Проблемы бионики
1998. Вып. 48. С. 34—42

ХТУРЭ

УДК 519.7

Д. О. КОЛЕСНИКОВ, С. В. КОСТЮК,
С. Ю. ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО

МЕТРИЗУЮЩИЙ ПРЕДИКАТ В КОНЕЧНОМЕРНОМ АРИФМЕТИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ И ФОРМУЛИРОВКА ЕГО ОСНОВНЫХ СВОЙСТВ

В статье разрабатываются основы математической теории различения цветов человеком. Такая теория необходима для совершенствования робототехнических систем, систем распознавания объектов и систем машинной графики и во всех тех областях техники, где используется понятие цвета (телевидение, полиграфия, светотехника и т. д.).

Пусть N и N' — n-мерные арифметические пространства, связанные гомеоморфизмом φ: $N \to N'$, который взаимно однозначно и взаимно непрерывно отображает пространство N на пространство N'. Точка $x' \in N'$ называется образом точки $x \in N$, если $x' = \varphi(x)$, а пространство N' — образом пространства N. Пусть, кроме того, $\rho(x', y')$ — евклидово расстояние между точками x', y' пространства N', определяемое равенством:

$$\rho(x', y') = \sqrt{(\xi'_1 - \eta'_1)^2 + (\xi'_2 - \eta'_2)^2 + \ldots + (\xi'_n - \eta'_n)^2}\,, \qquad (1)$$

где $\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n$ и $\eta'_1, \eta'_2, \ldots, \eta'_n$ — координаты точек x' и y' в пространстве N'. Рассмотрим предикат Φ на N^4, определяемый выражением

$$\Phi(x_1, y_1, x_2, y_2) = D(\rho(\varphi(x_1), \varphi(y_1)), \rho(\varphi(x_2), \varphi(y_2))). \qquad (2)$$

Здесь символ D обозначает предикат равенства, заданный на декартовом квадрате вещественной полуоси $[0, \infty)$, рассматриваемой как множество всех расстояний между точками пространства N'. Предикат вида (1) устанавливает, равны или нет расстояния между образами точек x_1, y_1 и x_2, y_2. Будем говорить, что предикат Φ метризует пространство N'.

Проинтерпретируем сказанное на примере задачи о введении поля зрения человека. Рассмотрим испытуемого, голова которого неподвижна в пространстве и находится в вертикальном положении. Один глаз испытуемого смотрит прямо перед собой, его взгляд направлен на неподвижную точку фиксации, второй глаз закрыт. Выделим в физическом пространстве перед испытуемым какую-нибудь плоскость, перпендикулярную зрительной оси того глаза испытуемого, поле зрения которого исследуется, и проведем на ней через точку фиксации горизонтальную и вертикальную прямые, приняв их за координатные оси двумерного пространства N. Такая плоскость называется кампиметрической [1]. На кампиметрической плоскости исследователь произвольно выбирает две пары точек x_1, y_1 и x_2, y_2 (для этой цели следует брать точечные источники света в темноте) и предлагает испытуемому определить, одинаковы или нет расстояния $\rho(x'_1,y'_1)$ и $\rho(x'_2,y'_2)$ между субъективными образами $x'_1=\varphi(x_1)$, $y'_1=\varphi(y_1)$, $x'_2=\varphi(x_2)$, $y'_2=\varphi(y_2)$ точек x_1, y_1 и x_2, y_2. Символом φ обозначено преобразование кампиметрической плоскости N в ее субъективный образ N' (называемый полем зрения глаза), осуществляемое зрительной системой человека. Если предъявить точки при наличии освещения, то испытуемый невольно будет оценивать расстояние между точками кампиметрической плоскости, а не между их субъективными образами.

Опыты показывают, что испытуемый способен решать предложенную задачу при предъявлении ему любых точек x_1, y_1 и x_2, y_2 кампиметрической плоскости с довольно высокой точностью. Это следует из того факта, что изменение расстояний между точками кампиметрической плоскости всего лишь на несколько процентов способно нарушить равенство расстояний между образами этих точек. Таким образом, в данном эксперименте испытуемый своим поведением реализует с весьма высокой точностью предикат Ф. Отображение φ не является тождественным, поэтому образы точек нельзя отождествлять с самими точками кампиметрической плоскости. Это доказывается тем, что образы точек x_1, y_1 и x_2, y_2, лежащих на кампиметрической плоскости и расположенных на равных расстояниях друг от друга, часто субъективно воспринимаются как не равноудаленные. Вместе с тем наблюдаются случаи, когда образы точек в поле зрения находятся на равных расстояниях друг от друга, а соответствующие им точки на кампиметрической плоскости лежат на разных расстояниях. Субъективные наблюдения испытуемого свидетельствуют также и о том, что непрерывному перемещению точки на кампиметрической плоскости соответствует непрерывное перемещение ее образа в поле зрения и что каждой точке кампиметрической плоскости соответствует свой образ — точка в поле зрения. Следовательно, судя по ощущениям испытуемого, отображение φ в данной интерпретации можно считать гомеоморфизмом.

Сделанные выводы хотелось бы освободить от элемента субъективизма и обосновать чисто физическими экспериментами, используя метод компараторной идентификации. Представляется, что для решения этой задачи достаточно располагать лишь предикатом Ф и его свойствами, не опираясь ни на какие данные субъективного характера. Основываясь на предикате Ф и его свойствах, требуется доказать, что поле зрения представляет собой двумерное арифметическое пространство N', получаемое деформацией φ (т.е. взаимно однозначным и взаимно непрерывным преобразованием) кампиметрической плоскости N. Кроме того, требуется найти конкретный вид гомеоморфизма φ. Первая задача является задачей структурной метризации поля зрения, вторая — задачей параметрической метризации поля зрения.

В формальной постановке, независимой от какой бы то ни было интерпретации, задача структурной метризации пространства N' формулируется следующим образом. Дано n-мерное арифметическое пространство N с определенными на нем операциями сложения векторов и умножения вещественного числа на вектор. На N^4 определен предикат $\Phi(x_1, y_1, x_2, y_2)$. Требуется сформулировать такую систему А свойств предиката Ф, при выполнении которой предикат Ф можно было бы представить в виде (2). Вместе с тем, если хотя бы одно из свойств системы А для предиката Ф не выполняется, то его нельзя будет представить в виде (2). Задача параметрической метризации пространства N' сводится к отысканию конкретного вида функции φ, извлекаемого из значений предиката Ф, получаемых в опытах на испытуемом. Если бы задачу удалось решить, тогда можно было бы математически описать механизм формирования поля зрения человека. Имея такое описание, можно было бы применить его для целей совершенствования "зрения" роботов, узнающих автоматов и других технических систем.

Задачей идентификации поля зрения человека далеко не исчерпывается область возможного применения теории метризации конечномерного арифметического пространства. Другой важной содержательной интерпретацией этой теории является проблема введения естественной метрики в пространстве цветов. Назовем ее цветовой интерпретацией задачи метризации. Содержательную интерпретацию задачи метризации, рассмотренную первой, назовем пространственной. В случае цветовой интерпретации множество N понимается как объективное цветовое пространство, в котором каждый цвет представлен набором колориметрических координат. Сумма цветов в цветовом пространстве N определяется суммой световых излучений, породивших данные цвета. Произведение числа на цвет в пространстве N определяется произведением этого числа на световое излучение, соответствующее данному цвету. Гомеоморфизм φ понимается как такое искривление цветового пространства N, в результате которого получается субъективное цветовое пространство N', называемое еще иначе равноконтрастным цветовым пространством. Равноконтрастность цветового пространства означает, что любые пары цветов, находящиеся в пространстве N'

на одном и том же расстоянии друг от друга, выглядят равноудаленными также и в психофизическом смысле. Если б удалось построить равноконтрастное цветовое пространство, то это было бы равносильно отысканию наиболее экономного способа кодирования информации о цвете воспринимаемых объектов, что дало бы существенную экономию объема машинной памяти, требуемой для запоминания цветных изображений.

Еще одна интерпретация задачи метризации пространства естественно возникает при автоматическом управлении объектами. Назовем ее технической. Пусть некоторый объект преобразует входные сигналы из m-мерного векторного пространства M в выходные сигналы арифметического пространства N меньшей или той же размерности n. Выходной сигнал представлен набором числовых параметров, по которым осуществляется управление объектом. Управление ведется по расстоянию ρ между текущим выходным сигналом и некоторым эталонным набором чисел, которые могут меняться во времени. Цель управления объектом состоит в том, чтобы, меняя его параметры, постоянно держать выходной сигнал объекта достаточно близким к эталонному. При этом важно, чтобы фактическая точность такого приближения находилась в заранее заданных пределах. Как показывает практика управления объектами, заданная точность сравнения текущего сигнала с эталонным обычно не остается постоянной и меняется вместе с изменением эталонного сигнала. Например, текущий сигнал требуется сравнивать с малым эталонным сигналом обычно с меньшей ошибкой, чем при высоком уровне эталонного сигнала.

Трудно рассчитывать на то, чтобы естественным образом формируемое объектом управления пространство выходных сигналов всегда само собой удовлетворяло указанному выше требованию. Поэтому пространство выходных сигналов обычно нуждается в некотором "исправлении". Стандартный прием такого исправления состоит в том, что пространство выходных сигналов деформируют, причем с таким расчетом, чтобы равным геометрическим расстояниям между точками пространства после его деформации всегда соответствовала одинаковая их удаленность друг от друга в некотором содержательном смысле, диктуемом соображениями, направленными на достижение максимальной эффективности процесса управления объектом. Для этого придется растянуть те области пространства, внутри которых точность сравнения фактического выходного сигнала объекта с эталонным недостаточна, и сжать те области, где эта точность избыточна.

Теперь вернемся к формальному описанию метризующего предиката Φ и сформулируем некоторые его свойства. Очевидно, что любой предикат Φ вида (2) рефлексивен, симметричен и транзитивен относительно пар точек, для которых определяется расстояние ρ между их образами по формуле

(1). Таким образом, приходим к следующим трем законам, которым подчиняется предикат Ф:

парной рефлексивности

$$\forall\, x,y \in N \;\; \Phi(x,y,x,y); \tag{3}$$

парной симметричности

$$\forall\, x_1, y_1, x_2, y_2 \in N;$$

$$\Phi(x_1, y_1, x_2, y_2) \supset \Phi(x_2, y_2, x_1, y_1)); \tag{4}$$

парной транзитивности

$$\forall\, x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 \in N;$$

$$\Phi(x_1, y_1, x_2, y_2) \wedge \Phi(x_2, y_2, x_3, y_3) \supset$$

$$\supset \Phi(x_1, y_1, x_3, y_3)). \tag{5}$$

Евклидово расстояние ρ обладает симметрией [3], это означает, что $\rho(x',y')=\rho(y',x')$ для любых $x',y' \in N'$. Поэтому для метризующего предиката справедлив закон одиночной симметричности

$$\forall\, x_1, y_1, x_2, y_2 \in N;$$

$$\Phi(x_1, y_1, x_2, y_2) \supset \Phi(y_2, x_2, x_1, y_1)). \tag{6}$$

Евклидово расстояние ρ удовлетворяет также аксиоме тождества [4]. Это означает, что расстояние $\rho(x',y')$ между любыми совпадающими точками $x'=y'$ пространства N' должно равняться нулю. Кроме того, если x' и y' таковы, что $\rho(x',y')=0$, то всегда $x'=y'$. Отсюда непосредственно вытекают следующие свойства метризующего предиката:

первый закон тождества

$$\forall\, x,y \in N \; \Phi(x,x,y,y) \tag{7}$$

и второй закон тождества

$$\forall\, x, x_1, y_1 \in N \; \Phi(x, x, x_1, y_1) \supset (x_1 = y_1). \tag{8}$$

Рассмотрим предикат R на N^3, значения которого определяются через значения предиката Ф при любых $x,y,z \in N$ следующим образом:

$$R(x,y,z)=\Phi(x,z,z,y)\wedge$$

$$\wedge\forall\, t\in N(\Phi(x,t,t,y)\wedge\Phi(z,x,x,t)\supset z=t). \qquad (9)$$

Равенство $R(x,y,z)=1$ означает, что точка $\varphi(z)$ лежит посредине отрезка прямой, соединяющего точки $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ в пространстве N'. В самом деле, из условия $R(x,y,z)=1$ согласно (8) следует, что а) $\Phi(x,z,z,y)=1$, б) $\forall t\in N$ $(\Phi(x,t,t,y)\wedge\Phi(z,x,x,t)\supset z=t)=1$. Утверждение а) означает, что точка $\varphi(z)$ равноудалена от точек $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$. Утверждение б), взятое вместе с утверждением а), означает, что, если какая-то точка $\varphi(t)$ равноудалена от точек $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ на такое расстояние, что и точка $\varphi(z)$ от точек $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$, то точка $\varphi(t)$ всегда совпадает с точкой $\varphi(z)$. Таким образом, точка $\varphi(z)$ делит пополам отрезок прямой, соединяющий точки $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$. Сказанное иллюстрируется для случая двумерного пространства диаграммой, изображенной на рис 1.

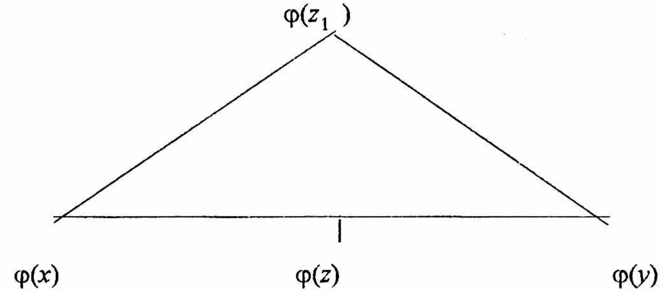

Рис. 1

Пусть $\varphi(t)$ — точка, лежащая на расстоянии ρ от точек $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$. Такая точка единственна, если она лежит на середине отрезка прямой, соединяющего точки $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$. На диаграмме эта единственная точка обозначена символом z. Если же точка $\varphi(t)$ не совпадает с точкой $\varphi(z)$, то всегда найдется еще одна точка $\varphi(t_1)\neq\varphi(t)$, которая так же, как и точка $\varphi(t)$, лежит на расстоянии ρ от точек $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$.

Равенство же $R(x,y,z)=0$ означает, что точка $\varphi(z)$ не лежит на середине отрезка прямой, соединяющего точки $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$. В самом деле, если $R(x,y,z)=0$, то условие а) или условие б) не выполняется. В первом случае точка $\varphi(z)$ не лежит посредине отрезка прямой, соединяющего точки $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$, во втором случае точка $\varphi(z)$ не лежит на этом отрезке. Таким образом, отношение, соответствующее предикату $R(x,y,z)$, задает операцию отыскания средней точки $\varphi(z)$ между точками $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ пространства N'. Эту операцию назовем внутренним равноделением точек x и y. Для нее, очевидно, выполняются свойства всюду определенности

$$\forall\, x,y\in N\ \exists\, z\in N\ R(x,y,z) \tag{10}$$

и однозначности

$$\forall\, x,y,z,z_1\ \in N\ \ (R(x,y,z)\wedge R(x,y,z_1\ )\supset z=z_1\ ). \tag{11}$$

Операцию внутреннего равноделения точек x и y, которая ставит им в соответствие точку z, обозначим кружком: $z=x\circ y$. Она определена на N^2 со значениями в множестве N. Из определения предиката Ф с очевидностью следует, что в арифметическом пространстве N для любых двух точек x и y всегда найдется единственная точка z, такая что точка y будет результатом внутреннего равноделения интервала между точками x и z. Эту операцию назовем внешним равноделением точек x и y, обозначая ее звездочкой: $z=x*y$. Последнее равенство равносильно равенству $x\circ z=y$. Внешнее равноделение обладает свойством всюду определенности

$$\forall\, x,y\in N\,\exists\, z\in N\, R(x,z,y) \tag{12}$$

и свойством однозначности

$$\forall\, x,y,z,z_1\ \in N\, (R(x,z,y)\wedge R(x,z_1,y)\supset z=z_1). \tag{13}$$

Очевидно, что операция внутреннего равноделения обладает свойствами коммутативности

$$\forall\, x,y\in N\, (x\circ y=y\circ x) \tag{14}$$

и идемпотентности

$$\forall\, x,\ y\in N\, (x\circ x=x). \tag{15}$$

Заметим, что свойство (14) логически следует из свойств (3), (6) и (8). Действительно, согласно определению (9) предиката R имеем:

$$R(x,x,x)=\Phi(x,x,x,x)\wedge\forall\ t\in N;$$

$$\Phi(x,t,t,x)\wedge\Phi(x,x,x,\mathrm{t})\supset x=t).$$

По закону парной рефлексивности (3) находим: $\Phi(x,x,x,x)=1$. По законам парной симметричности (6) имеем: $\Phi(x,t,t,x)=1$. По второму закону тождества (8) из $\Phi(x,x,x,t)$ следует $x=t$. Поэтому $R(x,x,x)=1\ \forall\ t\in N\ (1\wedge\Phi(x,x,x,t)\supset x=t)=1$, а значит, $x\circ x=x$.

Из зависимостей (1) и (2), определяющих метризующий предикат Φ, следует, что непрерывное изменение положения точек x, y в пространстве N влечет непрерывное изменения положение точек xoy и $x*y$, являющихся результатом их внутреннего и внешнего равноделения. Соответственно этому имеет место свойство непрерывности операций xoy и $x*y$:

функции xoy и $x*y$ непрерывны по

совокупности переменных x и y. (16)

Имеется в виду непрерывность, индуцируемая евклидовой метрикой в пространстве N.

В любом четырехугольнике n-мерного арифметического пространства N' отрезки прямых, соединяющие середины противоположных сторон, пересекаются в точке 0, которая делит их пополам [2]. Это свойство иллюстрируется в двумерном случае диаграммой, изображенной на рис. 2.

Его истинность вытекает из тождества

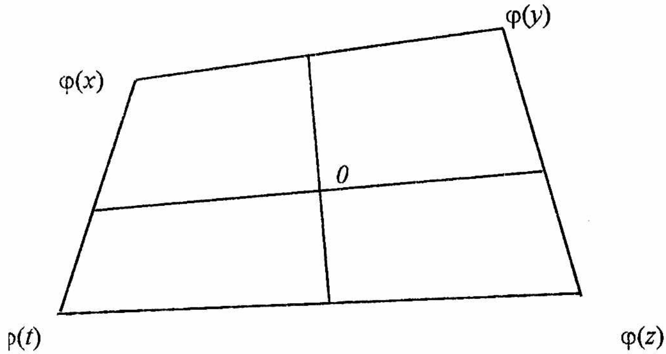

Рис. 2

$$\left(\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}+\frac{\varphi(z)+\varphi(t)}{2}\right)\Big/2=\left(\frac{\varphi(t)+\varphi(x)}{2}+\frac{\varphi(y)+\varphi(z)}{2}\right)\Big/2.$$

Отсюда следует свойство четырехугольника:

$\forall\, x, y, z, t \in N\ ((xoy)\ o\ (zot)=(tox)\ o\ (yoz)).$ (17)

Обратим внимание на то обстоятельство, что выражения (9)—(17) задают свойства предиката Ф, несмотря на то, что имя этого предиката в них не фигурирует. Это вытекает из того, что предикат R выражается зависимостью (1) через предикат Ф, а операция ○ определяется предикатом R. Таким образом, выражения (9)—(17) представляют собой сокращенную запись свойств предиката Ф. Все эти выражения можно при желании записать в виде высказываний, зависящих только от предиката Ф, если заменить в них предикат R и операцию ○ через предикат Ф.

Список литературы: 1. *Гебер Р.* Курс физиологии человека. М.: Биомедгиз, 1936. 678 с. 2. *Ефимов Н.В.* Высшая геометрия. М.: Физматгиз, 1961. 580 с. 3. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с. 4. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения. М.: ИЛ, 1969. 1072 с.

Поступила в редколлегию 15.10.97

Проблемы бионики
1998. Вып. 48. С. 43—47

ХТУРЭ

УДК 519.7

М.Ф. БОНДАРЕНКО, Е.В. ЖУРАВОК, В.А. ЧИКИНА

АППАРАТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛОГИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Системы логических уравнений, которые используются для описания процессов языкового поведения человека, могут быть решены на ПЭВМ программным путем, для чего уже существует довольно хорошо разработанное программное обеспечение. Однако, в ряде случаев является весьма полезной аппаратная реализация данных булевых систем уравнений, так как при этом достигается значительно большая скорость решения.

С целью расширения функциональных возможностей обратимых переключательных цепей путем синтеза смешанных переключательных цепей первого и второго рода с обнаружением ошибок осуществлена разработка модуля для цифровой обработки текстовой информации. Данное устройство может быть использовано при создании аппаратных средств цифровой обработки текстовой информации.

Представленная на рисунке структура модуля обеспечивает аппаратное решение следующей системы обратимых булевых уравнений:

$$y^{ы} = x_2^{м} x_8^{м} w^1 \vee x_2^{м} w^4; \tag{1}$$

$$y^{и} = x_2^{м} x_8^{м} w^1 \vee x_2^{м} w^2 \vee x_2^{м} w^3 \vee x_2^{м} w^5 \vee x_2^{м} w^6, \tag{2}$$

где все переменные являются предикатами узнавания соответствующих букв.

Уравнение (2) может быть представлено в виде

$$y^{и} = z_1^1 \vee z_2^1; \tag{3}$$

где

$$z_1^1 = x_2^{м} x_8^{м} w^1 \vee x_2^{м} w^2;$$

(4)

$$z_2^1 = x_2^{м} w^3 \vee x_2^{м} w^5 \vee x_2^{м} w^6. \tag{5}$$

Для решения уравнений (4) и (5) целесообразно использовать обратимые переключательные цепи первого рода. На структурной схеме (рис.) им соответствуют блоки 1 и 2 соответственно.