

ЧИСЛА ФЕРМА (ТАРТАЛЬИ) И РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ РЕШЕТКАХ РЕЗОНАНСНЫХ МАГНИТОДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СФЕР

Целью работы является решение задачи о рассеянии электромагнитных волн на специальных сложных пространственных решетках малых однородных резонансных магнито-диэлектрических сфер, пространственное распределение которых подчинено числам Ферма (Тартальи) – фигурным числам [1]. В задаче длина рассеиваемой волны может быть соизмерима с постоянными решетки, что позволяет изучить влияние решеточных структурных резонансов электромагнитного взаимодействия между сферами на внутренние резонансы сфер решетки и их тонкую структуру.

Постановка и решение задачи

Рассмотрим сложную пространственную решетку, состоящую из C подрешеток ($c \in C$). Эти подрешетки порождаются координатным представлением, которое в прямоугольной декартовой системе координат имеет вид:

$$\begin{aligned} x_{c,s} &= [s - 0,5\{(-1)^s - 1\}]d - (-1)^{s-1}x_{c,s=0} & (s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ y_{c,t} &= [t - 0,5\{(-1)^t - 1\}]h - (-1)^{t-1}y_{c,t=0} & (t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ z_{c,p} &= [p - 0,5\{(-1)^p - 1\}]l - (-1)^{p-1}z_{c,p=0} & (p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \left[\frac{(|s| + |t|)!}{|s|!|t|!} - 1 \right]), \end{aligned} \quad (1)$$

где величины d, h, l определяются условиями $x = 0, x = d; y = 0, y = h; z = 0, z = l$, а $x_{c,s=0}, y_{c,t=0}, z_{c,p=0}$ – координаты узла, порождающего подрешетку c и находящегося внутри области (рис. 1)

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_{c,s=0} \leq d, \\ 0 &\leq y_{c,t=0} \leq h, \\ 0 &\leq z_{c,p=0} \leq l. \end{aligned} \quad (2)$$

Координаты $x_{c,s}, y_{c,t}, z_{c,p}$ – определяют положение узлов подрешетки c вне пределов области (2) и являются функциями координат $x_{c,s=0}, y_{c,t=0}, z_{c,p=0}$. В координатное представление (1) можно ввести зависимость от времени, если координаты $x_{c,s=0}, y_{c,t=0}, z_{c,p=0}$ считать некоторыми функциями времени. Каждому узлу пространственной подрешетки c (1) сопоставляется упорядоченная тройка чисел $u = c(p, s, t)$, выделенный узел решетки будем обозначать $u' = c'(p', s', t')$, а узел внутри области (2) – $c(p = 0, s = 0, t = 0)$. Задавая максимальные значения для чисел (p, s, t) в (1), можно рассматривать конечные и бесконечные решетки.

Нужный тип элементарной ячейки решетки (примитивную, объемноцентрированную, гранецентрированную и другие) формируют из C узлов внутри области (2), которую повторит за пределами области (2) координатное представление (1) в виде пространственной решетки определенного вида.

На (рис. 1) представлены пространственные распределения узлов решетки, когда порождающий узел решетки находится в центре области (2), для случаев: $p = 0, \pm 1; s = 0, \pm 1; t = 0, \pm 1$ и $p = 0, 1, 2, 3, 4, 5; s = 0, \pm 1, \pm 2; t = 0, \pm 1, \pm 2$.

Распределение узлов вдоль оси z подчинено таблице чисел Ферма (рис.2). Каждой тройке чисел $(p = 0, s, t)$ плоскости $x_{c,s}, y_{c,t}, z_{c,p=0}$ ставится в соответствие определенное число таблицы Ферма, например, точке $(p = 0, s = -3, t = -3)$ соответствует число 20, точке $(p = 0, s = -5, t = 4)$ – число 126, а точке $(p = 0, s = 4, t = 3)$ – число 35.

Эти числа и определяют число узлов вдоль оси z (1) для заданной точки $(p = 0, s, t)$ (рис. 2). Между тройкой чисел $(p = 0, s, t)$ плоскости $x_{c,s}, y_{c,t}, z_{c,p=0}$ (1) и числом таблицы Ферма существует связь, определяемая функцией

$$\frac{(|s| + |t|)!}{|s|!|t|!}$$

Отсюда числа p , определяющие координаты узлов вдоль оси z (1), задаются последовательностью

$$0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \left(\frac{(|s| + |t|)!}{|s|!|t|!} - 1 \right),$$

где $|s|, |t| = 0, 1, 2, 3, \dots$

Если изменять координаты узлов в области (2), то положения узлов вне области (2) будут также соответствующим образом смещаться и будет происходить перестройка ячеек и формирование пространственной конфигурации решетки.

Расстояние между узлами определим (1)

$$r_{c'}(p', s', t'), c(p, s, t) = \sqrt{(x_{c',s'} - x_{c,s})^2 + (y_{c',t'} - y_{c,t})^2 + (z_{c',p'} - z_{c,p})^2}. \quad (3)$$

Если в центре области (2) находится один порождающий узел решетки, то для случая, когда $(p, s = 1, t)$, из (1) получим плоскую решетку с распределением узлов вдоль оси z , подчиняющимся ряду натуральных чисел (рис.3).

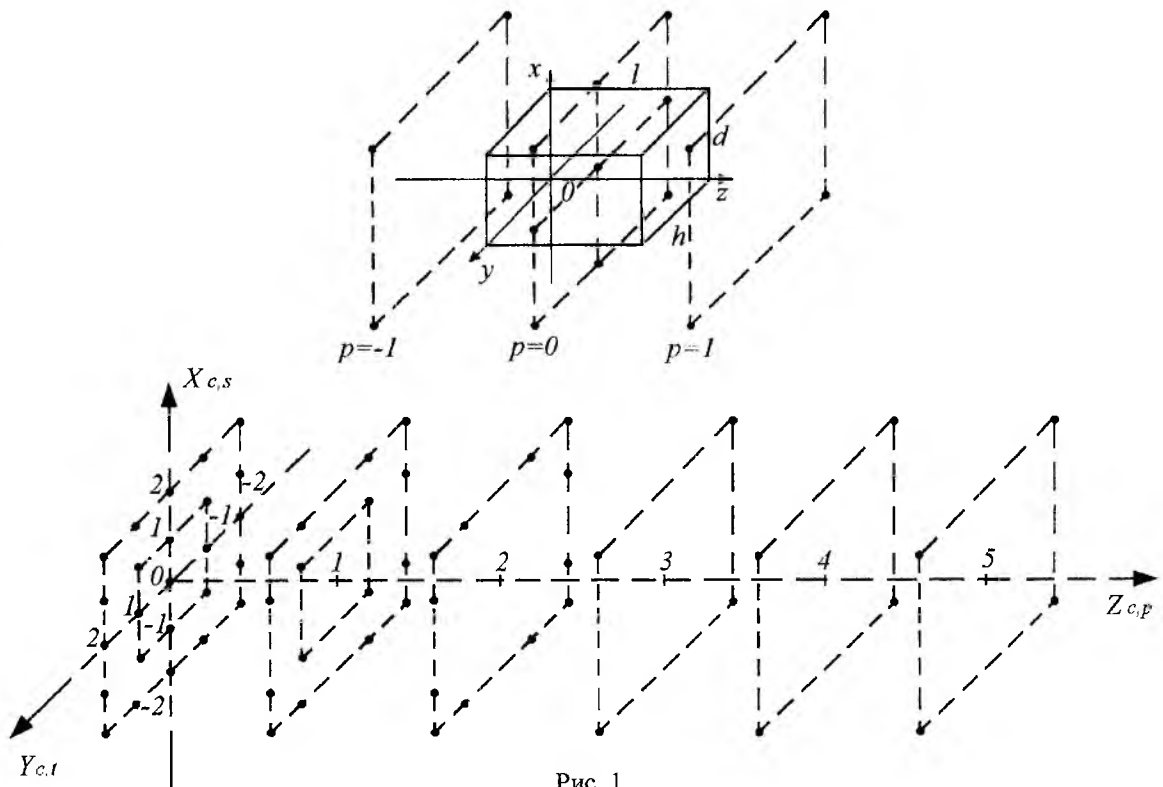


Рис. 1

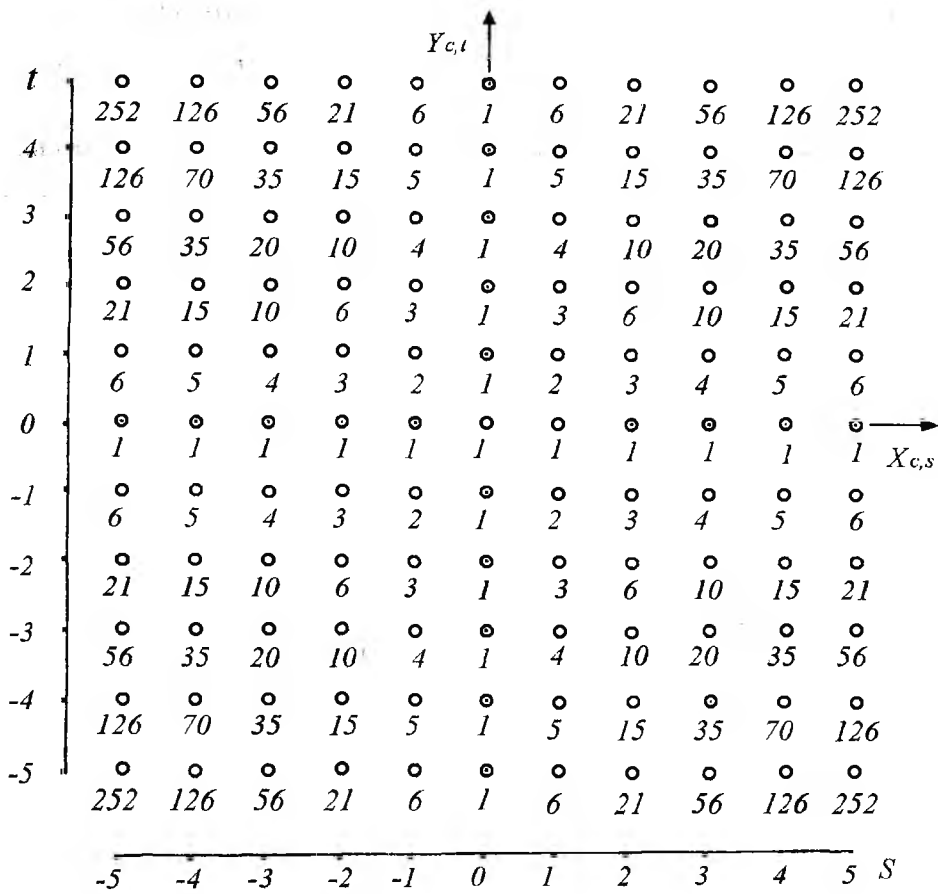


Рис. 2

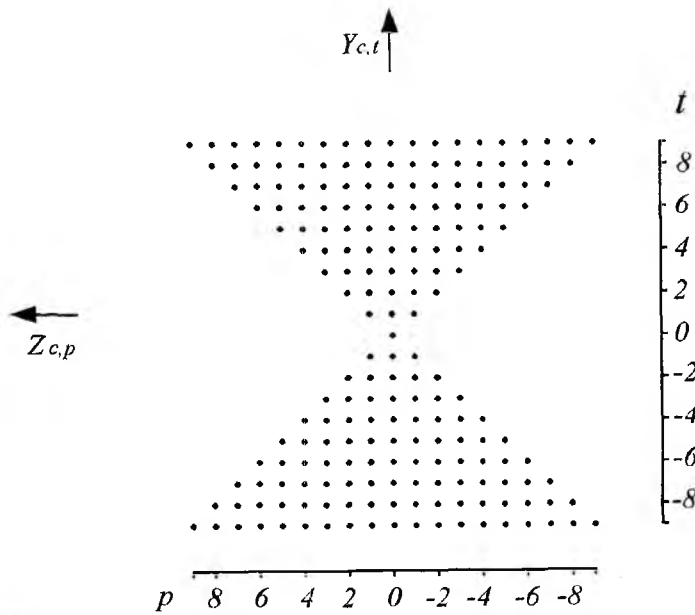


Рис. 3

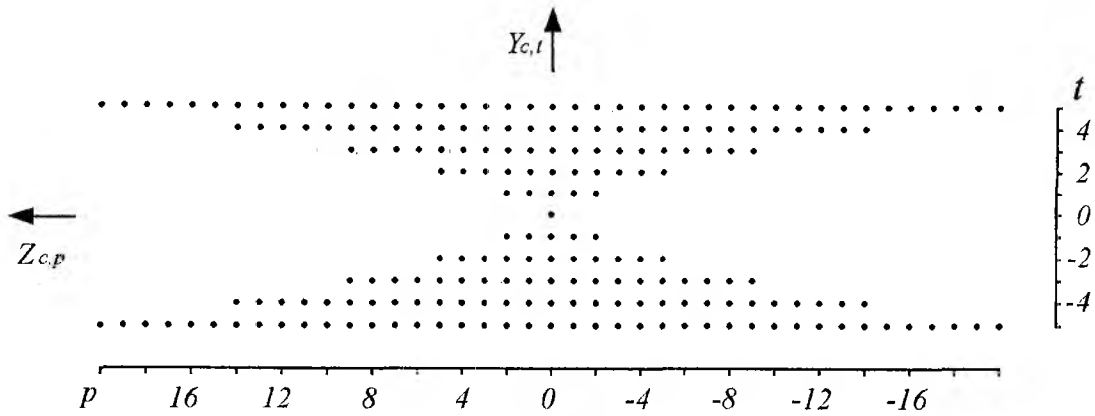


Рис. 4

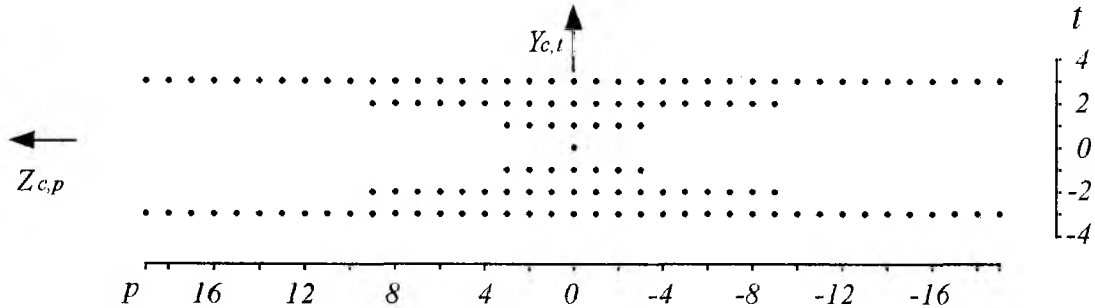


Рис. 5

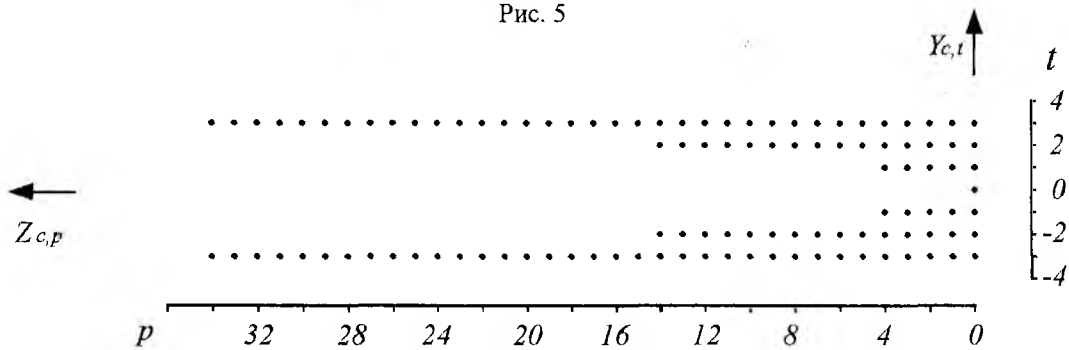


Рис. 6

Если $(p, s = 2, t)$, то возникает плоская решетка с распределением узлов вдоль оси z , подчиняющимся фигурным треугольным числам $(1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots)$ (рис. 4).

Когда $(p, s = 3, t)$, то возникает плоская решетка с распределением узлов вдоль оси z , подчиняющимся фигурным трехсторонним пирамидальным числам $(1, 4, 10, 20, 35, 56, \dots)$ (рис. 5).

Если $(p, s = 4, t)$, то возникает плоская решетка, подчиняющаяся последовательности чисел $(1, 5, 15, 35, 70, 126, \dots)$ (рис. 6).

Производя соответствующие сечения этого распределения узлов (1), можно получить различного вида плоские перестраиваемые решетки. Если в области (2) сформирована элементарная ячейка, то вместо одиночных узлов в решетках (рис. 3, 4, 5, 6) будут находиться ячейки из области (2).

В узлы подрешеток (1) помещаются центры сфер с проницаемостями $\varepsilon_{c(p,s,t)}, \mu_{c(p,s,t)}$ и радиусами $a_{c(p,s,t)}$, далее обозначим – $\varepsilon_c, \mu_c, a_c$. Сферы решетки находятся в свободном пространстве.

Будем считать, что вне сфер $a/\lambda \ll 1$, но внутри сферы возможен резонансный случай $a/\lambda_g \sim 1$, где λ – длина волны в свободном пространстве, а λ_g – длина волны в сфере [2].

Для решения задачи будем использовать интегральные уравнения [3] и решать её будем в два этапа. На первом этапе найдем внутреннее поле рассеивающих сфер, а на втором – найдем поле, рассеянное пространственной решеткой сфер. Поля представим в виде $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r})e^{i\omega t}$, $\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{H}(\vec{r})e^{i\omega t}$.

Рассеянное поле по известному внутреннему полю рассеивателей определим через электрический $\vec{\Pi}^{\text{э}}$ и магнитный $\vec{\Pi}^{\text{м}}$ потенциалы Герца

$$\begin{aligned}\vec{E}_{\text{расс}} &= (\nabla\nabla + k^2\varepsilon_0\mu_0)\vec{\Pi}^{\text{э}} - ik\mu_0[\nabla, \vec{\Pi}^{\text{м}}], \\ \vec{H}_{\text{расс}} &= (\nabla\nabla + k^2\varepsilon_0\mu_0)\vec{\Pi}^{\text{м}} + ik\varepsilon_0[\nabla, \vec{\Pi}^{\text{э}}].\end{aligned}\quad (4)$$

Потенциалы Герца рассеянного поля имеют вид

$$\begin{aligned}\vec{\Pi}^{\text{э}} &= \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \right) \vec{E}^0(\vec{r}') f(|\vec{r} - \vec{r}'|) dV, \\ \vec{\Pi}^{\text{м}} &= \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \vec{H}^0(\vec{r}') f(|\vec{r} - \vec{r}'|) dV,\end{aligned}\quad (5)$$

где $\vec{E}^0(\vec{r}')$, $\vec{H}^0(\vec{r}')$ – внутренние поля рассеивателя, V – объем рассеивателя, ε_0, μ_0 – проницаемости заполнения свободного пространства, функция $f(|\vec{r} - \vec{r}'|)$ является решением уравнения

$$\Delta f(|\vec{r} - \vec{r}'|) + k^2\varepsilon_0\mu_0 f(|\vec{r} - \vec{r}'|) = -4\pi\delta(|\vec{r} - \vec{r}'|),$$

удовлетворяющего условию излучения на бесконечности и имеет вид

$$f(|\vec{r} - \vec{r}'|) = \frac{e^{-ki\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.\quad (6)$$

Вычислим вначале внутреннее поле рассеивателей для случая, когда отношение $a/\lambda_g \ll 1$ внутри и $a/\lambda \ll 1$ – вне сферы, а потом результаты вычислений обобщим и на резонансный случай, когда $a/\lambda_g \sim 1$ внутри сферы. Можно показать, что для внешних точек сферы ($r > r'$) интеграл по объему сферы от функции Грина для свободного пространства (6) имеет вид

$$W(\vec{r}) = \int_V \frac{e^{-ik\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV = \frac{4\pi}{k_1^3} (\sin k_1 a - k_1 a \cos k_1 a) \frac{e^{-ik_1 r}}{r},\quad (7)$$

где $k_1 = k\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, $k = 2\pi/\lambda$, а r – определяет расстояние от центра до внешних точек сферы.

Внутреннее поле $c'(p', s', t')$ сферы найдем из системы квазистационарных неоднородных уравнений, которые построим, опираясь на интегральные уравнения [3]. Входящие в эту систему неоднородные уравнения для произвольной выделенной сферы имеют вид

$$\begin{aligned}
\bar{E}_{0c'}(p',s',t')(\bar{r}',t) &= \left\{ \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\varepsilon_{c'}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \right] \bar{E}^0_{c'}(p',s',t')(\bar{r}',t) - \right. \\
&- \sum_p \sum_s \sum_t \left\{ \left(\nabla \nabla + k^2 \varepsilon_0 \mu_0 \right) \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon_{c'}}{\varepsilon_0} - 1 \right) W^{\mathcal{E}}_{c'}(p,s,t)(\bar{r}) \bar{E}^0_{c'}(p,s,t)(\bar{r}',t) - \right. \\
&c'(p,s,t) \neq c'(p',s',t') \\
&- ik\mu_0 \left[\nabla, \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_{c'}}{\mu_0} - 1 \right) W^M_{c'}(p,s,t)(\bar{r}) \bar{H}^0_{c'}(p,s,t)(\bar{r}',t) \right] \left. \right\} - \\
&- \sum_{c=1}^C \left[\sum_p \sum_s \sum_t \left\{ \left(\nabla \nabla + k^2 \varepsilon_0 \mu_0 \right) \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} - 1 \right) W^{\mathcal{E}}_{c'}(p,s,t)(\bar{r}) \bar{E}^0_{c'}(p,s,t)(\bar{r}',t) - \right. \right. \\
&(c \neq c') \\
&- ik\mu_0 \left[\nabla, \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_c}{\mu_0} - 1 \right) W^M_{c'}(p,s,t)(\bar{r}) \bar{H}^0_{c'}(p,s,t)(\bar{r}',t) \right] \left. \right] \left. \right\}, \tag{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{H}_{0c'}(p',s',t')(\bar{r}',t) &= \left\{ \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\mu_{c'}}{\mu_0} - 1 \right) \right] \bar{H}^0_{c'}(p',s',t')(\bar{r}',t) - \right. \\
&- \sum_p \sum_s \sum_t \left\{ \left(\nabla \nabla + k^2 \varepsilon_0 \mu_0 \right) \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_{c'}}{\mu_0} - 1 \right) W^M_{c'}(p,s,t)(\bar{r}) \bar{H}^0_{c'}(p,s,t)(\bar{r}',t) + \right. \\
&c'(p,s,t) \neq c'(p',s',t') \\
&+ ik\varepsilon_0 \left[\nabla, \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon_{c'}}{\varepsilon_0} - 1 \right) W^{\mathcal{E}}_{c'}(p,s,t)(\bar{r}) \bar{E}^0_{c'}(p,s,t)(\bar{r}',t) \right] \left. \right\} - \\
&- \sum_{c=1}^C \left[\sum_p \sum_s \sum_t \left\{ \left(\nabla \nabla + k^2 \varepsilon_0 \mu_0 \right) \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\mu_c}{\mu_0} - 1 \right) W^M_{c'}(p,s,t)(\bar{r}) \bar{H}^0_{c'}(p,s,t)(\bar{r}',t) + \right. \right. \\
&(c \neq c') \\
&+ ik\varepsilon_0 \left[\nabla, \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} - 1 \right) W^{\mathcal{E}}_{c'}(p,s,t)(\bar{r}) \bar{E}^0_{c'}(p,s,t)(\bar{r}',t) \right] \left. \right] \left. \right\},
\end{aligned}$$

где $\bar{E}_{0c'}(p',s',t')(\bar{r}',t)$, $\bar{H}_{0c'}(p',s',t')(\bar{r}',t)$ и $\bar{E}^0_{c'}(p',s',t')(\bar{r}',t)$, $\bar{H}^0_{c'}(p',s',t')(\bar{r}',t)$ – поле падающей волны и внутреннее поле $c'(p',s',t')$ сферы, а $\bar{E}_{c'}(p,s,t)(\bar{r},t)$, $\bar{H}_{c'}(p,s,t)(\bar{r},t)$ – внутренние поля остальных сфер.

Величины $W^{\mathcal{E}}_{c'}(p,s,t)(\bar{r}')$, $W^M_{c'}(p,s,t)(\bar{r}')$ имеют вид (3,7,8)

$$\begin{aligned}
W^{\mathcal{E}}_{c'}(p,s,t)(\bar{r}') &= \frac{4\pi}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \frac{e^{-ik_1 r_{c'}(p',s',t'),c(p,s,t)}}{r_{c'}(p',s',t'),c(p,s,t)}, \\
W^M_{c'}(p,s,t)(\bar{r}') &= -\frac{4\pi}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \frac{e^{-ik_1 r_{c'}(p',s',t'),c(p,s,t)}}{r_{c'}(p',s',t'),c(p,s,t)}.
\end{aligned}$$

Первые слагаемые справа в уравнениях (8) связаны с внутренним полем $c'(p', s', t')$ сферы без учета влияния всех остальных сфер, оставшиеся слагаемые учитывают влияние на $c'(p', s', t')$ – рассеиватель всех остальных сфер.

Уравнения (8) представляют систему $2N = 2 \sum_{c=1}^C N_c$ векторных неоднородных уравнений, где N – общее число сфер решетки, а N_c – число сфер подрешетки c . Решение этой системы уравнений для выделенной сферы имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{E}_{c'(p', s', t')}^0(\bar{r}', t) &= \frac{1}{\Delta^{\text{эм}}} \sum_{c=1}^C \left(\sum_u \left[\hat{g}_u^{\text{э}u'} \bar{E}_{0c(p, s, t)}(\bar{r}', t) + \hat{\beta}_u^{\text{э}u'} \bar{H}_{0c(p, s, t)}(\bar{r}', t) \right] \right), \\ \bar{H}_{c'(p', s', t')}^0(\bar{r}', t) &= \frac{1}{\Delta^{\text{эм}}} \sum_{c=1}^C \left(\sum_u \left[\hat{\beta}_u^{\text{м}u'} \bar{H}_{0c(p, s, t)}(\bar{r}', t) + \hat{g}_u^{\text{м}u'} \bar{E}_{0c(p, s, t)}(\bar{r}', t) \right] \right), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\hat{g}_u^{\text{э}u'} = \begin{bmatrix} g_{xxu}^{\text{э}u'} & g_{xyu}^{\text{э}u'} & g_{xzu}^{\text{э}u'} \\ g_{yxu}^{\text{э}u'} & g_{yyu}^{\text{э}u'} & g_{yzu}^{\text{э}u'} \\ g_{z xu}^{\text{э}u'} & g_{zyu}^{\text{э}u'} & g_{zzu}^{\text{э}u'} \end{bmatrix}; \quad \hat{\beta}_u^{\text{э}u'} = \begin{bmatrix} \beta_{xxu}^{\text{э}u'} & \beta_{xyu}^{\text{э}u'} & \beta_{xzu}^{\text{э}u'} \\ \beta_{yxu}^{\text{э}u'} & \beta_{yyu}^{\text{э}u'} & \beta_{yzu}^{\text{э}u'} \\ \beta_{z xu}^{\text{э}u'} & \beta_{zyu}^{\text{э}u'} & \beta_{zzu}^{\text{э}u'} \end{bmatrix};$$

$$\hat{\beta}_u^{\text{м}u'} = \begin{bmatrix} \beta_{xxu}^{\text{м}u'} & \beta_{xyu}^{\text{м}u'} & \beta_{xzu}^{\text{м}u'} \\ \beta_{yxu}^{\text{м}u'} & \beta_{yyu}^{\text{м}u'} & \beta_{yzu}^{\text{м}u'} \\ \beta_{z xu}^{\text{м}u'} & \beta_{zyu}^{\text{м}u'} & \beta_{zzu}^{\text{м}u'} \end{bmatrix}; \quad \hat{g}_u^{\text{м}u'} = \begin{bmatrix} g_{xxu}^{\text{м}u'} & g_{xyu}^{\text{м}u'} & g_{xzu}^{\text{м}u'} \\ g_{yxu}^{\text{м}u'} & g_{yyu}^{\text{м}u'} & g_{yzu}^{\text{м}u'} \\ g_{z xu}^{\text{м}u'} & g_{zyu}^{\text{м}u'} & g_{zzu}^{\text{м}u'} \end{bmatrix}.$$

$\Delta^{\text{эм}}$ – детерминант основной матрицы системы уравнений (8).
Компоненты внутреннего поля сферы (9) представим в виде

$$\begin{aligned} E_{xu}^0(\bar{r}', t) &= \frac{1}{\Delta^{\text{эм}}} \sum_{c=1}^C \left(\sum_u \left[g_{xxu}^{\text{э}u'} \bar{E}_{0xu}(\bar{r}', t) + g_{xyu}^{\text{э}u'} E_{0yu}(\bar{r}', t) + g_{xzu}^{\text{э}u'} E_{0zu}(\bar{r}', t) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \beta_{xxu}^{\text{э}u'} H_{0xu}(\bar{r}', t) + \beta_{xyu}^{\text{э}u'} H_{0yu}(\bar{r}', t) + \beta_{xzu}^{\text{э}u'} H_{0zu}(\bar{r}', t) \right] \right), \\ E_{yu}^0(\bar{r}', t) &= \frac{1}{\Delta^{\text{эм}}} \sum_{c=1}^C \left(\sum_u \left[g_{yxu}^{\text{э}u'} \bar{E}_{0xu}(\bar{r}', t) + g_{yyu}^{\text{э}u'} E_{0yu}(\bar{r}', t) + g_{yzu}^{\text{э}u'} E_{0zu}(\bar{r}', t) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \beta_{yxu}^{\text{э}u'} H_{0xu}(\bar{r}', t) + \beta_{yyu}^{\text{э}u'} H_{0yu}(\bar{r}', t) + \beta_{yzu}^{\text{э}u'} H_{0zu}(\bar{r}', t) \right] \right), \\ E_{zu}^0(\bar{r}', t) &= \frac{1}{\Delta^{\text{эм}}} \sum_{c=1}^C \left(\sum_u \left[g_{z xu}^{\text{э}u'} \bar{E}_{0xu}(\bar{r}', t) + g_{zyu}^{\text{э}u'} E_{0yu}(\bar{r}', t) + g_{zzu}^{\text{э}u'} E_{0zu}(\bar{r}', t) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \beta_{z xu}^{\text{э}u'} H_{0xu}(\bar{r}', t) + \beta_{zyu}^{\text{э}u'} H_{0yu}(\bar{r}', t) + \beta_{zzu}^{\text{э}u'} H_{0zu}(\bar{r}', t) \right] \right), \\ H_{xu}^0(\bar{r}', t) &= \frac{1}{\Delta^{\text{эм}}} \sum_{c=1}^C \left(\sum_u \left[\beta_{xxu}^{\text{м}u'} H_{0xu}(\bar{r}', t) + \beta_{xyu}^{\text{м}u'} H_{0yu}(\bar{r}', t) + \beta_{xzu}^{\text{м}u'} H_{0zu}(\bar{r}', t) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + g_{xxu}^{\text{м}u'} \bar{E}_{0xu}(\bar{r}', t) + g_{xyu}^{\text{м}u'} E_{0yu}(\bar{r}', t) + g_{xzu}^{\text{м}u'} E_{0zu}(\bar{r}', t) \right] \right), \end{aligned}$$

$$H_{yu}^0(\vec{r}', t) = \frac{1}{\Delta_{\text{ЭМ}}} \sum_{c=1}^C \left(\sum_u \left[\beta_{yxu}^{\mu u'} H_{0xu}(\vec{r}', t) + \beta_{yyu}^{\mu u'} H_{0yu}(\vec{r}', t) + \beta_{yzu}^{\mu u'} H_{0zu}(\vec{r}', t) + \right. \right. \\ \left. \left. + g_{yxu}^{\mu u'} \vec{E}_{0xu}(\vec{r}', t) + g_{yyu}^{\mu u'} E_{0yu}(\vec{r}', t) + g_{yzu}^{\mu u'} E_{0zu}(\vec{r}', t) \right] \right), \\ H_{zu}^0(\vec{r}', t) = \frac{1}{\Delta_{\text{ЭМ}}} \sum_{c=1}^C \left(\sum_u \left[\beta_{z xu}^{\mu u'} H_{0xu}(\vec{r}', t) + \beta_{zyu}^{\mu u'} H_{0yu}(\vec{r}', t) + \beta_{zzu}^{\mu u'} H_{0zu}(\vec{r}', t) + \right. \right. \\ \left. \left. + g_{z xu}^{\mu u'} \vec{E}_{0xu}(\vec{r}', t) + g_{zyu}^{\mu u'} E_{0yu}(\vec{r}', t) + g_{zzu}^{\mu u'} E_{0zu}(\vec{r}', t) \right] \right).$$

Полученные решения (9) справедливы, когда $a_c/\lambda \ll 1$ снаружи и $a_c/\lambda_g \ll 1$ внутри сферы. Но их можно обобщить на резонансный случай $a_c/\lambda_g \sim 1$, если вместо проницаемостей ϵ_c и μ_c сферы ввести эффективные проницаемости [4, 2].

$$\begin{aligned} \epsilon_{c\text{эф}} &= \epsilon_c F(ka_c \sqrt{\epsilon_c \mu_c}), \\ \mu_{c\text{эф}} &= \mu_c F(ka_c \sqrt{\epsilon_c \mu_c}), \end{aligned} \quad (10)$$

где, рис. 7,

$$F(ka_c \sqrt{\epsilon_c \mu_c}) = \frac{2(\sin ka_c \sqrt{\epsilon_c \mu_c} - ka_c \sqrt{\epsilon_c \mu_c} \cos ka_c \sqrt{\epsilon_c \mu_c})}{(k^2 a_c^2 \epsilon_c \mu_c - 1) \sin ka_c \sqrt{\epsilon_c \mu_c} + ka_c \sqrt{\epsilon_c \mu_c} \cos ka_c \sqrt{\epsilon_c \mu_c}}.$$

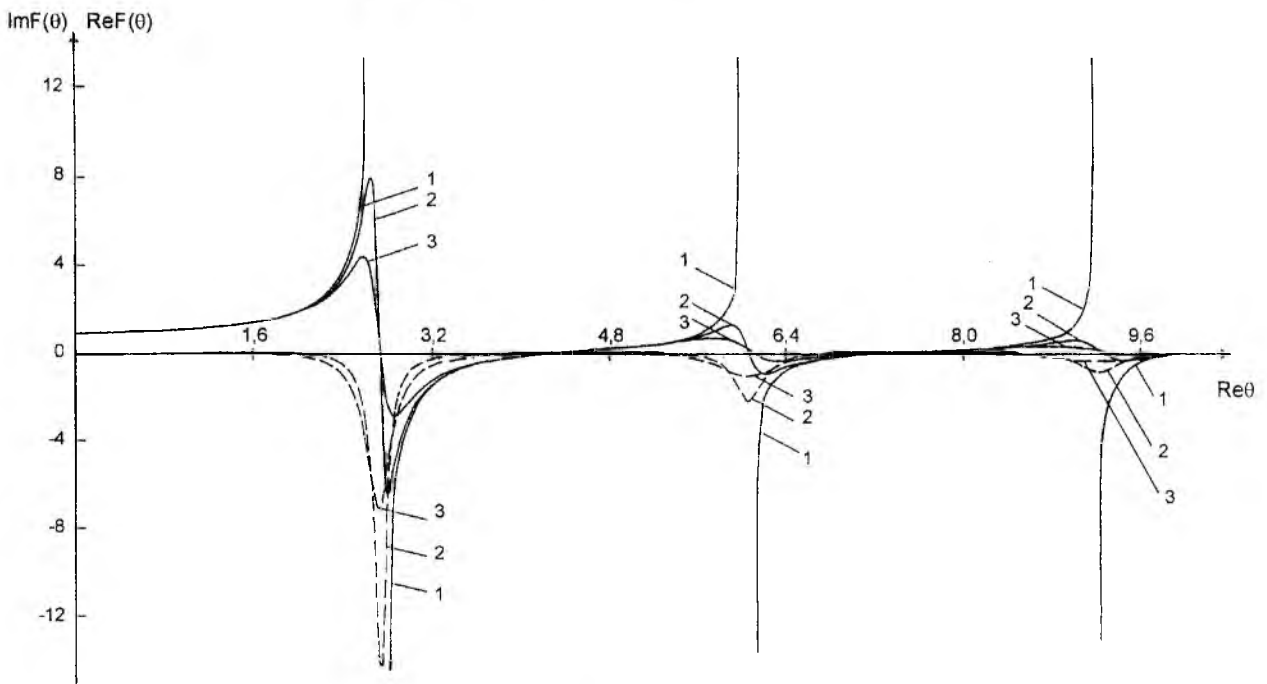


Рис. 7

На рис. 7 представлены особенности поведения $\text{Re}F(\theta)$ (сплошная кривая) и $\text{Im}F(\theta)$ (пунктирная кривая) в зависимости от $\text{Re}\theta$ при разных значениях тангенса угла диэлектрических потерь $\text{tg} \delta_\epsilon$ (1 – $\text{tg} \delta_\epsilon = 0$; 2 – $\text{tg} \delta_\epsilon = 0,05$; 3 – $\text{tg} \delta_\epsilon = 0,1$) и $\mu_c = 1$, здесь $\theta = ka_c \sqrt{\epsilon_c \mu_c}$.

Если электромагнитным взаимодействием между сферами решетки пренебречь, то обобщенные выражения для внутреннего поля произвольной сферы решетки (9) будут иметь вид (10)

$$\begin{aligned} \bar{E}_{c(p,s,t)}^0(\bar{r}',t) &= \frac{3\epsilon_0 e^{i\theta_{1c}}}{(\epsilon_{c\varepsilon\phi} + 2\epsilon_0) + \theta_{1c}^2 \epsilon_{c\varepsilon\phi} + i\theta_{1c}(\epsilon_{c\varepsilon\phi} + 2\epsilon_0)} \bar{E}_{0c(p,s,t)}^0(\bar{r}',t), \\ \bar{H}_{c(p,s,t)}^0(\bar{r}',t) &= \frac{3\mu_0 e^{i\theta_{1c}}}{(\mu_{c\varepsilon\phi} + 2\mu_0) + \theta_{1c}^2 \mu_{c\varepsilon\phi} + i\theta_{1c}(\mu_{c\varepsilon\phi} + 2\mu_0)} \bar{H}_{0c(p,s,t)}^0(\bar{r}',t), \end{aligned} \quad (10a)$$

где $\theta_{1c}^2 = k^2 a_c^2 \epsilon_0 \mu_0$.

На рис. 8 представлены кривые для модуля $|\eta^M|$ и аргумента φ^M выражения для внутреннего магнитного поля (10a) диэлектрической сферы ($\mu_c = 1$) от длины падающей волны λ в области первых трех внутренних резонансов магнитного типа для случая, когда $a_c = 0,15$ см; $\epsilon_c = 100$; $\text{tg } \delta_\epsilon = 0$; $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$.

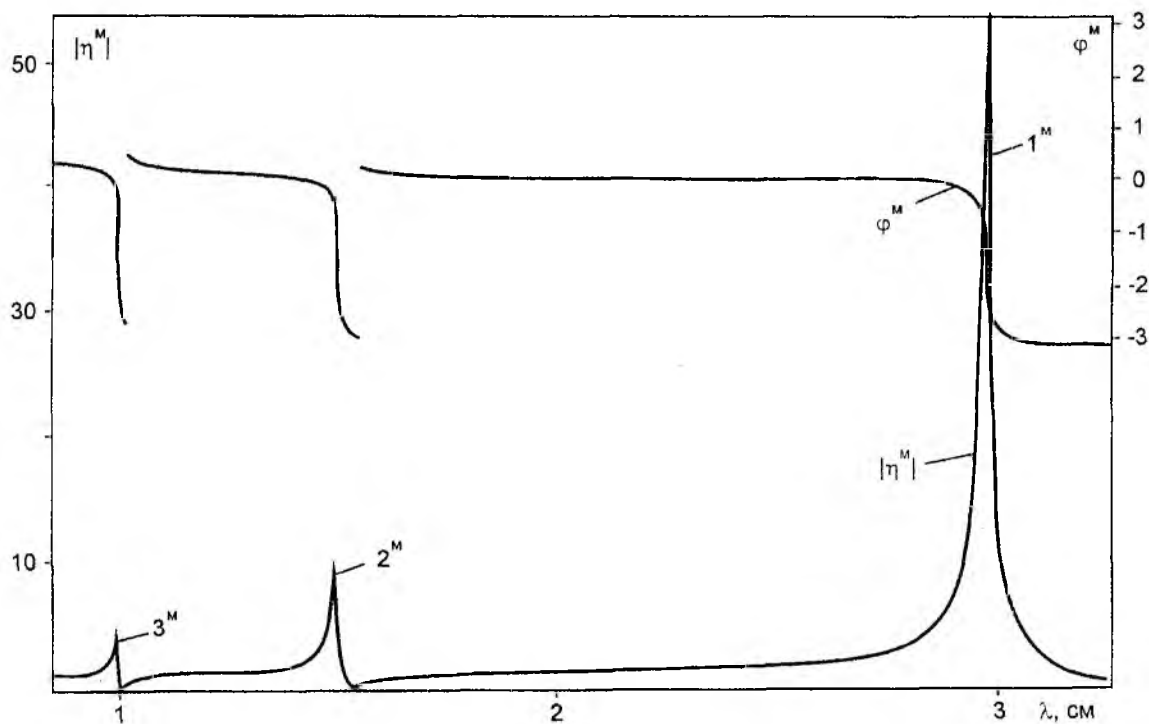


Рис. 8

Потенциалы Герца (5), рассеянного сферами решетки поля, можно представить, учитывая (9) и (10), в виде суперпозиции потенциалов Герца отдельных сфер решетки

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}^3(\bar{r},t) &= \sum_{c=1}^C \left[\sum_p \sum_s \sum_t \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \left(\frac{\epsilon_{c\varepsilon\phi}}{\epsilon_0} - 1 \right) \bar{E}_{c(p,s,t)}^0(\bar{r}',t) \frac{e^{-ik_1 r_{c(p,s,t)}}}{r_{c(p,s,t)}} \right], \\ \bar{\Pi}^M(\bar{r},t) &= - \sum_{c=1}^C \left[\sum_p \sum_s \sum_t \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \left(\frac{\mu_{c\varepsilon\phi}}{\mu_0} - 1 \right) \bar{H}_{c(p,s,t)}^0(\bar{r}',t) \frac{e^{-ik_1 r_{c(p,s,t)}}}{r_{c(p,s,t)}} \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $r_{c(p,s,t)} = \sqrt{(x - x_{c,s})^2 + (y - y_{c,t})^2 + (z - z_{c,p})^2}$,

где координаты (x, y, z) – точка наблюдения рассеянного поля вне сфер решетки, координаты $(x_{c,s}, y_{c,t}, z_{c,p})$ – точка нахождения центра рассеивающей сферы решетки (1). Тогда, учитывая (10), (11), из (4) найдем искомое рассеяное сферами решетки поле

$$\begin{aligned} \vec{E}_{pacc} &= \sum_{c=1}^C \left[\sum_p \sum_s \sum_t \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \left\{ \left(\frac{\varepsilon_{c\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \hat{L}_c \vec{E}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}') - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - ik\mu_0 \left(\frac{\mu_{c\phi}}{\mu_0} - 1 \right) (-1) \hat{P}_c \vec{H}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}') \right\} e^{i(\omega t - k_1 r_{c(p,s,t)})} \right], \\ \vec{H}_{pacc} &= \sum_{c=1}^C \left[\sum_p \sum_s \sum_t \frac{1}{k_1^3} (\sin k_1 a_c - k_1 a_c \cos k_1 a_c) \left\{ \left(\frac{\mu_{c\phi}}{\mu_0} - 1 \right) (-1) \hat{L}_c \vec{H}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}') + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + ik\varepsilon_0 \left(\frac{\varepsilon_{c\phi}}{\varepsilon_0} - 1 \right) \hat{P}_c \vec{E}_{c(p,s,t)}^0(\vec{r}') \right\} e^{i(\omega t - k_1 r_{c(p,s,t)})} \right], \end{aligned} \quad (12)$$

где \hat{L}_c и \hat{P}_c функциональные матрицы вида

$$\hat{L}_c = \begin{bmatrix} \Psi_{xxc} & \Psi_{xyc} & \Psi_{zxc} \\ \Psi_{yxc} & \Psi_{yyc} & \Psi_{zyc} \\ \Psi_{zxc} & \Psi_{zyc} & \Psi_{zcc} \end{bmatrix}; \quad \hat{P}_c = \begin{bmatrix} 0 & \Psi_{zc} & \Psi_{yc}^0 \\ \Psi_{zc}^0 & 0 & \Psi_{xc} \\ \Psi_{yc} & \Psi_{xc}^0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Величины, входящие в функциональные матрицы (12), имеют вид (1)

$$\begin{aligned} \Psi_{xxc} &= \frac{1}{r_{c(p,s,t)}} k^2 \varepsilon_0 \mu_0 + \frac{3(x - x_{c,s})^2 - r_{c(p,s,t)}^2}{r_{c(p,s,t)}^5} - \frac{k_1^2 (x - x_{c,s})^2}{r_{c(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{3(x - x_{c,s})^2 - r_{c(p,s,t)}^2}{r_{c(p,s,t)}^4}, \\ \Psi_{yyc} &= \frac{1}{r_{c(p,s,t)}} k^2 \varepsilon_0 \mu_0 + \frac{3(y - y_{c,t})^2 - r_{c(p,s,t)}^2}{r_{c(p,s,t)}^5} - \frac{k_1^2 (y - y_{c,t})^2}{r_{c(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{3(y - y_{c,t})^2 - r_{c(p,s,t)}^2}{r_{c(p,s,t)}^4}, \\ \Psi_{zcc} &= \frac{1}{r_{c(p,s,t)}} k^2 \varepsilon_0 \mu_0 + \frac{3(z - z_{c,p})^2 - r_{c(p,s,t)}^2}{r_{c(p,s,t)}^5} - \frac{k_1^2 (z - z_{c,p})^2}{r_{c(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{3(z - z_{c,p})^2 - r_{c(p,s,t)}^2}{r_{c(p,s,t)}^4}, \\ \Psi_{xyc} &= \Psi_{yxc} = \frac{3(x - x_{c,s})(y - y_{c,t})}{r_{c(p,s,t)}^5} - k_1^2 \frac{(x - x_{c,s})(y - y_{c,t})}{r_{c(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{3(x - x_{c,s})(y - y_{c,t})}{r_{c(p,s,t)}^4}, \\ \Psi_{zxc} &= \Psi_{zxc} = \frac{3(x - x_{c,s})(z - z_{c,p})}{r_{c(p,s,t)}^5} - k_1^2 \frac{(x - x_{c,s})(z - z_{c,p})}{r_{c(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{3(x - x_{c,s})(z - z_{c,p})}{r_{c(p,s,t)}^4}, \\ \Psi_{xyc} &= \Psi_{zyc} = \frac{3(y - y_{c,t})(z - z_{c,p})}{r_{c(p,s,t)}^5} - k_1^2 \frac{(y - y_{c,t})(z - z_{c,p})}{r_{c(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{3(y - y_{c,t})(z - z_{c,p})}{r_{c(p,s,t)}^4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{xc} &= \frac{(x-x_{c,s})}{r_{c(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{(x-x_{c,s})}{r_{c(p,s,t)}^2}, & \Psi_{xc}^0 &= -\Psi_{xc}, \\ \Psi_{yc} &= \frac{(y-y_{c,t})}{r_{c(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{(y-y_{c,t})}{r_{c(p,s,t)}^2}, & \Psi_{yc}^0 &= -\Psi_{yc}, \\ \Psi_{zc} &= \frac{(z-z_{c,p})}{r_{c(p,s,t)}^3} + ik_1 \frac{(z-z_{c,p})}{r_{c(p,s,t)}^2}, & \Psi_{zc}^0 &= -\Psi_{zc}. \end{aligned}$$

Поле в произвольной точке пространства, лежащей вне сфер, представим в виде (12)

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}, t) + \vec{E}_{\text{расс}}(\vec{r}, t),$$

где $\vec{E}_0(\vec{r}, t)$ – невозмущенное поле падающей волны.

Из детерминанта системы уравнений (8) определяются резонансные условия. Когда проницаемости ϵ_c , μ_c сфер решетки действительны и $a_c/\lambda_g \sim 1$, они находятся из выражения

$$\det \text{Re} \|\alpha_{sj}\| = 0, \quad (13)$$

где $\|\alpha_{sj}\|$ – основная матрица системы уравнений (8).

Разрешая условие (13) относительно функции $F(ka_c\sqrt{\epsilon_c\mu_c})$ (10) для случая, когда электромагнитным взаимодействием между сферами можно пренебречь, резонансное условие для внутренних магнитных резонансов диэлектрической сферы ($\mu_c = 1$) представим как

$$n\pi = \frac{2a_c\sqrt{\epsilon_c}}{\lambda} + \left[\frac{2(1+\theta_{1c}^2)}{1+2\theta_{1c}^2} - 2 \right] \frac{\mu_0}{2\pi n},$$

где $n = 1, 2, 3 \dots$ порядок резонансов магнитного типа, рис. 8 [5].

Заключение

Данное решение может быть полезно для разработки устройств по управлению полем излучения электромагнитных излучателей и создания композиционных материалов с сильной дисперсией, используя области аномальной дисперсии решеток [6, 7, 8].

Список литературы: 1. Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.Л.: ОГИЗ. 1948. С. 248–251. 2. Козарь А.И., Хижняк Н.А. Отражение электромагнитных волн от резонансной диэлектрической сферы в волноводе // Укр. физ. журн. 1970. Т. 15. С. 847–849 3. Хижняк Н.А. Интегральные уравнения макроскопической электродинамики. Киев.: Наукова думка. 1986. С. 279. 4. Левин Л. Современная теория волноводов. М.: Изд-во иностр. лит. 1954. С. 216. 5. Козарь А.И. Рассеяние электромагнитных волн в волноводе с однородными магнитоэлектрическими сферами // Радиотехника и электроника. – Харьков: Ин-т радиотехники и электроники НАН Украины. – 2002. – 7. – Спец. выпуск. – С. 183–189. 6. Козарь А.И. Рассеяние электромагнитных волн на сложных пространственных решетках резонансных магнитоэлектрических сфер // Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. 2002. Вып. 124. С. 24–35. 7. Козарь А.И. Треугольник чисел Паскаля и рассеяние электромагнитных волн на пространственных решетках резонансных магнитоэлектрических сфер // Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. 2002. Вып. 127. С. 67–76. 8. Козарь А.И. Полигональные числа и рассеяние электромагнитных волн на пространственных решетках резонансных магнитоэлектрических сфер // Радиотехника: Всеукр. межвед. науч.-техн. сб. 2003. Вып. 129. С. 5–13.