$

Якщо **(kv)** і μ**(kv)**-комплексні величини і середовище поглинає електромагнітні хвилі, то обчислення цього інтеграла є однозначна операція. Якщо ж середовище є прозорою для електромагнітних хвиль (що відповідає дійсним функціям ε і μ), інтегрування в (1.26) стає неоднозначним, так як підінтегральна функція в цьому випадку містить полюси на шляху інтегрування, відповідні виконання одного з двох умов (1.18). Для інтеграла (1.26) полюси

мають місце при виконанні умов (1.18а), для інтеграла–при виконанні умов (1.18а) і (1.18б).

$$\varphi = \frac{q}{2\pi^2}\int \frac{e^{ik(x-vt)}dk}{\delta(kv)\left[k^2-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}(kv)^2\right]} \tag{1.27}$$

Якщо обмежуватися запізнілими потенціалами, інтегрування в формулах (1.26) і (1.27) може бути зроблено однозначним, для чого необхідно всі інтеграли брати в сенсі головного значення (PV)

$$\frac{1}{k^2-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}(kv)^2} = \frac{P.V.}{k^2-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}(kv)^2} - i\pi\frac{kv}{|kv|}\partial\left\{k^2-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\right\},$$

$$\frac{1}{\varepsilon(kv)} = \frac{P.V.}{\varepsilon(kv)} - i\pi\frac{kv}{|kv|}\partial\{\varepsilon(kv)\}. \tag{1.28}$$

Для подальшого зручно ввести циліндричну систему координат r, φ, z з віссю z, що збігається з лінією руху заряду[13,14]. Одночасно введемо позначення $\mathbf{kv} = \omega$. Інтегруючи вираз (1.26) для **A** по компонентам хвильового вектора **k**, перпендикулярним швидкості частинки **v**, і з огляду на перший співвідношення (1.28), отримуємо :

$$A_z = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\omega}{v}(z-vt)}\, a(\omega,r)d\omega, \tag{1.29}$$

$$a(\omega,r) = \begin{Bmatrix} \frac{q}{\pi c}\mu(\omega)K_0\left(\frac{|\omega|}{v}\sqrt{1-\varepsilon\mu\beta^2}r\right) \text{ при } \omega > 0, \\ \text{комплексно повязаний при } \omega < 0. \end{Bmatrix} \tag{1.30}$$

Функція K_0 –циліндрична функція мнимого аргументу (функція Макдональда). Ця функція має логарифмічну особливість в нулі і експоненціально загасає при великих значеннях аргументу:

$$K_0(x) \approx ln\frac{1}{x}1 \ (|x| \ll 1), \tag{1.31}$$

$$K_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x}(|x| \ll 1). \tag{1.32}$$

Аналогічним чином записується вираз для скалярного потенціалу: φ

$$\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{\omega}{v}(z-vt)}\Phi(\omega,r)d\omega, \tag{1.33}$$

де,

$$\Phi(\omega,r) = \begin{cases} \frac{q}{\pi v}\frac{1}{\varepsilon(\omega)}K_0\left(\frac{|\omega|}{v}\sqrt{1-\varepsilon\mu\beta r}\right) \text{при } \omega > 0, \\ \text{комплексно повязаний при } \omega < 0. \end{cases} \tag{1.34}$$

У разі прозорого середовища вираження для $a(\omega,r)$і $\Phi(\omega,r)$ действітельпи, якщо тому інтервалі частот, в якому не виконано умову випромінювання Вавилова–Черенкова. В цьому випадку **A** і φ розкладаються по гармонікам, експоненціально загасаючим при $r \longrightarrow \infty$. Інша картина має місце, якщо умова випромінювання Вавилова-Черенкова виконана. В цьому випадку компоненти поля, що відповідають частоті не згасають експоненціально. Вважаючи $\varepsilon\mu\beta^2 < 1$, маємо:

$$\sqrt{1-\varepsilon\mu\beta^2} = -i\sqrt{\varepsilon\mu\beta^2-1}, \text{ де } (\varepsilon\mu\beta^2 > 1) \tag{1.35}$$

Використовуючи формулу (1.32), знаходимо, що при $\varepsilon\mu\beta^2 > 1$ виконанні умови випромінювання Вавилова–Черенкова, гармоніки $a(\omega$, r) і $\Phi(\omega$, r) описують конічну хвилю при $r \to \infty$:

$$a(\omega,r), \ \ \Phi(\omega,r) \approx \frac{i}{\sqrt{k_r r}}e^{i\frac{\omega}{v}(z-vt)+ik_r r-i\frac{\pi}{4}}. \tag{1.36}$$

де,

$$k_r = \frac{\omega}{v}\sqrt{\varepsilon\mu\beta^2 - 1} = \frac{\omega}{v} tg\vartheta, \tag{1.37}$$

де ϑ–кут, який становить напрямок поширення хвилі Вавилова–Черенкова зі швидкістю частки.

При $\omega < 0$ права частина рівності (1.36) переходить в комплексно поєднане вираз.

Таким чином, якщо $\mu\beta^2 > 1$, то поле складається з хвиль, що йдуть в нескінченність під кутом осі z, по якій рухається заряд.ϑ

Виходячи з виразів (1.29) і (1.33) для потенціалів A іφ, можемо отримати формули для полів **E** і **H**. Відмінними від нуля опиняються тільки компоненти E_z, E_r і.H_ϕ

$$\left.\begin{aligned} E_z &= -\frac{i}{c}\int e^{i\frac{\omega}{v}(z-vt)\frac{1-\varepsilon\mu\beta^2}{\varepsilon\mu\beta^2}} a(\omega,r)\omega\, d\omega, \\ E_r &= -\int e^{i\frac{\omega}{v}(z-vt)\frac{1}{\varepsilon\mu\beta^2}} \frac{\partial a(\omega,r)}{\partial r} d\omega, \\ H_\varphi &= -\int e^{i\frac{\omega}{v}(z-vt)} \frac{\partial a(\omega,r)}{\partial r}\, d\omega, \end{aligned}\right\}. \tag{1.38}$$

де $a(\omega,r)$ визначається рівністю (1.30); інтеграли по ω беруться в межах від до $+\infty\ -\infty$.

1.5 Втрати енергії зарядженої частинки

Знайдемо вирази для втрати енергії зарядженої частинки, що рухається в середовищі. Це можна зробити декількома способами. Перший з них (Тамм і Франк) полягає в наступному. Оточимо шлях частинки циліндричною поверхнею радіуса b, вісь якої збігається з шляхом частинки. Очевидно, потік вектора

Пойнтінга через цю поверхню характеризує втрати енергії частинки в одиницю часу. Розділивши цю величину на швидкість частинки v, знайдемо втрати енергії на одиницю шляху [15].

Щоб отриманий вираз давав повні втрати енергії частинки, потрібно радіус циліндричної поверхні b спрямувати до нуля. Однак це зробити не можна, так як на малих відстанях від рухомої частинки класична електродинаміка середовища непридатна. Надалі, якщо не обумовлено, під b буде матися на увазі мінімальне значення, при якому класична електродинаміка середовища ще справедлива. Величина b, за оцінкою Шонберга дорівнює $\frac{c}{\omega_0}$ де ∞ –плазмова частота середовища, що визначається (1.24). Втрата енергії частинки на зіткнення з параметром удару, меншим b, визначаються за квантовими формулами Бете-Блоха[16].

Для втрати енергії частинки, яка визначається як потік вектора Пойнтінга через циліндричну поверхню радіуса b, виходить наступне вираз :

$$\left(\frac{dW}{dz}\right)_b = \frac{2q^2b}{\pi v^2} Re \int_0^\infty \mu(\omega)\left(\frac{1}{\varepsilon\mu} - \beta^2\right) k_r(\omega) K_1(k_r b) K_0(k_r b) i\omega \, d\omega, \quad (1.39)$$

де,

$$k_r^2 = \frac{\omega^2}{v^2}(1 - \varepsilon\mu\beta^2), \quad (1.40)$$

Знак k_rслід вибирати так, щоб виходили запізнілі потенціали. Якщо ε та μ комплексні функції частоти, потрібно, щоб було $Rek_r > 0$.Якщо ε та μ дійсні і $\varepsilon\mu\beta^2 < 1$, то.$k_r\varepsilon$ і $\mu\, k_r\varepsilon$ та $\mu\varepsilon\mu\beta^2 > 1 k_r = -i|k_r|$

Вираз (1.39) є вихідним при аналізі втрат енергії частки в речовині. Щоб отримати чисельне значення втрат енергії, необхідно задати аналітичну залежність і від частоти.

В роботі Тамма і Франка втрати енергії в прозорому середовищі на випромінювання Вавилова-Черенкова були отримані в такий спосіб[17]. Спрямуємо радіус циліндра b до нескінченності. При цьому формула (1.39) дає

втрати на випромінювання, що йде в нескінченність. Користуючись асимптотическими виразами для K_0 і K_1 (див. (1.32); ця ж формула має місце і для K_1) і враховуючи, що потрібно визначити тільки дійсну частину інтеграла отримуємо:

$$\left(\frac{dW}{dz}\right)_{b\to\infty} = \frac{q^2}{c^2}\int_{\substack{\varepsilon\mu\beta^2>1\\ \omega>0}}\left(1-\frac{1}{\varepsilon\mu\beta^2}\right)\mu(\omega)\omega\, d\omega. \qquad (1.41)$$

Інтегрування ведеться тільки по області частот, для яких виконується умова випромінювання Вавилова-Черенкова, виписане під інтегралом.

Відзначимо тут, що в більшості робіт враховувалися тільки діелектричні властивості середовища і належало $\mu = 1$.

Формула (1.41) дає лише частину втрат енергії частинки. Фермі виходячи з (1.39), отримав вираз для повних втрат енергії частинки. При цьому Фермі розглядав спочатку поглинає середовище і в кінцевому результаті спрямував загасання до нуля. Той же результат можнаотримати і не вводячи загасання, за допомогою заміни (1. 28). У цьому випадку інтегрування формули (1.39) дає :

$$-\left(\frac{dW}{dz}\right)_b = \frac{q^2}{v^2}\sum_s \frac{\omega_s}{|s(\omega_s)|}k_s b\cdot K_1(k_s b)K_0(k_s b) + \frac{q^2}{c^2}\int_{s\mu\beta^2>1}\left(1-\frac{1}{s\mu\beta^2}\right)\mu\omega\, d\omega \quad ,(1.42)$$

$$k_s = k_\gamma(\omega_s) = \frac{\omega_s}{v}, \qquad (1.43)$$

де ω_s −корені рівняння (1.18б).

При цьому ми скористалися формулою:

$$\sigma\{\varepsilon(\omega)\} = \sum_s \frac{1}{|\varepsilon'(\omega_s)|}\sigma(\omega-\omega_s).$$

Формула (1.42) показує, що частинка, що рухається через середовище, випромінює хвилі Вавилова-Черенкова, а також хвилі тих частот, для яких діелектрична постійна середовища звертається в нуль.

Перший доданок в (1.42) дає так звані поляризаційні втрати. Якщо прийняти для вираження$\varepsilon(\omega)$

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_0^2}{\omega_s^2 - \omega^2}. \tag{1.44}$$

Формула поляризаційних втрат прийме вигляд:

$$\left(\frac{dW}{dz}\right)_{\text{поляр}} = \frac{q^2\omega_0}{v^2}\frac{\Omega b}{v}K_0\left(\frac{\Omega b}{v}\right)K_1\left(\frac{\Omega b}{v}\right), \tag{1.45}$$

де,$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_s^2}$ – та частота на якій $\varepsilon(\omega)$

$\frac{\Omega b}{v} \ll 1$, формула приймає простий вигляд:

$$-\left(\frac{dW}{dz}\right) = \frac{q^2\omega_0^2}{v^2} ln\frac{v}{\Omega b}. \tag{1.46}$$

При $\frac{\Omega}{v} \ll 1$ (малі швидкості або великі значення радіуса циліндра b формула (1.45) дає експоненціально малу величину. Втім, при зовсім малих швидкостях частки весь підхід стає непридатним.

Втрати на випромінювання Вавилова-Черенкова визначаються другим доданком формули (1.42). Якщо, а визначається формулою (1.44),$\mu = 1\varepsilon(\omega)$ інтеграл в другому доданку дорівнює:

$$-\left(\frac{dW}{dz}\right)_{\text{В.---Ч.}} = \begin{cases} \frac{q^2\omega_0^2}{v^2}[-\beta^2 - \ln(1-\beta^2)] \text{ при } \beta < \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(0)}}, \\ \frac{q^2\omega_0^2}{v^2}\left[-\frac{1-\beta^2}{\varepsilon(0)-1} + ln\frac{\varepsilon(0)}{\varepsilon(0)-1}\right] \text{при } \beta > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(0)}}. \end{cases} \tag{1.47}$$

На рисунку 1.3 наведено графік $\varepsilon(\omega)$ (1.44). На графіку проведена пряма, відстань якої від осі абсцис дорівнює $\frac{1}{\beta^2}$.Область частот випромінювання Вавилова-Черенкова, відповідна $\varepsilon(\omega) > \frac{1}{\beta^2}$, заштрихована. Поляризаційні втрати відбуваються тільки на одній частоті, при якій крива $\varepsilon(\omega)$ перетинає вісь абсцис.

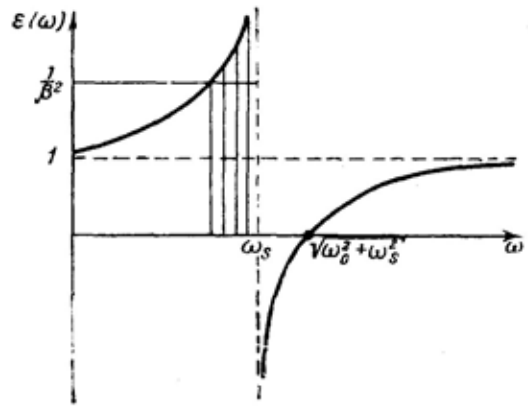

Рисунок 1.3-Область частот випромінювання $\varepsilon(\omega)$

Формула (1.42) дає ту частину втрат енергії частинки, яка описується класичною електродинаміки середовища. Щоб отримати повні втрати енергії, потрібно до (1.42) додати втрати енергії на зіткнення з параметром удару менше b, обчислені за квантовими формулами. Втрати енергії частинкиможна визначити і іншимспособом.

Обчислюючи значення електричного поля в точці, де знаходиться частинка ми бачимо що, поле гальмує частинку.

$$\frac{dW}{dx} = qE_z \Big|_{\substack{z \to vt \\ r \to 0}}. \qquad (1.48)$$

Ця формула, де E_z береться з (1.38), дає для втрати енергії ті ж результату, що і обчислення потокувектора Пойнтінга.

Відзначимо ще один спосіб визначення втрат енергії частинки. Він полягає в обчисленні зростання енергії електромагнітного поля в середовищі, в якій

рухається частинка. Очевидно, втрати енергії частинки в одиницю часу визначаються виразом

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{8\pi}\frac{d}{dt}\int_v (\varepsilon E^2 + \mu H^2)dV. \tag{1.49}$$

Розглянемо якісно, як змінюється поле випромінювання Вавилова-Черенкова на великих відстанях від частинки. Як вже говорилося, поле на великих відстанях від заряду являє собою суму хвиль виду (1.36). Ці хвилі будуть відчувати інтерференційне посилення, якщо фази їх близькі в деякому інтервалі частот :

$$\frac{w}{v}(z - vt) + k_r r - \frac{\pi}{4} = const,$$

або

$$z - vt + vr\frac{dk_r}{d\omega} = 0. \tag{1.50}$$

Якщо ця умова не виконується, то у хвиль з близькими частотами фази різні і хвилі взаємно гасяться. Позначимо

$$v\frac{dk_r}{d\omega} = g. \tag{1.51}$$

Нехай в інтервалі частот Вавилова-Черенкова величина g укладена в межах від g_{min} до g_{max}. Тоді для даного моменту часу t поле випромінювання буде відмінно від нуля в просторі між конусами.

$$z + g_{min}r = vt \text{ і } z + g_{max}r = vt. \tag{1.52}$$

Так як в точках простору поза цими конусів рівняння (1.50) не має коренів. Таким чином, в заданій точці *r*,*z* поле випромінювання Вавилова-Черенкова буде відмінно від нуля тільки протягом кінцевого інтервалу часу:

$$\Delta t = \frac{g_{max} - g_{min}}{v} r. \qquad (1.53)$$

Тривалість імпульсу в диспергируючому середовищі збільшується зі зростанням відстані *r* від осі *z* через розпиванню хвильового пакета імпульсу випромінювання. Питання про тривалість спалаху черенковского випромінювання детально розібраний І. М. Франком[18] .

2 ЕФЕКТ ВАВИЛОВА–ЧЕРЕНКОВА В АНІЗОТРОПНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

2.1 Матеріальні рівняння

Електродинаміка кристалічних середовищ відрізняється від електродинаміки ізотропних тим, що діелектрична й магнітна проникності в кристалах не є скалярними, а тензорними функціями частоти. рівняння Максвелла в кристалі можна записати формально так само, як і в ізотропному середовищі[19]. Однак співвідношення:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \tag{2.1}$$

В кристалі слід розуміти як сукупність трьох рівностей:

$$\left.\begin{aligned} D_x &= \varepsilon_{11}E_x + \varepsilon_{12}E_y + \varepsilon_{13}E_z \\ D_y &= \varepsilon_{21}E_x + \varepsilon_{22}E_y + \varepsilon_{23}E_z \\ D_z &= \varepsilon_{31}E_x + \varepsilon_{32}E_y + \varepsilon_{33}E_z \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

де $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12} \ldots \varepsilon_{33}$-компоненти тензора діелектричної постійної.

Отже, в кристалі вектор **D** не спрямований по **E** і становить з **E** деякий кут.

Нижче ми не будемо враховувати магнітної анізотропії та вважатимемо $\mu = 1$. Випадок магнітної анізотропії розібраний в роботі В. Е. Пафомова. Крім того, виберемо за осі координат головні осі еліпсоїда поляризації в кристалі. У вибраній системі відмінними від нуля виявляються тільки діагональні компоненти тензора діелектричної постійної ε і електрична проникність μ тому співвідношення (1.2) між **D** і **E** істотно спрощується, набуваючи вигляду:

$\mu = \varepsilon_{11}\varepsilon_{12}\varepsilon_{33}$,

$$D_a = \varepsilon_a E_a, \tag{2.3}$$

де індекси a = 1, 2, 3 відповідають осях x, y, z.

При переході до системи головних осей слід мати на увазі, що положення головних осей не залишаються незмінними в просторі. Самеу кристалів триклинної і моноклінної систем положення головних осей еліпсоїда поляризації залежить від частоти. Це явище називається дисперсією осей. Нижче ми не будемо враховувати дисперсії осей, маючи на увазі,що навіть в разі триклинної або моноклінної симетрії дисперсія осей в спектральної області випромінювання Вавилова-Черенкова виражена порівняно слабо.

2.2. Поле точкової зарядженої частинки, що рухається

Наведемо вирази для потенціалів **A** і φ поля заряду, що рухається в кристалі зі швидкістю v:

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{q}{2\pi^2}\int e^{ik(x-vt)}\frac{dk}{(k\varepsilon k)}, \\ \mathbf{A} &= -\frac{q^2}{2\pi^2 c}\int \Lambda^{-1}\left[s - k\frac{k\varepsilon\Lambda^{-1}s}{k\varepsilon\Lambda^{-1}k}\right] \end{aligned}\right\}, \tag{2.4}$$

де, $s = v - \varepsilon k\frac{kv}{(kvk)}$.

$$\Delta = \varepsilon\frac{(kv)^2}{c^2} - k^2, \tag{2.5}$$

Нагадаємо, що в системі головних осей кристала, яку ми вибрали, величини і являють собою діагональні оператори. Тому, наприклад, $\Delta\varepsilon$

$$\left.\begin{array}{c}(k\varepsilon k)=\varepsilon_x k_x^2+\varepsilon_y k_y^2+\varepsilon_z k_z^2\\ \varepsilon k=\left(\varepsilon_x k_x^2,\varepsilon_y k_y^2,\varepsilon_z k_z^2\right)\\ (k\varepsilon\Delta^{-1}k)=\frac{\varepsilon_x k_x^2}{\Delta_r}+\frac{\varepsilon_y k_y^2}{\Delta_y}+\frac{\varepsilon_z k_z^2}{\Delta_z}\end{array}\right\}. \quad (2.6)$$

Формули повністю визначають поле в кристалі, створене: рухомим зарядом. Потенціали A і φ можна також визначити методом Гамільтона [20].

2.3 Фазова і групова швидкості хвиль Вавилова-Черенкова у кристалі

Умови випромінювання Вавилова-Черенкова в кристалі визначають кут, який складають нормаль До хвилі Вавилова-Черенкова і швидкість частинки У. Як відомо, в кристалі нормаль до хвилі не збігається з напрямком потоку енергії, яке визначається вектором Пойнтінга.

$$\mathbf{S}=\frac{c}{4\pi} \quad (2.7)$$

Векто S визначає напрямок поширення променя в кристалі. Для довільного лінійного непоглощающіх кристала напрямок вектора **S** збігається з напрямком групової швидкості хвилі:

$$\mathbf{W}=\frac{\partial\omega}{\partial k} \quad (2.8)$$

Таким чином, групова швидкість хвилі Вавилова-Черенкова надіслано інакше, ніж фазова. У той час як фазова швидкість хвилі Вавилова-Черепкова завжди становить гострий кут зі швидкістю частки, її групова швидкість в деяких інтервалах частот може бути спрямована під тупим кутом до швидкості частинки. Той факт, що в кристалі групова швидкість хвилі Вавилова-Черенкова не збігається з фазовою, призводить до ряду цікавих наслідків, розібраних В. Е. Пафомовим. Одне з цих наслідків ми тільки що вказали: промінь може

становити тупий кут зі швидкістю заряду. друга особливість стосується вибору рішень рівнянь поля в кристалі[21].

2.4 Ефект Вавилова-Черенкова в ізотропному оптичному активному середовищі

Вище розглядалося ефект Вавилова-Черенкова в тілах, що не володіють оптичною активністю (не виявляють обертання площини поляризації). Розглянемо тепер деякі особливості ефекту Вавилова-Черенкова в середовищах, що володіють оптичною активністю. Такі середовища в подальшому ми будемо також називати гіротропними.

Ми почнемо з розгляду ізотропних гіротропних середовищ для яких оптична активність в усіх напрямках однакова. Як класичний приклад таких середовищ можна привести водний розчин цукру.

В ізотропному гіротропному середовищах рівняння Максвелла записуються у вигляді (1.1), як і в звичайній ізотропному середовищі. Різниця укладено лише в матеріальних рівняннях. Припустимо, що всі вектори поля в ізотропному гіротроіному середовищі пропорційні множнику $e^{ik(x-vt)}$

Тоді матеріальні рівняння можна записати у вигляді

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{D} &= \varepsilon\mathbf{E} + \frac{i\gamma}{k}[\mathrm{k},\mathbf{E}],\\ \mathbf{B} &= \mathbf{H} - i\frac{(\mathrm{kv})}{kc}\gamma\mathbf{E},\end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

де -параметр, що визначає обертання площини поляризації.

У формулі (2.9) матеріальні рівняння визначені для плоских електромагнітних хвиль і тим самим для будь-яких полів, так як будь-які поля можуть бути розкладені по плоским хвилям.

Підстановка хвилі в систему рівнянь Максвелла для ізотропного оптично активного середовища дає наступне співвідношення між k і kv: $e^{ik(x-vt)}$

$$\left(\frac{k^2c^2}{(kv)^2}-\varepsilon+2\gamma\right)\left(\frac{k^2c^2}{(kv)^2}-\varepsilon-2\gamma\right)=0. \quad (2.10)$$

Це рівняння дає два значення $\frac{kv}{kc}=\beta cos\vartheta$,два значення для кута ϑ між k і kv:

$$\cos^2\vartheta=\frac{1}{\beta^2(\varepsilon\pm2\gamma)}. \quad (2.11)$$

Цим значенням відповідають дві плоскі електромагнітні хвилі, поляризовані по колу в протилежних напрямках. Умовою випромінювання Вавилова-Черенкова, отже, є виконання нерівностей $cos\vartheta$

$$\beta^2(\varepsilon+2\gamma)>1 \text{ чи } \beta^2(\varepsilon-2\gamma)>1. \quad (2.12)$$

Залежно від швидкості заряду в ізотропному оптично активному середовищі може випускати одну хвилю частоти,дві або жодної.

Рівняння. (2.9) формально збігається з рівнянням для показника заломлення в ізотропному оптично активному середовищі, якщо в ньому зробити заміну Отже, в даному випадку показник заломлення має два значення:$\frac{kc}{(kv)}=n$

$$n_{1,2}^2=\varepsilon\pm2\gamma. \quad (2.13)$$

Втрати енергії заряду на випромінювання Вавилова Черенкова в ізотропному оптично активному середовищі виражаються формулою:

$$\frac{dW}{dx}=-\frac{1}{2}\frac{q^2}{c^2}\left\{\int_{n_1^2\beta^2>1}\left(1-\frac{1}{n_1^2\beta^2}\right)\omega\,d\omega+\int_{n_2^2\beta^2>1}\left(1-\frac{1}{n_2^2\beta^2}\right)\omega\,d\omega\right\}, \quad (2.14)$$

2.5 Ефект Вавилова-Черенкова в електронній плазмі, вміщеній в магнітне поле

Оптична активність може бути викликана штучним шляхом-накладенням на середовище магнітного поля. Для теорії ефекту Вавилова-Черенкова найбільш цікавим випадком такого середовища, в якій накладення магнітного поля викликає оптичну активність-електронна плазма. Якщо на електронну плазму не накладаються магнітного поля, в ній взагалі неможливий ефект Вавилова-Черенкова, так як діелектрична постійна електронної плазми менше одиниці. В.І. Векслер вказав, що ефект Вавилова-Черенкова в електронній плазмі може стати можливим, якщо плазму помістити в магнітне поле. Розгляд цього явища було проведено А.А. Коломенським[22].

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2},$$

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_0}{v^2} \qquad (2.15)$$

Електронна плазма, вміщена в однорідне магнітне поле, веде себе як одноосний гіротропного кристал з оптичною віссю, паралмельной накладеному полю. Тензор діелектричної постійної плазми в магнітному полі має вигляд:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\omega^2 - \omega_0^2 - \omega_H^2}{\omega^2 - \omega_H^2} \\ \varepsilon_z &= 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \\ \gamma &= \frac{\omega_0^2 \omega_H^2}{\omega(\omega^2 - \omega_H^2)} \end{aligned}\right\}, \qquad (2.16)$$

Визначення показника заломлення показує, що випромінювання Вавилова-Черенкова виявляється можливим в двох областях частот:

$$а)\ \omega < \omega_0 \text{ та } б) \omega_0 < \omega < 0\sqrt{\omega_0^2 + \omega_H^2}. \qquad (2.17)$$

В релятивістському випадку випромінюються тільки хвилі, що займають спектральну область. Цікаво відзначити, що в плазмі, вміщеній в магнітне поле, випромінювання Вавилова-Черенкова має місце і при малих швидкостях заряду$(\beta \ll 1)$.

В роботі визначені втрати енергії на випромінювання Вавилова-Черенкова зарядом, що рухається в плазмі з магнітним полем вздовж оптичної осі (паралельно накладеному полю).

Ми наведемо результат, який виходить для вкрай релятивистского випадку Втрати на випромінювання виражаються формулою$(\beta = 1)$

$$-\frac{dW}{dx} = \frac{q^2\omega^2}{2c^2}\int \frac{\omega\, d\omega}{\left(\omega_H - \sqrt{\omega^2-\omega_0^2}\right)\sqrt{\omega^2-\omega_0^2}}, \qquad (2.18)$$

Логарифмічна розбіжність інтеграла (2.18) на верхній межі при пояснюється тим, що граничній частоті відповідає нульова довжина$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_H^2}$хвилі. Тому на верхній межі результатами макроскопічної теорії користуватися не можна. Інтеграл слід обрізати на деякій граничній частоті

$$\omega_{max} < \sqrt{\omega_0^2 + \omega_H^2} \qquad (2.19)$$

Відповідної мінімально допустимої в макроскопічної теорії довжині хвилі.

Електронна плазма з магнітним полем зустрічається в різноманітних природних умовах, наприклад в разі земної іоносфери, що знаходиться в магнітному полі Землі, або в разі іонізованої атмосфери сонця і зірок. Через ці області простору проходять потоки заряджених космічних частинок різної швидкості. Тому генерація випромінюванняВавилова-Черенкова може виявитися досить поширеним явищем[23].

3 ЕФЕКТ ВАВИЛОВА–ЧЕРЕНКОВА У ХВИЛЕВОДАХ

3.1 Хвилевод, що заповнений ізотропним діелектриком

Гладкий хвилевід являє собою окремий випадок лінійної періодичної системи (з нескінченно великим періодом). При русі частинки$\varepsilon_2\,\varepsilon_1$в хвилеводі зовнішнім середовищем є метал,$\varepsilon_2 = \frac{4\pi i\sigma}{\omega} i\infty\varepsilon_2 \to i\infty$ так як ми для простоти вважаємо метал ідеально провідним[24]. Проводячи в формулах граничний перехід $\varepsilon_2 \to i\infty$, одержуємо:

$$\varphi \;= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\omega}{t}(z-vt)}\Phi(\omega,r)d\omega\,,\ \mathbf{A} = \varepsilon\mu\frac{v}{c}\varphi \tag{3.1}$$

де

$$\Phi(\omega,r) = \begin{cases} \frac{q}{\pi\varepsilon_1 v}[K_0(kr) + aI_0(kr)], r < a, \\ 0, \qquad\qquad\qquad\quad r > a \end{cases} \tag{3.2}$$

$$a = -\frac{K_0(ka)}{I_0(ka)}, k = \frac{\omega}{v}\sqrt{1-\varepsilon\mu\beta^2} \tag{3.3}$$

Наведені вирази показують, що умовою черенковского випромінювання в хвилеводі, заповненому діелектриком, є звичайна умова $\varepsilon\mu\beta^2 > 1$. Спектр частот випромінювання визначається дисперсійним рівнянням:

$$J_0\left(\frac{\omega}{v}\sqrt{\varepsilon\mu\beta^2 - 1}a\right) = 0, \tag{3.4}$$

$$\frac{\omega}{v}\sqrt{\varepsilon\mu\beta^2 - 1}a = \mu_{0s}, \tag{3.5}$$

$$\omega_s = \frac{v\mu_{0s}}{a\sqrt{\varepsilon\mu\beta^2-1}}, \tag{3.6}$$

де μ_{0s}-корінь функції Бесселя j_0.

Інтеграл втрат на черенковское випромінювання має вигляд:

$$\frac{dW}{dx} = -\frac{q^2}{c^2} Re \int_0^\infty \mu\left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu\beta^2}\right) \frac{N_0\left(\frac{\omega}{v}\sqrt{\varepsilon\mu\beta^2-1}a\right)}{J_0\left(\frac{\omega}{v}\sqrt{\varepsilon\mu\beta^2-1}a\right)}. \tag{3.7}$$

Підінтегральний вираз має полюси на шляху інтегрування, що виникають на тих частотах, на яких виконана умова випромінювання (3.5). Беручи напівлишок в цих полюсах, отримуємо вираз для втрат енергії у вигляді суми за всіма випромінюваним гармоникам

$$\frac{dW}{dx} = -\frac{2q^2}{a^2}\sum_s \frac{\mu_{0s}}{\varepsilon(\omega_s)\omega_s\left[J_0'(\mu_{0s})\right]^2} \left|\frac{d\omega}{d\omega v}\sqrt{\varepsilon\mu\beta^2-1}a\right|_{\omega=\omega_s}. \tag{3.8}$$

Підсумовування ведеться за всіма гармоникам, для яких виконується умова випромінювання$\varepsilon\mu\beta^2 > 1$. При відсутності дисперсії, коли ε і μ не залежать від частоти, вираження для втрат енергії спрощується:

$$\frac{dW}{dx} = -\frac{2q^2}{a^2\varepsilon}\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{\left[J_0'(\mu_{0s})\right]^2}. \tag{3.9}$$

Цей вислів було вперше отримано Ахиезером, Любарським і Файнбергом. Якщо радіус хвилеводу багато більше, ніж довжини випромінюваних хвиль, вираз (3.9) переходить в звичайну формулу Франка і Тамма.

Неважко отримати поле в разі нецентрального руху заряду в хвилеводі, заповненому діелектриком. Нехай заряд рухається паралельно осі циліндричного хвилеводу на відстані r_0 від неї. Поле заряду має при цьому такий же вигляд, як і

при нецентральному русі в каналі. Умовою порушення гармоніки в хвилеводі є умова:

$$J_m\left(\frac{\omega}{v}\sqrt{\varepsilon\mu\beta^2-1}a\right)=0\,, \tag{3.10}$$

$$\frac{\omega}{v}\sqrt{\varepsilon\mu\beta^2-1}_{\varepsilon}\,, \tag{3.11}$$

де μ_{0s}- s-ий корінь номера функції БесселяJ_m.

Втрати енергії частинки в хвилеводі на черенковське випромінювання записуються наступним чином :

$$\frac{dW}{dx}=-\frac{2q^2}{a^2}\sum_{m,s}a_m\frac{\mu_{ms}}{\omega_{ms}}\frac{1}{\varepsilon(\omega_{ms})}\frac{f_m^2\left(\mu_{ms}\frac{r_0}{a}\right)}{|J_m(\mu_{ms})|^2}\frac{1}{\left|\frac{d}{d\omega}\frac{\omega}{v}\sqrt{\varepsilon\mu\beta^2-1}a\right|_{\omega=\omega_{ms}}}, \tag{3.12}$$

У цій формулі $a=1$ при $m=0$ і $a=2$ при частоті, яка задовольнить умові випромінювання (3.11). При $r_0\to 0$формула (3.12) переходить в вираз (3.11), що дає втрати енергії при русі по осі хвилеводу. Якщо діелектрик, що заповнює хвилевід, не володіє дисперсією, формула (3.12) приймає вид:

$$\frac{dW}{dx}=-\frac{2q^2}{a^2\varepsilon}\sum_{s=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}\frac{J_0^2(\mu_{0s}\frac{r_0}{a}}{\left[J_0'(\mu_{0s}\right]^2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_m^2(\mu_{ms}\frac{r_0}{a})}{\left|J_m'(\mu_{ms})\right|^2}\right]. \tag{3.13}$$

Цей вираз було отримано Ч. Музикаржом. При $r_0\to 0$ воно переходить в формулу (3.9).

Як видно з формул (3.12,3.13) при $r_0\to 0$ втрати енергії заряду прагнуть до нуля. Ця обставина пояснюється просто. При малих відстанях заряду від стінки хвилеводу можна вважати, що заряд рухається над ідеально провідної площиною. При цьому поле є сумою полів вихідного заряду і його дзеркального зображення, взятого з іншим знаком. Наближення «істинного» заряду до стінки супроводжується одночасним наближенням зображення. Так як знак заряду

зображення протилежний знаку «справжнього» заряду, поле цих двох зарядів взаємно гаситься і втрати енергії на випромінювання прагнуть до нуля. Це відбувається тоді, коли відстань від заряду до стінки хвилеводу стає менше, ніж довжина випромінюваної хвилі[26].

Формула (3.13) дає можливість оцінити характер залежності втрат від зсуву (відстань між траєкторією заряду і віссю хвилеводу). Виявляється, що втрати максимальні при $r_0 = 0$. При русі заряду по осі хвилеводу.

Якщо заряд рухається в хвилеводі, який заповнено діелектриком без дисперсії, і швидкість заряду перевищує швидкість світла в діелектрику, то заряд не відчуває сили, що відхиляє його від прямолінійного руху. Заряд як би «не відчуває» стінок хвилеводу, так як все поле заряду відстає від нього. В насправді середовище, що заповнює хвилевід,завжди має дисперсією. Завжди є хвилі, фазова швидкість яких перевищує швидкість заряду, і за рахунок таких хвиль може виникнути радіальна сила, що діє на заряд. Ця сила може бути як фокусує, спрямованої до центру.

3.2 Хвилевід, який частково заповнено ізотропним діелектриком

Хвилевід із суцільним заповненням діелектриком незручний в тому відношенні, що частинка в ньому втрачає енергію не тільки на черенковське випромінювання, але і на поляризаційне, або Борівське, випромінювання. Поляризаціонні втрати становлять основну частинку втрат, і тому вона швидко гальмується. Набагато зручніше вивчати випромінювання Вавилова-Черенкова в хвилеводі, частково заповненому діелектриком. Відповідне теоретичний розгляд вперше провів Абель.

Розглянемо круглий хвилевід радіуса *a*, заповнений речовиною так, що по осі хвилеводу є порожню циліндричну канал радіусу b .

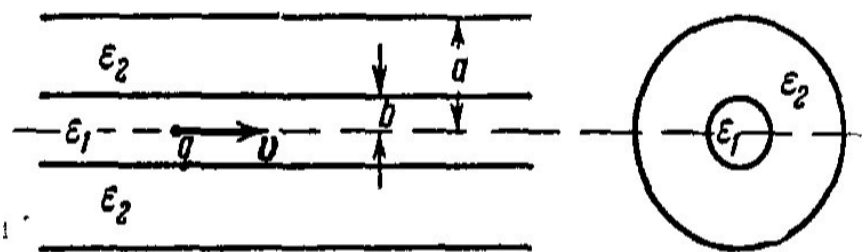

Рисунок 3.1-Круглий хвилевід

Речовина, частково заповнює хвилевід, будемо вважати ізотропним, з діелектричної постійної *e* і магнітною проникністю *p*.

Поле заряду, що рухається зі швидкістю по осі хвилеводу, має вигляд

$$\Phi(\omega,r)=\begin{cases}\frac{q}{\pi v}\left[K_0\left(\frac{\omega}{v}\sqrt{1-\beta^2}r\right)+aI_0(\frac{\omega}{v}\sqrt{1-\beta^2}r)\right]\\ \frac{q}{\pi\varepsilon v}\left[nK_0(\frac{\omega}{v}\sqrt{1-\varepsilon\mu\beta^2}r)\right]+\gamma I_0(\frac{\omega}{v}\sqrt{1-\varepsilon\mu\beta^2})\end{cases}. \quad (3.14)$$

Аналіз поля частинки в хвилеводі, частково заповненому діелектриком, дає картину, подібну до випромінюванням в каналі. Умови випромінювання Вавилова-Черенкова можуть виконуватися або тільки в середовищі $\varepsilon_1\mu_1$, або тільки в середовищі $\varepsilon_2\mu_2$, або в обох середовищах відразу. У перших двох випадках поле експоненціально загасає з ростом відстані від кордону розділу в тому середовищі, де умови випромінювання не виконані.

У всіх трьох випадках спектр випромінювання дискретний.

Розглянемо більш докладно випадок, з якого ми почали,-порожній хвилевід, частково заповнений діелектриком ($\varepsilon_1=1,\mu_1=1$). Цей випадок найбільш цікавий з точки зору генерації радіохвиль. Якщо в середовищі ε_1,μ_1, виконані умови черенковского випромінювання, заряд втрачає енергію на збудження хвиль[27]. Хвильове поле при цьому сконцентровано в област $b<r<a$.

Втрати енергії частинки на випромінювання в хвилеводі, частково заповненому діелектриком, визначаються звичайним чином як реакція поля випромінювання на частку:

$$\frac{dW}{dx} = +qE_z \Big|_{\substack{r = vt \\ r \to 0}} = -\frac{2q^2}{\pi v^2}(1-\beta^2)Re, \qquad (3.15)$$

При цьому коефіцієнт при, набуває вигляду (3.16)$a(\omega)\ \varepsilon_1 = 1\mu_1 = 1, \varepsilon_2\mu_2\beta^2 > 1$

$$a(\omega) = \frac{s_2 K_1(k_1 b)\psi_1 + k_1\varepsilon_1 K_0(k_1 b)\psi_0}{s_2 I_1(k_1 b)\psi_1 - k_1\varepsilon_1 I_0(k_1 b)\psi_0}, \qquad (3.16)$$

$$s_2 = \frac{\omega}{v}\sqrt{\varepsilon_2\mu_2\beta^2 - 1},\ k_1 = \frac{\omega}{v}\sqrt{1-\beta^2}\ , \qquad (3.17)$$

де ψ_1- функції, введені Абелем:ψ_0

$$\psi_0 = J_1(s_2 b)N_0(s_2 a) - J_0(s_2 a)N_1(s_2 b)$$
$$\psi_0 = J_0(s_2 b)N_0(s_2 a) - J_0(s_2 a)N_0(s_2 b). \qquad (3.18)$$

Підінтегральний вираз має полюси на шляху інтегрування в точках, де знаменник $a(\omega)$ (3.16) звертається в нуль. Відповідні значення частоти визначають спектр випромінювання в хвилеводі, частково заповненому діелектриком. Випишемо рівняння, що визначає частоти випромінювання в разі (3.17):

$$\frac{s_2}{k_1\varepsilon_2}\frac{I_1(k_1 b)}{I_0(k_1 b)} = \frac{\psi_0}{\psi_1}; \qquad (3.19)$$

рівняння переходить в рівняння$k_1 b \ll 1$

$$\psi_0 = 0 \qquad (3.20)$$

Якщо ще, то спектр випромінювання визначається рівнянням $s_2 b \ll 1$

$$J_0(s_2 a)=0, \tag{3.21}$$

Таким же, як в хвилеводі, цілком заповненому діелектриком ε_2,μ_2. Це означає, що якщо порожній канал по осі хвилеводу є досить вузьким, то спектр випромінювання виявляється таким же, як в хвилеводі, цілком заповненому діелектриком. Картина тут багато в чому нагадує випромінювання в порожньому каналі, оточеному безмежної середовищем[28]. Там також виявляється, що при досить малих значеннях радіуса каналу випромінювання таке ж, як якщо б каналу взагалі не було. Різниця між цими двома випадками полягає в тому, що в хвилеводі спектр дискретний і набирає вигляду $k_1 b \gg 1$

$$\frac{s_2}{k_1\varepsilon_2}=\frac{\psi_0}{\psi_1}. \tag{3.22}$$

У разі, коли, $k_1 b k_1 a\, k_2 b, s_2 a$ по величині все багато більше одиниці, рівняння приймає простий вигляд:

$$\frac{s_2}{k_1\varepsilon_2} = ctg\, k_2(a-b). \tag{3.23}$$

З рівняння (3.19), якщо знехтувати дисперсією, виходить спектр частот у вигляді необмежено зростаючої послідовності значень, причому різниця між двома сусідніми значеннями ω_λ прагне до постійної величини ω_λ, як це видно з (3.23). Наявність дисперсії призводить до обрізання спектру з боку великих значень ω. Інтегруючи вираз для втрат (3.15), отримаємо:

$$\frac{dW}{dx} = -\frac{2q^2}{v^2}(1-\beta^2)\sum_\lambda \left|\frac{[s_2 K_1(k_1 b)\psi_1 + k_1\varepsilon_1 K_0(k_1 b)\psi_0]\omega}{\frac{d}{d\omega}[s_2 I_1(k_1 b)\psi_1 - k_1\varepsilon_1 I_0(k_1 b)\psi_0]}\right|_{\omega=\omega_\lambda}.$$

З (3.24) слід, що інтенсивність випромінювання в хвилеводі, частково заповненому діелектриком, залежить від радіуса порожнього каналу якісно так само, як інтенсивність випромінювання в порожньому каналі, виконаному в безмежному середовищі. Саме, якщо радіус порожнього каналу b прямує до нуля, формула (3.24) переходить в формулу (3.9), справедливу для цілком заповненого хвилеводу. Отже, в хвилеводі, як і в безмежному середовищі, вузький канал не позначається на інтенсивності випромінювання зарядженої частинки.

Якщо радіус каналу $k_1 b \gg 1$ настільки великий, що, інтенсивність випромінювання, як видно з (3.24), експоненціально падає (як $e^{-2k_1 b}$), знову в повній аналогії з випадком порожнього каналу в безмежному середовищі. Однак слід пам'ятати, що на відміну від випадку безмежної середовища канал в хвилеводі дає дискретний спектр випромінювання.

Відзначимо ще одну особливість випромінювання в хвилеводі, частково заповненому діелектриком. Якщо заряд рухається в порожньому каналі паралельно осі хвилеводу, на відстані b від неї, то, як показав С.Н. Столяров, втрати енергії на випромінювання завжди більше, ніж при русі по осі. Під час руху заряду по осі хвилеводу, частково заповненого діелектриком, втрати виявляються мінімальними.

3.3 Хвилевід, який заповнений анізотропним діелектриком

Для уповільнення електромагнітних хвиль в хвилеводі можуть бути застосовані анізотропні діелектрики. Нижче ми розглянемо випромінювання в круглому хвилеводі, який заповнений оптично одноосьовим кристалічним діелектриком. Нехай оптична вісь діелектрика спрямована по осі хвилеводу. Якщо вісь хвилеводу прийняти за вісь z, то тензор діелектричної постійної речовини, що заповнює хвилевід, можна записати у вигляді

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_r & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_r & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_r \end{pmatrix}. \qquad (3.25)$$

Рівняння для потенціалів поля в хвилеводі можна отримати припустивши, що відмінні від нуля тільки $\mathbf{A}_z$ і φ_1 та наклавши на ці функції додаткову умову

$$\mathbf{A}_z = \varepsilon_r \beta \varphi. \tag{3.26}$$

Тоді для **A**: отримуємо (індекс *z* опущений):

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial r} - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r \beta^2}\right)\frac{\varepsilon_z}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{dt^2} = -\frac{4\pi}{c} j \tag{3.27}$$

При виведенні цього рівняння ми врахували, що поле, створене рівномірно рухомим зарядом, залежить від *z* і *t* в комбінації *z–vt*. За допомогою (3.26) неважко отримати рівняння дляφ. Щільність струму .i, що входить в праву частину рівняння (3.27), визначається точковим зарядом, що рухається зі швидкістю *v*:

$$j = qv\delta(x)\delta(y)\delta(z - vt) = qv\frac{\delta(r)}{2\pi r}\delta(z - vt). \tag{3.28}$$

Для $\delta(r)$ зручно взяти уявлення

$$\delta(r) = \frac{2r}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{j_0\left(\mu_n \frac{r}{a}\right)}{j_0^2(\mu_n)}, \tag{3.29}$$

де *a*-радіус хвилеводу.

Для δ(z–vt) візьмемо відоме розкладання в інтеграл Фур'є. Рішення рівняння (3.27) виходить у вигляді:

$$A(r, z - vt) = -\frac{2q}{\pi c a^2}\sum\frac{1}{j_0^2(\mu_n)} Re\int_0^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{\beta\varepsilon_r} - \beta\right) i\omega \; d\omega}{\frac{\mu_n^2}{a^2} - \frac{\omega^2}{v^2}\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_r}(\varepsilon_r\beta^2 - 1)}. \tag{3.30}$$

З цього виразу легко визначити втрати енергії заряду на випромінювання

$$\frac{dW}{dz} = -\frac{4q^2}{\pi c v a^2} \sum \frac{1}{j_0^2(\mu_n)} Re \int_0^\infty \frac{\left(\frac{1}{\beta \varepsilon_r} - \beta\right) i\omega \, d\omega}{\frac{\mu_n^2}{a^2} - \frac{\omega^2}{v^2} \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_r} (\varepsilon_r \beta^2 - 1)} \,. \qquad (3.31)$$

Як видно з цього виразу, частоти хвиль, що випромінюються, можна отримати, прирівнюючи нулю знаменник підінтегрального виразу. З цього випливає:

$$\omega_n^2 = \frac{\mu_n^2 v^2 \varepsilon_2}{a^2 \varepsilon_z} \frac{1}{\varepsilon_r \beta^2 - 1} \,. \qquad (3.32)$$

Умова випромінювання має вигляд

$$\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_r} (\varepsilon_r \beta^2 - 1) > 0. \qquad (3.33)$$

Воно збігається з умовою випромінювання в безмежному одноосьовому кристалі .

Оскільки ε_zі ε_r залежать від частоти ω, одному значенню μ_n в рівнянні (3.32), який визначає частоту випромінювання, може відповідати кілька значень ω. Інтегруючи (3.33), отримаємо :

$$\left(\frac{dW}{dz}\right) = \frac{2q^2}{a^2 c^2} \sum_n \frac{1}{J_1^2(c)} \left\{ \frac{1 - \frac{1}{\beta^2 \varepsilon_r}}{\frac{d}{d\omega^2}\left[\frac{\omega^2}{v^2}(\varepsilon_r \beta^2 - 1)\right]} \right\}. \qquad (3.34)$$

Якщо ε_zі ε_r не залежать від частоти, цей вираз спрощується, і ми отримуємо для втрат енергії на одиницю шляху заряду вираз

$$\frac{dW}{dz} = -\frac{2q^2}{a^2\varepsilon_z}\sum_n \frac{1}{j_1^2(\mu_n)} \,. \qquad (3.35)$$

Ця величина розходиться точно так же, як втрати енергії заряду на випромінювання Вавилова-Черенкова в середовищі без дисперсії. Однак користування цією формулою призводить правильних результатів, якщо обірвати підсумовування на деякій частоті. Нагадаємо, що кожний доданок в (3.33 та 3.35) дає інтенсивність випромінювання на частоті ω_n, яка визначається рівністю (3.33 та 3.32).

Порівняємо формулу (3.33 і 3.35) з виразом для втрат енергії на черенковські випромінювання в хвилеводі, заповненому ізотропним діелектриком. Як видно з порівняння, застосування анізотропного діелектрика дозволяє змінити інтенсивність випромінювання не змінюючи ні швидкості частинки, ні радіуса хвилеводу.

Цікавим є питання про те, як залежать втрати енергії на випромінювання в хвилеводі, заповненому анізотропним діелектриком, від орієнтації оптичної осі заповнювача по відношенню до осі хвилеводу. Це питання було розглянуто Л.С. Богданкевич для випадку прямокутного хвилеводу.

Розглянемо хвилевід прямокутного перерізу. Сторони перетину позначимо через $2a$ і $2b$. Нехай хвилевід заповнений анізотропним діелектриком. Як і в попередньому прикладі, ми будемо розглядати окремий випадок анізотропного діелектрика-одноосний кристал, що характеризується двома параметрами: діелектричної постійної уздовж оптичної осі (ε_0) і діелектричної постійної в перпендикулярному до осі напрямі ($\varepsilon_\perp$).

Рівняння для потенціалів поля, що виникає при русі заряду в прямокутному хвилеводі, заповненому анізотропним діелектриком, щільність заряду має вигляд:

$$\varrho = q\delta(x)\delta(y)\delta(z-vt) = \\ = \frac{q}{8hvab}\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \cos\frac{2n+1}{2a}\pi x \cdot \cos\frac{2m+1}{2b}\pi y \int e^{i\frac{\omega}{v}(z-vt)}d\omega. \quad (3.36$$

Потенціали поля мають вигляд

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{q}{2vab}\sum_{m,n}\cos\frac{2n+1}{2a}\pi x\cdot\cos\frac{2m+1}{2b}\pi y\cdot\cos\frac{2m+1}{2b}\pi y\int\frac{e^{i\frac{\omega}{v}(z-vt)}d\omega}{(k\varepsilon k)},\\ A &= -\frac{q}{2vab}\sum_{m,n}\cos\frac{2n+1}{2a}\pi x\cdot\cos\frac{2m+1}{2b}\pi y\ \times\\ &\times\cos\frac{2m+1}{2b}\pi y\int\Lambda^{-1}\left[S-\frac{(k\varepsilon\Lambda^{-1}s)}{(k\varepsilon\Lambda^{-1}k)}\right]e^{i-\frac{\omega}{v}(z-vt)}d\omega, \end{aligned}\right\} \quad (3.37)$$

де ε-оператор діелектричної постійної,

Λ-оператор, що зв'язаний з ε,

k -вектор з компонентами.

$$\Delta = \varepsilon\mathbf{k}\frac{\omega}{(\mathbf{k}\varepsilon\mathbf{k})},$$

$$k_x = \frac{2n+1}{2a}\pi, \qquad k_y = \frac{2m+1}{2b}, \qquad k_z = \frac{\omega}{v}. \quad (3.38)$$

$$s = \mathbf{v} - \varepsilon\mathbf{k}\frac{\omega}{(\mathbf{k}\varepsilon\mathbf{k})}. \quad (3.39)$$

В системі головних осей кристала оператори Λ і ε є діагональними, і в цій системі

$$(\mathbf{k}\varepsilon\mathbf{k}) = \varepsilon_x k_x^2 + \varepsilon_y k_y^2 + \varepsilon_z k_z^2,$$

$$\mathbf{k}\varepsilon\Delta^{-1}s = \frac{k_x s_x \varepsilon_x}{\varepsilon_x\frac{\omega^2}{c^2}-k^2} + \frac{k_y s_y \varepsilon_y}{\varepsilon_y\frac{\omega^2}{c^2}-k^2} + \frac{k_z s_z \varepsilon_z}{\varepsilon_z\frac{\omega^2}{c^2}-k^2}. \quad (3.40)$$

Вирази для потенціалів поля в хвилеводі (3.36) і співвідношень (3.37,3.38) відрізняються від аналогічних виразів для необмеженого кристала тільки тим, що компоненти хвильового вектора k_x і k, перпендикулярні до стінок хвилеводу, можуть приймати лише дискретні значення.

Л.С. Богданкевич визначив втрати енергії заряду на випромінювання в прямокутному хвилеводі, заповненому анізотропним одноосьовим діелектриком. При цьому були розглянуті два випадки. У першому випадку оптична вісь кристалу була паралельна осі хвилеводу, а отже, і швидкості заряду. У другому оптична вісь кристалу — перпендикулярна до осі хвилеводу.

4 ВТРАТИ ЕНЕРГІЇ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТИНОК ВНАСЛІДОК ВЗАЄМОДІЇ З ДІЕЛЕКТРИЧНИМ ЦИЛІНДРОМ

4.1 Постановка завдання і основні рівняння

Нехай діелектричний циліндр с діелектричної проникністю ε і магнітною проникністю $\mu = 1$ в циліндричній системі координат займає область простору $0 \le \rho \le \rho_c$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ и $|z| < \infty$ (вісь Z направлена уздовж осі циліндра). На відстані $\rho = \rho_e > \rho_c$ від осі циліндра в вакуумі з постійною швидкістю $v_0 << c$ (де c — швидкість світла у вакуумі) рухається електрон. Так як рух електрона має нерелятивістський характер, то електричне поле, що створюється їм, може вважатися електростатичним та задовольняє наступним рівнянням:

$$\mathrm{rot}\vec{E}_e(\rho,\varphi,z,t) = 0; \tag{4.1}$$

$$\mathrm{div}\vec{E}_e(\rho,\varphi,z,t) = 4\pi e n_e(\rho,\varphi,z,t), \tag{4.2}$$

де індекс "*e*" позначає поле електрона,

$n_e(\rho,\varphi,z,t)$ - густина заряду електрона.

Поля в області вакууму також мають потенційний характер і описуються рівняннями електро- і магнітостатики:

$$\mathrm{rot}\vec{E}_v(\rho,\varphi,z,t) = 0; \tag{4.3}$$

$$\mathrm{div}\vec{E}_v(\rho,\varphi,z,t) = 0; \tag{4.4}$$

$$\mathrm{rot}\vec{H}_v(\rho,\varphi,z,t) = 0; \tag{4.5}$$

$$\mathrm{div}\vec{H}_v\left(\rho,\varphi,z,t\right)=0, \tag{4.6}$$

де індекс "v" позначає область вакууму.

Для правильного опису властивостей досліджуваної електродинамічної системи в області циліндра необхідно врахувати ефект запізнювання і описувати електричні і магнітні поля наступними рівняннями Максвелла:

$$\mathrm{rot}\vec{E}_c\left(\rho,\varphi,z,t\right)=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{H}_c\left(\rho,\varphi,z,t\right)}{\partial t}; \tag{4.7}$$

$$\mathrm{div}\vec{H}_c\left(\rho,\varphi,z,t\right)=0; \tag{4.8}$$

$$\mathrm{rot}\vec{H}_c\left(\rho,\varphi,z,t\right)=\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{E}_c\left(\rho,\varphi,z,t\right)}{\partial t}; \tag{4.9}$$

$$\mathrm{div}\vec{E}_c\left(\rho,\varphi,z,t\right)=0, \tag{4.10}$$

де індекс "c" позначає область циліндра,

символ c в формулах — швидкість світла у вакуумі.

Наше завдання полягає в тому, щоб знайти втрати енергії електрона в одиницю часу dW_e/dt на збудження власних мод діелектричного циліндра. Ці втрати рівні роботі поля випромінювання над електроном в точці простору, де знаходиться електрон [7, 8]:

$$\frac{dW_e}{dt}=ev_0E_{zv}\left(\rho=\rho_e,\varphi=\varphi_e,z=v_0t;t\right), \tag{4.11}$$

де φ_e - кутова координата електрона.

Зауважимо, що $dW_e/dt<0$. Для того, щоб знайти поля створювані електроном в області вакууму необхідно знайти рішення рівнянь (4.1)–(4.10) і задовольнити граничним умовам на поверхні циліндра. Такими умовами є умови безперервності тангенціальних складових напруженостей електричного і магнітного полів, а також умови безперервності нормальні складові електричної індукції і напруженості магнітного поля:

$$E_{ez}(\rho_c,\varphi,z,t)+E_{vz}(\rho_c,\varphi,z,t)=E_{cz}(\rho_c,\varphi,z,t); \tag{4.12}$$

$$H_{vz}(\rho_c,\varphi,z,t)=H_{cz}(\rho_c,\varphi,z,t); \tag{4.13}$$

$$E_{e\rho}(\rho_c,\varphi,z,t)+E_{v\rho}(\rho_c,\varphi,z,t)=\varepsilon E_{c\rho}(\rho_c,\varphi,z,t); \tag{4.14}$$

$$H_{v\rho}(\rho_c,\varphi,z,t)=H_{c\rho}(\rho_c,\varphi,z,t). \tag{4.15}$$

В силу електростатичного характеру полів заряду і полів випромінювання у вакуумі в подальшому зручно для них ввести в розгляд електростатичні потенціали для напруженостей електричних полів електрона $\psi_e(\rho,\varphi,z,t)$ і випромінювання $\psi_v(\rho,\varphi,z,t)$ в вакуумі

$$\vec{E}_e(\rho,\varphi,z,t)=-\nabla\psi_e(\rho,\varphi,z,t); \tag{4.16}$$

$$\vec{E}_v(\rho,\varphi,z,t)=-\nabla\psi_v(\rho,\phi,z,t) \tag{4.17}$$

Магнітний потенціал $\chi_v(\rho,\varphi,z,t)$ для напруженості магнітного поля випромінювання у вакуумі

$$\vec{H}_v(\rho,\varphi,z,t)=-\nabla\chi_v(\rho,\phi,z,t). \tag{4.18}$$

Підстановка виразу (4.16) в рівняння (2) приводить до рівняння Пуассона

$$\Delta\psi_e(\rho,\varphi,z,t) = -4\pi e n(\rho,\varphi,z,t), \tag{4.19}$$

а підстановки виразів (4.17) і (4.18) в рівняння (4.4) і (4.6) до відповідних рівнянь Лапласа

$$\Delta\psi_v(\rho,\varphi,z,t) = 0; \tag{4.20}$$

$$\Delta\chi_v(\rho,\varphi,z,t) = 0, \tag{4.21}$$

де $\Delta = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа.

Будемо шукати рішення для потенціалу $\psi_e(\rho,\ ,z,t)$ у вигляді

$$\psi_e(\rho,\varphi,z,t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\int_0^\infty dk\int_{-\infty}^{\infty} dq_z \Phi_{en}(k,q_z,t) J_n(k\rho)\exp\left[i(q_z z + n\varphi)\right], \tag{4.22}$$

де k і q_z - поперечне і поздовжнє (аксіальне) хвильові числа поля електрона, n -азимутальний модовий індекс,

$J_n(x)$ — функція Бесселя n -го порядку першого роду .

У декартовій системі координат густина заряду електрона визначається відомим виразом:

$$n(x,y,z,t) = \delta(x-x_e)\delta(y-y_e)\delta(z-v_0 t), \tag{4.23}$$

де $\delta(x)$ — дельта-функція Дірака,

x_t і $y_в$ — початкові координати частинки.

Скориставшись інтегральними уявленнями дельта-функцій Дірака і підставивши їх у праву частину (4.23), вираз для густини заряду електрона можна привести до виду[30]

$$n(\rho,\varphi,z,t)=\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\int_0^{\infty}dk\int_{-\infty}^{\infty}dq_z kJ_n(k\rho_e)J_n(k\rho)\exp\left\{i\left[q_z(z-v_0t)+n(\varphi-\varphi_e)\right]\right\}. \quad (4.24)$$

Підставивши (4.22) і (4.24) в рівняння Пуассона (4.19), отримаємо такий вираз для величини $\Phi_n(k,q_z,t)$:

$$\Phi_{en}(k,q_z,t)=\frac{eJ_n(k\rho_e)}{\pi\left(k^2+q_z^2\right)}\exp\left[-i\left(q_z v_0 t+n\varphi_e\right)\right]. \quad (4.25)$$

Рівняння Лапласа (4.20) і (4.21) в області значень $\rho_c<\rho<\rho_e$ мають рішення виду:

$$\psi_v(\rho,\varphi,z,t)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dq_z\Phi_{vn}(q_z,t)K_n\left(|q_z|\rho\right)\exp\left[i\left(q_z z+n\varphi\right)\right]; \quad (4.26)$$

$$\chi_v(\rho,\varphi,z,t)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dq_z\mathrm{X}_{vn}(q_z,t)K_n\left(|q_z|\rho\right)\exp\left[i\left(q_z z+n\varphi\right)\right], \quad (4.27)$$

де $K_n(x)$ — модифікована функція Бесселя n-го порядку другого роду (функція Макдональда).

Величини $\Phi_{vn}(q_z,t)$ і $\mathrm{X}_{vn}(q_z,t)$ в подальшому визначаються з граничних умов на поверхні циліндра.

Розглянемо поля в області циліндра. З рівнянь Максвелла (4.7)–(4.10) може бути отримано наступне хвильове рівняння для z-компоненти електричного поля

$$\Delta E_{zc}\left(\rho,\varphi,z,t\right)-\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial^2 E_{zc}\left(\rho,\varphi,z,t\right)}{\partial t^2}=0 \quad , \tag{4.28}$$

рішення для якої будемо шукати у вигляді:

$$E_{zc}\left(\rho,\varphi,z,t\right)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dq_z\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\tilde{\Lambda}_{cn}\left(\rho,q_z,\omega\right)\exp\left[i\left(q_z z+n\varphi-\omega t\right)\right] \quad . \tag{4.29}$$

Підставивши (4.29) в (4.28), отримаємо такий вираз для $\tilde{\Lambda}_{cn}\left(\rho,q_z,\omega\right)$:

$$\tilde{\Lambda}_{cn}\left(\rho,q_z,\omega\right)=\Lambda_{cn}\left(q_z,\omega\right)J_n\left(\kappa\rho\right) \quad , \tag{4.30}$$

де $\kappa=\sqrt{\varepsilon\,\omega^2/c^2-q_z^2}$ – поперечне хвильове число електромагнітного поля в циліндрі.

За аналогією отримуємо такий вигляд рішення хвильового рівняння для z-компоненти магнітного поля:

$$H_{zc}\left(\rho,\varphi,z,t\right)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dq_z\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\mathrm{M}_{cn}\left(q_z,\omega\right)J_n\left(\kappa\rho\right)\exp\left[i\left(q_z z+n\varphi-\omega t\right)\right] \quad . \tag{4.31}$$

Зауважимо, що величини $\Lambda_{cn}\left(q_z,\omega\right)$ і $\mathrm{M}_{cn}\left(q_z,\omega\right)$ в подальшому визначаються з граничних умов на поверхні циліндра. З рівнянь Максвелла (4.7)–(4.10) отримаємо такі вирази, що дозволяють виразити $E_{\rho c}\left(\rho,\varphi,z,t\right)$ и $H_{\rho c}\left(\rho,\varphi,z,t\right)$ компоненти полів в циліндрі через їх відповідні z-компоненти:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)E_{\rho c}(\rho,\varphi,z,t)=\frac{\partial^2 E_{zc}(\rho,\varphi,z,t)}{\partial z\partial\rho}-\frac{1}{c\rho}\frac{\partial^2 H_{zc}(\rho,\varphi,z,t)}{\partial t\partial\varphi}\quad;\qquad(4.32)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)H_{\rho c}(\rho,\varphi,z,t)=\frac{\varepsilon}{c\rho}\frac{\partial^2 E_{zc}(\rho,\varphi,z,t)}{\partial t\partial\varphi}+\frac{\partial^2 H_{zc}(\rho,\varphi,z,t)}{\partial z\partial\rho}\quad;\qquad(4.33)$$

З виразів (3.32),(3.33) з урахуванням (4.29)–(4.31) одержуємо наступні вирази для $E_{\rho c}(\rho,\varphi,z,t)$ та $H_{\rho c}(\rho,\varphi,z,t)$:

$$E_{\rho c}(\rho,\varphi,z,t)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dq_z\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\frac{1}{\kappa^2}\left[iq_z\frac{\partial J_n(\kappa\rho)}{\partial\rho}\Lambda_{cn}(q_z,\omega)-\right.$$
$$\left.-\frac{n\omega}{c\rho}J_n(\kappa\rho)\mathrm{M}_{cn}(q_z,\omega)\right]\exp\left[i(q_z z+n\varphi-\omega t)\right];\qquad(34)$$

$$H_{\rho c}(\rho,\varphi,z,t)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dq_z\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\frac{1}{\kappa^2}\left[\frac{n\omega\varepsilon}{c\rho}J_n(\kappa\rho)\Lambda_{cn}(q_z,\omega)+\right.$$
$$\left.+iq_z\frac{\partial J_n(\kappa\rho)}{\partial\rho}\mathrm{M}_{cn}(q_z,\omega)\right]\exp\left[i(q_z z+n\varphi-\omega t)\right];\qquad(35)$$

Підставивши в граничні умови (4.12)–(4.15) відповідні вирази для полів електрона (4.16), (4.25) і випромінювання (4.17), (4.18), (4.26), (4.27), (4.29)–(4.31), (4.34), (4.35), отримаємо такі вирази для величин $\Lambda_{cn}(q_z,\omega)$, $\mathrm{M}_{cn}(q_z,\omega)$, $\mathrm{X}_{vn}(q_z,t)$, $\Phi_{vn}(q_z,t)$, що входять в підінтегрального вираження полів випромінювання у вакуумі:

$$\Lambda_{cn}(q_z,\omega)=\frac{1}{J_n(\kappa\rho_c)}\left[-iq_z K_n(|q_z|\rho_c)\Phi_{vn}(q_z,\omega)+E_{ezn}(\rho_c,\varphi_0,q_z,\omega)\right]\quad;\qquad(4.36)$$

$$\mathrm{M}_{cn}\left(q_z,\omega\right)=\frac{c}{n\omega\varepsilon\rho_c}\left\{\frac{i\rho_c^2\left|q_z\right|\kappa}{q_zK_n\left(\left|q_z\right|\rho_c\right)}\left[\varepsilon\left|q_z\right|J_n'\left(\kappa\rho_c\right)K_n\left(\left|q_z\right|\rho_c\right)+\kappa K_n'\left(\left|q_z\right|\rho_c\right)J_n\left(\kappa\rho_c\right)\right]\Lambda_{cn}\left(q_z,\omega\right)+\right.$$

$$\left.-\left(\rho_c\kappa\right)^2\left(E_{e\rho n}(\rho_c,\varphi_0,q_z,\omega)+\frac{i\left|q_z\right|K'\left(\left|q_z\right|\rho_c\right)}{q_zK_n\left(\left|q_z\right|\rho_c\right)}E_{ezn}(\rho_c,\varphi_0,q_z,\omega)\right)\right\};\tag{4.37}$$

$$\mathrm{X}_{vn}\left(q_z,\omega\right)=\frac{iJ_n\left(\kappa\rho_c\right)}{q_zK_n\left(\left|q_z\right|\rho_c\right)}\mathrm{M}_{cn}\left(q_z,\omega\right);\tag{4.38}$$

$$\Phi_{vn}\left(q_z,\omega\right)=\frac{\rho_c}{\left(\rho_cq_z\right)^2\Delta_nK_n\left(\left|q_z\right|\rho_c\right)}\left[\Delta_{Hn}E_{e\rho n}(\rho_c,\varphi_0,q_z,\omega)-\right.$$

$$\left.-iq_z\rho_c\left(\varepsilon\frac{\Delta_{Hn}}{\kappa\rho_c}\frac{J_n'\left(\kappa\rho\right)}{J_n\left(\kappa\rho\right)}\bigg|_{\rho=\rho_c}-\left(\frac{\omega n\varepsilon}{cq_z\rho_c^2\kappa^2}\right)^2\right)E_{ezn}(\rho_c,\varphi_0,q_z,\omega)\right];\tag{4.39}$$

$$\Delta_n=\Delta_{En}\Delta_{Hn}-\left(\frac{\omega n\varepsilon}{cq_z\rho_c^2\kappa^2}\right)^2;$$

$$\Delta_{En}=\frac{1}{\left|q_z\right|\rho_c}\frac{K_n'\left(\left|q_z\right|\rho\right)}{K_n\left(\left|q_z\right|\rho\right)}\bigg|_{\rho=\rho_c}+\frac{\varepsilon}{\kappa\rho_c}\frac{J_n'\left(\kappa\rho\right)}{J_n\left(\kappa\rho\right)}\bigg|_{\rho=\rho_c};$$

$$\Delta_{Hn}=\frac{1}{\left|q_z\right|\rho_c}\frac{K_n'\left(\left|q_z\right|\rho\right)}{K_n\left(\left|q_z\right|\rho\right)}\bigg|_{\rho=\rho_c}+\frac{1}{\kappa\rho_c}\frac{J_n'\left(\kappa\rho\right)}{J_n\left(\kappa\rho\right)}\bigg|_{\rho=\rho_c};$$

$$E_{ezn}(\rho_c,\varphi_0,q_z,\omega)=-\frac{ie\left|q_z\right|}{\pi}\delta\left(\omega-q_zv_0\right)I_n\left(\left|q_z\right|\rho_c\right)K_n\left(\left|q_z\right|\rho_e\right)\exp\left(-in\varphi_0\right);$$

$$E_{e\rho n}(\rho_c,\varphi_0,q_z,\omega)=-\frac{e\left|q_z\right|}{\pi}\delta\left(\omega-q_zv_0\right)I_n'\left(\left|q_z\right|\rho\right)\big|_{\rho=\rho_c}K_n\left(\left|q_z\right|\rho_e\right)\exp\left(-in\varphi_0\right),$$

В наведених вище виразах символ "штрих" біля спеціальних функцій позначає їх похідну по аргументу, $I_n(x)$ — функція Инфельда n-го порядку

першого роду, $\rho_c < \rho_e$, $n \geq 0$. Зауважимо, що при отриманні виразів (4.36) - (4.39) використано уявлення

$$\exp\left(-iq_z v_0 t\right) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \delta\left(\omega - q_z v_0\right) \exp\left(-i\omega t\right).$$

Величини $\Phi_{vn}\left(q_z, t\right)$ та $\mathrm{X}_{vn}\left(q_z, t\right)$, що входять в підінтегральний вираз для потенціалів електричного (4.26) і магнітного (4.27) полів, пов'язані з відповідними величинами $\Phi_{vn}\left(q_z, \omega\right)$ та $\mathrm{X}_{vn}\left(q_z, \omega\right)$ за допомогою таких виразів:

$$\Phi_{vn}\left(q_z, t\right) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{vn}\left(q_z, \omega\right) \exp\left(-i\omega t\right) d\omega;$$

$$\mathrm{X}_{vn}\left(q_z, t\right) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{X}_{vn}\left(q_z, \omega\right) \exp\left(-i\omega t\right) d\omega.$$

Вираз $\Delta_n = 0$ є дисперсійне рівняння власних мод діелектричного циліндра. Зауважимо, що функція $\delta\left(\omega - q_z v_0\right)$ враховує умову фазового синхронізму зарядженої частинки і порушувати нею хвилі, що лежить в основі ефекту Вавилова-Черенкова[31].

Вираз для втрат енергії електрона в одиницю часу dW_e / dt на збудження власних мод в діелектричному циліндрі (4.11) з урахуванням (4.39) набуває вигляду

$$\begin{aligned} \frac{dW_e}{dt} = & -iev_0 \int_{-\infty}^{\infty} dq_z \int_{-\infty}^{\infty} d\omega q_z \Phi_{v0}\left(q_z, \omega\right) K_0\left(\left|q_z\right| \rho_e\right) \exp\left[i\left(q_z v_0 - \omega\right) t\right] + \\ & -2iev_0 \sum_{n=1}^{n=\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dq_z \int_{-\infty}^{\infty} d\omega q_z \Phi_{vn}\left(q_z, \omega\right) K_n\left(\left|q_z\right| \rho_e\right) \exp\left[i\left(q_z v_0 - \omega\right) t + in\varphi_0\right]. \end{aligned} \tag{4.40}$$

При обчисленні інтегралів по dq_z і $d\omega$ в (4.37) необхідно врахувати полюси підінтегральних виразів, що відносяться до збудження власних мод діелектричного циліндра. Для цього введемо малі дисипативні втрати в діелектричній середовищі і використовуємо відому формулу Сохоцького для обходу полюса (див. [4.11]):

$$\frac{1}{x \pm i\gamma} = \frac{P}{x} \mp i\pi\delta(x), \tag{4.41}$$

де узагальнена функція P/x називається кінцевою частиною або головним значенням інтеграла від функції $1/x$.

Порушення власних мод циліндра відповідає другий доданок в (4.38). Відзначимо, що з виразів (4.26), (4.27) слід монотонно спадаючий характер залежностей амплітуд полів випромінювання від радіальної координати в вакуумі, а з виразів (4.29), (4.31) і (4.34), (4.35) — осцилюючий характер цих залежностей в циліндрі.

4.2 Чисельний аналіз втрат енергії електрона

Як матеріал діелектричного циліндра виберемо полікор з ε = 9,6, а радіус циліндра ρ_c = 0,5 см. Швидкість і радіус орбіти електрона покладемо рівними $v_0 = 0{,}387\,c$ і ρ_0 = 0,6 см відповідно. Величину втрат енергії електрона в одиницю часу $|dW_e/dt|$ будемо нормувати на значення $\left|(dW_e/dt)_0\right| = e^2 v_0/\rho_c^2$ і використовувати позначення $P = |dW_e/dt| / \left|(dW_e/dt)_0\right|$. Для обраних параметрів системи маємо $\left|(dW_e/dt)_0\right| \propto 10^{-8}$.

Спектри власних мод циліндричних діелектричних твердотільних хвилеводів докладно описані в роботах [12–18]. Ми будемо використовувати прийняту в зазначених джерелах класифікацію власних мод циліндра. Так,

позначення $HE_{n\,s}$ и відносяться до модам електричного (Е-) і магнітного (Н-) типів відповідно, де індекс *n*-відповідає половині кількості варіацій поля по азимуту, а індекс *s*-кількості варіацій поля уздовж радіальної координати. Азимутально-симетрична мода Е-типу позначається, як $\mathbf{E_{0s}}$. Зауважимо, що з азимутально-симетричною модою Н-типу H_{0s} поле електрона не взаємодіє в силу обраного для його опису електростатичного наближення. Відзначимо, що в вираженні для втрат (40) підсумовування проводиться по частотам власних мод діелектричного циліндра, порушуваних електроном внаслідок ефекту Вавилова-Черенкова. При цьому, найменшою частотою $\omega_{\min}$ є частота власної моди $EH_{1\,1}$ рівна $\omega_{\min} \approx 1{,}73 \cdot 10^{10}$ с$^{-}$

На рисунку 4.1 наведені графіки залежностей безрозмірних величин втрат енергії електрона в одиницю часу P на збудження власних $HE_{n\,s}$ мод в діелектричному циліндрі від значення азимутального модового індексу n для ряду значень радіального модового індексу $s = 1,2,3$. Номери кривих збігаються зі значенням індексу *s*. Кожному значенню індексу *n* відповідає своя точка на графіку, позначена символом "суцільний гурток" для кривої 1, "порожній кружок" для кривої 2 і "суцільний квадрат" для кривої 3.

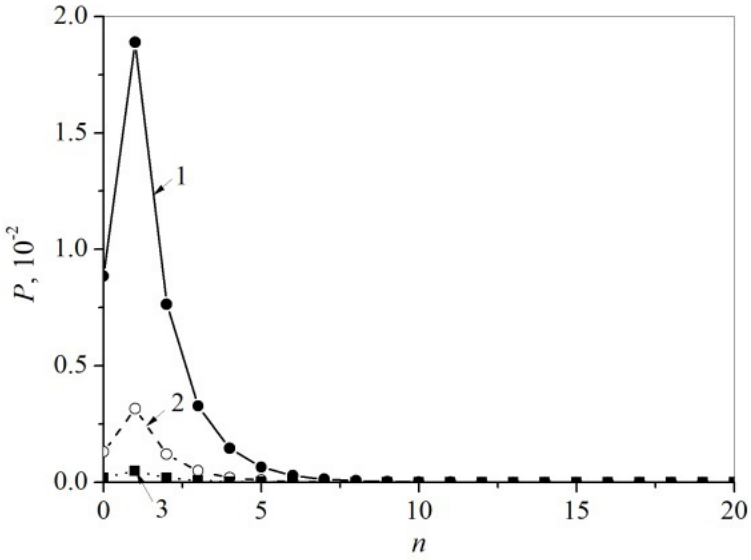

Рисунок 4.1 – Графіки залежностей безрозмірних величин втрат енергії

електрона в одиницю часу P на збудження власних мод в діелектричному циліндрі від значення азимутального модового індексу n для ряду значень радіального модового індексу s

З рисунка 4.1 видно, що найбільші втрати енергії електрона відповідають збудженню моди $EH_{1\,1}$. При фіксованому значенні індексу n і при збільшенні індексу s величини втрат зменшуються. Чисельний рахунок показує, що при фіксованому значенні індексу s найбільші втрати припадають на моду $HE_{1\,s}$. Зауважимо, що при $n=0$ існують відмінні від нуля втрати енергії електрона, відповідні порушення $E_{0\,s}$ мод.

На рисунку 4.2 наведені графіки залежностей безрозмірних величин втрат енергії електрона в одиницю часу P на порушення власних $EH_{n\,s}$ мод в діелектричному циліндрі від значення азимутального модового індексу n для ряду значень радіального модового індексу $s=1,2,3$. Номери кривих збігаються зі значенням індексу s.

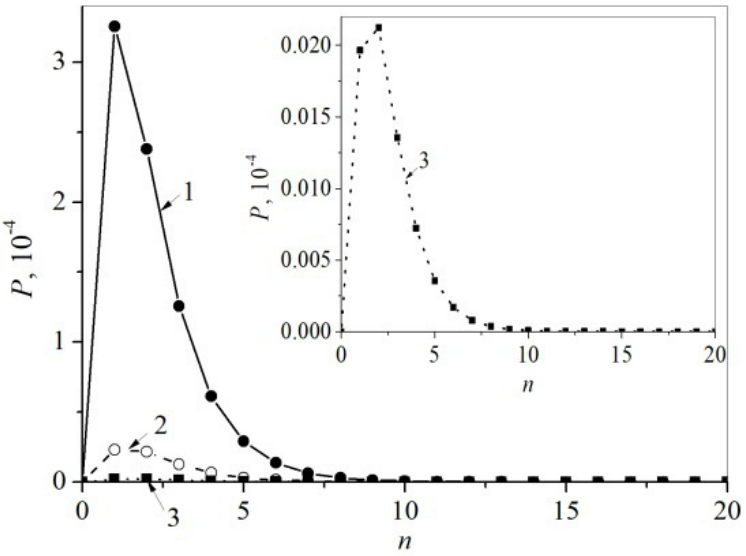

Рисунок 4.2 Графіки залежностей безрозмірних величин втрат енергії електрона в одиницю часу P на збудження власних $EH_{n\,s}$ мод в діелектричному циліндрі від значення азимутального модового індексу n для ряду значень

радіального модового індексу *s*

З рисунка 4.2 видно, що найбільші втрати енергії електрона відповідають збудженню моди $EH_{1\,1}$. При фіксованому значенні індексу *n* і при збільшенні індексу *s* величини втрат зменшуються. Чисельний розрахунок показує, що на відміну від розглянутого вище випадку порушення $EH_{n\,s}$ мод, зі збільшенням індексу *s* значення індексу *n*, Відповідного найбільшою величиною втрат, не залишається постійним. Це демонструє вставка на рисунку 4.2, на якій в більшому масштабі наведено хід кривої 3. Видно, що при $s=3$ максимум втрат енергії електрона доводиться на моду $EH_{2\,3}$. Зауважимо, що при $n=0$ втрати енергії електрона на збудження $H_{0\,s}$ мод відсутні.

Кількісне порівняння залежностей на рис. 4.1 і рис. 4.2 показує, що найбільш ефективно збуджуються $HE_{n\,s}$ моди. При цьому, величини втрат енергії електрона на їх збудження приблизно на два порядки перевершують величини втрат на збудження мод з тими ж значеннями індексів *n* і.*s*

На рисунку 4.3 і рис. 4.4 наведено залежності безрозмірних величин втрат енергії електрона в одиницю часу P на порушення власних $HE_{n\,s}$ (рис. 4.3) и $EH_{n\,s}$ (рис. 4.4) мод в мод в діелектричному циліндрі від значення радіального модового індексу *s* для ряду значень азимутального модового індексу $n=0,1,2,3$ для $HE_{n\,s}$ мод і $n=0,1,2,3$ для $HE_{n\,s}$ мод. Номери кривих збігаються зі значенням індексу n.

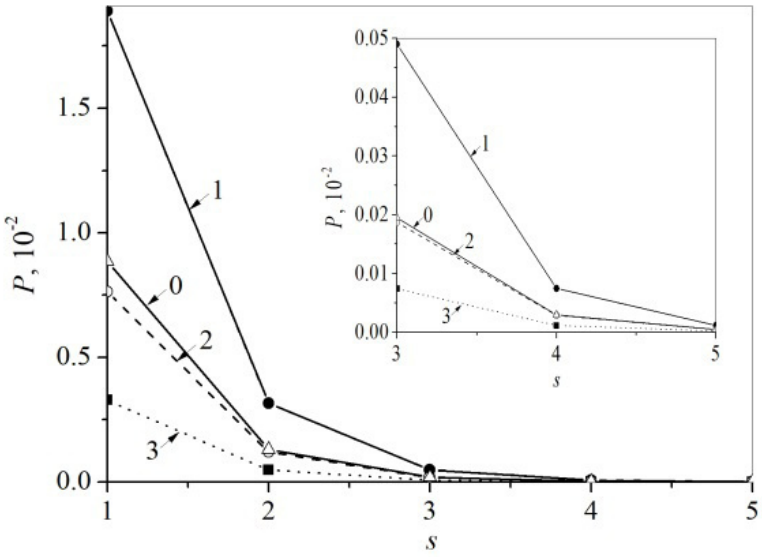

Рисунок 4.3 Графіки залежностей безрозмірних величин втрат енергії електрона в одиницю часу P на збудження власних $HE_{n\,s}$ мод в діелектричному циліндрі від значення радіального модового індексу для ряду значень азимутального модового індексу n

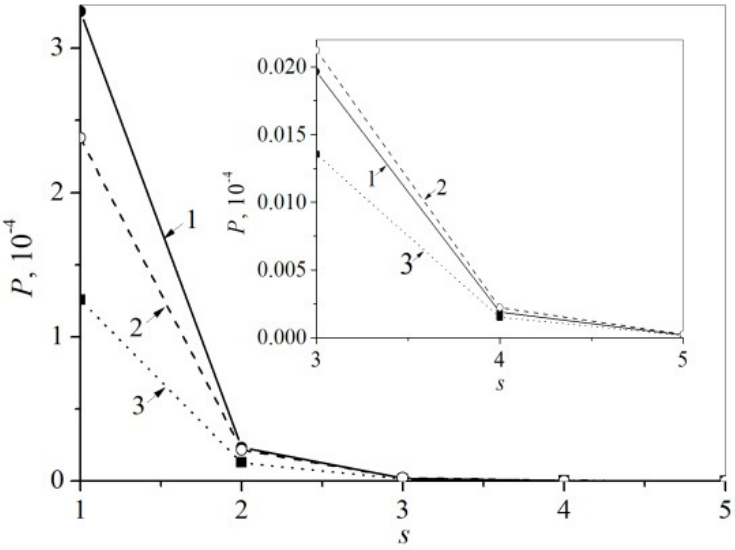

Рисунок 4.4 Графіки залежностей безрозмірних величин втрат енергії електрона в одиницю часу P на збудження власних $HE_{n\,s}$ мод в діелектричному циліндрі від значення радіального модового індексу s для ряду значень азимутального модового індексу n

З рисунку 4.4 видно, що для кожного фіксованого значення індексу *n* величини втрат на збудження власних мод зменшуються з ростом індексу *s*, Порядок проходження кривих не змінюється, тобто для кожного фіксованого значення індексу s виконується умова $P(n_1) > P(n_0) > P(n_j)$ (де $j = 2,3,4...$). З рисунка 4.4 видно, що для кожного фіксованого значення індексуn величини втрат на збудження власних мод зменшуються з ростом індексу *s*, Але порядок проходження кривих не зберігається. Саме, для s=1,2 виконується умова $P(n_j) > P(n_{j+1})$ (де $j = 1,2,3,...$), а починаючи з індексу s=3 ця умова змінюється на: $P(n_2) > P(n_1) > P(n_3) > P(n_{j+1})$ (де $j = 3,4,5...$). Отже, для $HE_{n\,s}$ мод найбільших втрат енергії електрона відповідають збудженню моди $HE_{1\,1}$, а для $s \geq 3$ найбільших втрат енергії електрона відповідають збудженню $EH_{2\,s}$ мод.

Чисельний розрахунок показує, що зі збільшенням радіуса орбіти електрона величини втрат його енергії на збудження власних мод циліндра зменшуються

ВИСНОВКИ

Виконано аналіз досліджень електродинамічної системи, в якій здійснюється взаємодія електрона, що рухається рівномірно та прямолінійно у вільному просторі паралельно твірній діелектричного циліндра, з полями його власних електромагнітних хвиль в умовах резонансів Вавилова–Черенкова. При цьому швидкість електрона покладалася нерелятивістською, в результаті чого поля електрона і випромінювання у вільному просторі розраховувалися в електростатичному наближенні. Для електромагнітних полів всередині циліндра ураховувався ефект запізнювання.

Проаналізовано вираз для втрат енергії випромінювання електрона на збудження власних об'ємно-поверхневих HE_{ns}- і EH_{ns}-мод у діелектричному циліндрі. Вивчено величини цих втрат від значень азимутального n і радіального s модових індексів. Відмічено, що найбільш ефективно збуджуються моди *E*-типу. При цьому величини втрат енергії електрона на збудження мод *E*-типу приблизно на два порядки перевершують величини втрат на збудження мод *H*-типу з тими ж значеннями індексів n і s. Найбільші втрати енергії електрона відповідають збудженню HE_{11}-моди. Найбільші втрати енергії електрона на збудження мод *H*-типу припадають на EH_{11}-моду, а починаючи зі значення $s = 3$ — на EH_{2s}-моду.

Відзначено, що при фіксованому значенні азимутального індексу n зі зростанням радіального індексу s величини втрат зменшуються як для HE_{ns}-, так і для EH_{ns}-мод. Величини втрат енергії електрона зменшуються також зі збільшенням відстані між електроном і поверхнею циліндричного діелектричного хвилеводу.

Освоєно метод аналізу ефекту Вавилова–Черенкова на основі розв’язання рівнянь Максвелла з урахуванням рівняння руху зарядженої частинки та матеріальних рівнянь.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Pickwell E., Cole B.E., Fitzgerald A.J., Wallace V.P., Pepper M. //Simulation of terahertz pulse propagation in biological systems. *Applied Physics Letters*. 2004. Vol. 84. Issue 12. P. 2190–2192. DOI: 10.1063/1.1688448.
2. Kemp M.C. Explosive detection by terahertz spectroscopy – a bridge too far? *IEEE Transactions of Terahertz Science and Technology*. 2011. Vol. 1, No 1. P. 282–292. DOI: DOI:10.1109/TTHZ.2011.2159647.
3. И.Е. Тамм, И.М. Франк Когерентное излучение быстрого электрона в среде, ДАН 14, 107 (1937).
4. Аверков Ю. О., Прокопенко Ю. В., Яковенко В. М. Потери энергии заряженной частицы на возбуждение поверхностных магнитоплазмонов в структуре с двумерной и трехмерной плазмой. Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2015. Т. 148, № 4(10). С. 799–805.
5. Владимиров В.С. *Обобщенные функции в математической физике.* Москва: Наука, 1979. 320 с.
6. Вайнштейн Л.А. *Электромагнитные волны. Москва: Радио и связь, 1988. 440 с.*
7. Ильченко М. Е., Взятышев В. Ф., Гассанов Л. Г., Безбородов Ю. М. *Диэлектрические резонаторы*. Под ред. М. Е. Ильченко. Москва: Радио и связь, 1989. 328 с.
8. Кириченко А.Я., Прокопенко Ю.В., Филиппов Ю.Ф., Черпак Н.Т. *Квазиоптические твердотельные резонаторы*. Киев: Наукова думка, 2008. 286 с.;
9. Аверков Ю. О., Прокопенко Ю. В., Яковенко В. М. Неустойчивость трубчатого электронного пучка при взаимодействии с плазмоподобной средой. *Радиофизика и электроника*. 2016. Т. 7(21), № 2. С. 28–35.
10. Аверков Ю. О., Прокопенко Ю. В., Яковенко В. М. Взаимодействие потока заряженных частиц трубчатого пучка с собственными колебаниями

диэлектрического цилиндра. *Радиофизика и электроника*. 2016. Т. 7(21), № 4. С. 68–76.

11. Аверков Ю. О., Прокопенко Ю. В., Яковенко В. М. Неустойчивость трубчатого электронного пучка, движущегося над диэлектрическим цилиндром. *Журнал технической физики.* 2017. Т. 87, № 10. С. 1571–1577.
12. Скалли М.О. Квантовая оптика / М.О. Скалли, М.С. Зубайри. — М.: ФИЗМАТЛИТ,2003. — 512 с.
13. Fermi E. The ionization loss of energy in gases and in condensed materials / E. Fermi //
14. Ландау Л.Д. Теоретическая физика: учебное пособие в 10 т. Т. VIII. Электродинамика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 656 с.
15. Ландау Л.Д. Теоретическая физика: учебное пособие в 10 т. Т. III. Квантовая механика.
16. Нерелятивистская теория / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. — М.: Наука, 1989. — 768 с.
17. Аверков Ю. О., Прокопенко Ю. В., Яковенко В. М. Спектры собственных волн анизотропного цилиндрического твердотельного волновода. Журнал технической физики. 2019. Т. 89, № 1. С. 9–15.
18. Добротин П А "В "доисторическом" ФИАНе" в кн. Павел Алексеевич Черенков. Человек и открытие (Отв. ред. и сост. А Н Горбунов, Е П Черенкова) (М.: Наука, 1999) 171с.
19. Франк И М "О когерентном излучении быстрого электрона в среде" в сб. Проблемы теоретической физики. Памяти Игоря Евгеньевича Тамма (Отв. ред. В И Ритус) (М.: Наука, 1972) 350с.
20. Брумберг Е М, Вавилов С И . "Фотометрия слабых источников излучения" Изв. АН СССР, ОМЕН, Сер. 7 919 (1933)
21. Добротин Н А, Фейнберг Е Л, Фок М В Природа (11) 58 (1991)
22. Черенков П А "Видимое свечение чистых жидкостей под действием γ-радиации" ДАН СССР 2 (8) 451 (1934)

23. Вавилов С И "О возможных причинах синего γ-свечения жидкостей" ДАН СССР 2 (8) 457 (1934)
24. Григоров Н Л "Как я помогал П. А.Черенкову в лаборатории" в сб. Павел Алексеевич Черенков. Человек и открытие (Отв. ред. и сост. А Н Горбунов, Е П Черенкова) (М.: Наука, 1999) 174с.
25. Тамм И Е, Франк И М "Когерентное излучение быстрого электрона в среде" ДАН СССР 14 107 (1937); см. также перепечатку этой работы, Тамм И Е, Франк И М УФН 93 388 (1967)
26. Гинзбург В Л, Франк И М "Излучение электрона и атома, движущихся по оси канала в плотной среде" ДАН СССР 56 699 (1947)
27. Getting I A "Aproposed detector for high energy electrons and mesons" Phys. Rev. 71 123 (1947)
28. Вавилов Ю.Н., Пугачева Г И, Федоров В М "О мю-мезонных группах вблизи от оси широких атмосферных ливней" ЖЭТФ 44 487 (1963);
29. Аскарьян Г.А. "Избыточный электронный заряд электронно-фотонного ливня и когерентное радиоизлучение от него" ЖЭТФ 41 616 (1961);
30. Бабошин Ю.Б., Лопатников С Л, Попов Н И "Информационная значимость собственного черенковского свечения морской воды для глубоководных животных" ДАН СССР 290 991 (1986)
31. Fazio G G, Jelley J V, Charman W N "Generation of Cherenkov light flashes by cosmic radiation within the eyes of the Apollo astronauts" Nature 228 260 (1970)