

## ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФАЗОВЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СВЧ-СИГНАЛОВ ПО КРИТЕРИЮ МАКСИМАЛЬНОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

Возрастающие потребности высокопроизводительных и точных измерений параметров пространственно-временных сигналов СВЧ и более высоких частотных диапазонов привели к широкому применению в пеленгации, геодезии и метрологии статистических методов синтеза оптимальных измерительных систем, использующих параллельную (пространственную) обработку сигналов, среди которых наибольшее распространение получил метод максимального правдоподобия [1; 2; 3]. Достоинством этого метода является универсальность получаемых алгоритмов и формализованных структур измерительных систем. Однако переход от формальной к принципиальной схеме измерителя требует задания конкретного типа информативного сигнала и метода кодирования в нем интересующей разработчика информации. Правильность выбора информативного сигнала определяет наилучшие для практики свойства измерителя при заданной информативности. Рассмотрим влияние свойств информативного сигнала на основные характеристики оптимальной измерительной системы, синтезированной по критерию максимального правдоподобия при аппроксимации входного воздействия как аддитивной смеси детерминированного сигнала и белого шума.

Между структурой измерителя и свойствами используемого в нем сигнала устанавливается следующая связь.

**Теорема 1.** При параллельной обработке входного сигнала число каналов оптимального измерителя для оценки  $i$ -й составляющей информативного вектора не меньше числа нулевых ковариаций между оцениваемой и остальными составляющими вектора.

**Доказательство.** Обратимся к алгоритму для оценки максимального правдоподобия  $\Delta\lambda_{mi}$  [4]

$$\Delta\lambda_{mi} = \frac{2}{N_0} \sigma_{ik}^2 \left\{ \int_L d\vec{r} \int_0^T u(t, \vec{r}, \vec{\lambda}) [s_{ak}(t, \vec{r}, \vec{\lambda}_0) + \psi_k \cdot s_{\phi k}(t, \vec{r}, \vec{\lambda}_0)] dt - F_k(t, \vec{r}, \vec{\lambda}_0) \right\}, \quad (1)$$

где

$$s_{ak}(t, \vec{r}, \vec{\lambda}_0) = \frac{\partial}{\partial \lambda_{0k}} B(t, \vec{r}, \vec{\lambda}_0) \exp \{j\varphi(t, \vec{r}, \vec{\lambda}_0)\}; \quad (2)$$

$$s_{\phi k}(t, \vec{r}, \vec{\lambda}_0) = -jB(t, \vec{r}, \vec{\lambda}_0) \exp \{j\varphi(t, \vec{r}, \vec{\lambda}_0)\}; \quad (3)$$

$$\psi_k = \frac{\partial}{\partial \lambda_{0k}} \varphi(t, \vec{r}, \vec{\lambda}_0); \quad (4)$$

$A_{ik}$  — элементы матрицы ковариаций, которые получают обращением информационной матрицы с элементами [1]

$$A_{ik} = \frac{2}{N_0} \int_L \vec{dr} \int_0^T \frac{\partial}{\partial \lambda_i} s(t, \vec{r}, \vec{\lambda}_0) \frac{\partial}{\partial \lambda_k} s(t, \vec{r}, \vec{\lambda}_0) dt; \quad (5)$$

$F_k(t, \vec{r}, \vec{\lambda}_0)$  — обобщенный коэффициент, не зависящий от входного сигнала  $u(t, \vec{r}, \vec{\lambda})$ ;  $\vec{\lambda}_0$  — заданное значение информативного вектора, относительно которого флуктуирует вектор  $\vec{\lambda}$ ;  $\lambda_{0k}$  —  $k$ -я его составляющая;  $N_0$  — спектральная плотность шума;  $T, L$  — интервалы временного и пространственного усреднения;  $t, \vec{r}$  — текущие время и радиус-вектор;  $B(t, \vec{r}, \vec{\lambda}_0), \varphi(t, \vec{r}, \vec{\lambda}_0)$  — пространственно-временное распределение амплитуды и фазы информативного поля.

Каждый элементарный канал измерителя, синтезированного по алгоритму (1), должен формировать на выходе интеграл, умноженный на дисперсию  $\sigma_{ik}^2$ . Таких каналов должно быть  $n$  по числу слагаемых в сумме. Однако, если  $m$  составляющих в сумме не коррелированы с оцениваемой  $i$ -й составляющей, то дисперсия  $\sigma_{ii}^2 = 0$ , где  $i$ -я составляющая из  $m$ . Поэтому сумма в (1) сократится до  $n - m$  слагаемых, число которых равно числу ненулевых ковариаций между оцениваемой и остальными составляющими информативного вектора, что соответствует нижней границе для числа каналов, устанавливаемой теоремой. Однако алгоритм (1) является частным случаем, поскольку получен при допущении, что измерение  $\lambda$  невелико относительно  $\lambda_0$ , попадающего в область сигнального выброса функции правдоподобия [4]. В противном случае всю область возможных значений необходимо разделить на  $\nu$  отдельных областей высокой корреляции и, следовательно, число каналов в измерителе возрастает в  $\nu$  раз.

Сформулируем частный случай теоремы 1, который имеет широкую область самостоятельного применения.

**Теорема 2.** Если при параллельной обработке входного сигнала на каждом цикле измерений известно некоторое значение измеряемого векторного параметра, сравнительно близкое к истинному и попадающее в область сигнального выброса функции правдоподобия, то число каналов оптимального измерителя для оценки  $i$ -й составляющей информативного вектора равно числу ненулевых ковариаций между оцениваемой и остальными составляющими вектора.

Следствие. Идеальным при практической реализации измерителя является сигнал, в котором составляющие информативного вектора некоррелированы между собой, а его размерность равна размерности оцениваемого вектора.

Под фазовыми сигналами понимаются такие сигналы, у которых распределение амплитуды не зависит от информативного вектора.

Для фазовых сигналов производные амплитуды по составляющим информативного вектора  $\frac{\partial}{\partial \vec{\lambda}} B(t, \vec{r}, \vec{\lambda}_0) = 0$ . Поэтому (1) принимает вид

$$\Delta \lambda_{mi} = \frac{2}{N_0} \sum_{k=1}^n \sigma_{ik}^2 \left\{ \int_L u(\vec{r}, \vec{\lambda}) \psi_k \cdot s_{\phi k}(\vec{r}, \vec{\lambda}_0) d\vec{r} - F_k(\vec{r}, \vec{\lambda}_0) \right\}. \quad (6)$$

В (6) и далее зависимость от времени опускается, так как рассматривается пространственная обработка сигналов. Сравнение (6) и (1) показывает, что для фазовых сигналов оптимальный алгоритм существенно упрощается, а его реализация требует когерентной обработки, предполагающей умножение входного сигнала на опорный  $s_{\phi k}(\lambda_0, \vec{r})$ .

Из анализа возможных амплитудно-фазовых пространственных сигналов следует, что свойствами, наиболее близкими к идеальным, обладают фазовые сигналы с плоским, сферическим или цилиндрическим фазовым фронтом, имеющие равномерное распределение амплитуды. В этом случае вся информация заложена в пространственной фазе волны, приходящей в плоскость измерения  $x, y$ , которая записывается в виде

$$S(x, y, \vec{\lambda}) = B \exp \{ jK(x\lambda_x + y\lambda_y) \}, \quad (7)$$

где  $K = 2\pi\Lambda^{-1}$  — волновое число;  $\Lambda$  — длина волны  $\lambda_x, \lambda_y$  — составляющие информативного вектора  $\vec{\lambda}$ ;  $B$  — постоянная амплитуда;  $x, y$  — декартовы координаты плоскости обработки.

Положим, что в измерителе используются элементарные сигналы (7). Поскольку размерность информативного вектора  $n = 2$ , то в сумме (6) останется только два слагаемых. Выполняя дифференцирование согласно (4) для сигнала (7) и подставляя производную в (6), получаем алгоритмы для оценок максимального правдоподобия

$$\Delta \lambda_{mx} = -2 \frac{B}{N_0} jk \int_{R_1} dx \int_{R_2} (x\sigma_{11}^2 + y\sigma_{12}^2) u(x, y, \vec{\lambda}) \exp \{ jK(x\lambda_x + y\lambda_y) \} dy; \quad (8)$$

$$\Delta \lambda_{my} = -2 \frac{B}{N_0} jK \int_{R_1} dx \int_{R_2} (x\sigma_{21}^2 + y\sigma_{22}^2) u(x, y, \vec{\lambda}) \times \\ \times \exp \{ jK(x\lambda_x + y\lambda_y) \} dy, \quad (9)$$

где  $R_1, R_2$  — интервалы усреднения по координате  $x, y$ . Описанные алгоритмы реализуются двухканальной схемой по числу слагаемых в круглых скобках под интегралом.

Определим точностные характеристики оценок, получаемых по (8) или (9) и условия, при выполнении которых дисперсии не зависят от информативного вектора  $\vec{\lambda}$ . Для этого перейдем в (6) от показательной к тригонометрической функции. Вычисляя производные и подставляя их в (5) для элементов информационной матрицы находим следующие соотношения:

$$A_{11} = a \int_{R_1} dx \int_{R_2} x^2 \sin^2 K(x\lambda_x + y\lambda_y) dy; \quad (10)$$

$$A_{12} = A_{21} = a \int_{R_1} dx \int_{R_2} xy \sin^2 K(x\lambda_x + y\lambda_y) dy; \quad (11)$$

$$A_{22} = a \int_{R_1} dx \int_{R_2} y^2 \sin^2 K(x\lambda_x + y\lambda_y) dy. \quad (12)$$

Здесь

$$a = \frac{8\pi^2 p^2}{\Lambda^2}; \quad p = \frac{B}{\sqrt{N_0}}. \quad (13)$$

Полагая, что интегрирование ведется по прямоугольнику со сторонами  $R_1$ ,  $R_2$ , и выполняя интегрирование в (10), (11), (12), получаем

$$A_{ii} = \frac{1}{3} a R_i^2 b_{ii}; \quad A_{ij} = \frac{1}{4} a R_1 R_2 b_{ij}, \quad (14)$$

где

$$b_{ii} = 1 - \frac{6}{\alpha_i^2 \alpha_j} \left\{ \left[ \left( \frac{\alpha_i}{2} - \alpha_i^{-1} \right) \sin \alpha_i + \cos \alpha_i \right] \sin \alpha_i - \left[ \left( \frac{\alpha_i}{2} - \alpha_i^{-1} \right) \cos \alpha_i + \sin \alpha_i + \alpha_i^{-1} \right] (\cos \alpha_i - 1) \right\}; \quad (15)$$

$$b_{ij} = 1 - \frac{4}{\alpha_i \alpha_j} \left( \frac{\cos \alpha_i - 1}{\alpha_i} + \sin \alpha_i \right) \left( \frac{\cos \alpha_j - 1}{\alpha_j} + \sin \alpha_j \right) + \frac{4}{\alpha_i \alpha_j} \left( \frac{\sin \alpha_i}{\alpha_i} + \cos \alpha_i \right) \left( \frac{\sin \alpha_j}{\alpha_j} - \cos \alpha_j \right); \quad (16)$$

$$\alpha_1 = 2KR_1\lambda_x; \quad \alpha_2 = 2KR_1\lambda_y; \quad (17)$$

$i = 1, 2; j = 1, 2; i \neq j$ . Соотношения (15), (16) справедливы при условии, что  $i \neq 0, j \neq 0$ . При равенстве нулю  $j$ -го параметра

$$b_{ii} = 1 - \frac{6}{\alpha_i^2} \left\{ \left( \frac{\alpha_i}{2} - \alpha_i^{-1} \right) \sin \alpha_i + \cos \alpha_i - 1 \right\}; \quad (18)$$

$$b_{ij} = 1 - \frac{\sin \alpha_i}{\alpha_i} \quad (19); \quad \beta_{ij} = 1 - \frac{2}{\alpha_i} \left( \frac{\cos \alpha_i - 1}{\alpha_i} + \sin \alpha_i \right). \quad (20)$$

Обращая информационную матрицу с элементами (14), формируем матрицу ковариаций с элементами

$$\sigma_{ii}^2 = \sigma_{0i}^2 \cdot z_{ii}(\alpha_i, \alpha_j); \quad \sigma_{ij}^2 = \sigma_{0j}^2 z_{ij}(\alpha_i, \alpha_j), \quad (21)$$

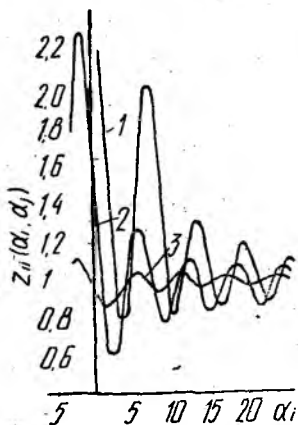
где

$$\sigma_{0i}^2 = 3,8 \cdot 10^{-2} \frac{\Lambda^2}{p^2 R_i^2}; \quad \sigma_{0j}^2 = 2,8 \cdot 10^{-2} \frac{\Lambda^2}{p^2 R_1 R_2}; \quad (22)$$

$$z_{ii} = b_{ij} (b_{ii} \cdot b_{jj} - b_{ij}^2)^{-1}; \quad z_{ij} = b_{ij} (b_{ii} \cdot b_{jj} - b_{ij}^2)^{-1}. \quad (23)$$

Зависимость нормированной дисперсии  $z_{ii}$  от обобщенных параметров  $\alpha_1, \alpha_2$  представлены на рисунке ( $1 - \alpha_1 = 0; 2 - \alpha_1 = \pi$ ;

$3 - \alpha_j = 5\pi$ ), откуда следует, что смежнооцениваемые параметры  $\lambda_x, \lambda_y$  высокоррелированы между собой. Ошибка оценки максимального правдоподобия бесконечна при  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ . При возрастании обобщенных параметров  $z_{ii}$  — осциллирующая быстро затухающая функция и при  $(\alpha_1 + \alpha_2) \geq 50$  (24) с ошибкой не более 1% нормированные дисперсии  $z_{ij} \cong z_{ji} = 1$ . Следовательно, при соблюдении неравенства (24) оцениваемые параметры являются существенно неэнергетическими. Поскольку для неэнергетических параметров структура блока оценки намного проще, чем для параметров энергетических, то при разработке измерителей



параметров сигналов, реализующих принципы статистического синтеза для получения наиболее простых схемных решений, необходимо потребовать выполнения условия (24). При проектировании конкретных измерителей параметров элементарных фазовых сигналов этого добиваются путем соответствующего выбора начальных условий либо использованием преобразующих операторов [5]. Если (24) выполняется, то матрица ковариаций оказывается с постоянными элементами, определяющими соотношениями (22), а оптимальные алгоритмы (8), (9) принимают наиболее простой вид.

К достоинству использования элементарных пространственных сигналов следует также отнести тот факт, что помимо простого решающего правила при его реализации схема устройства может быть выбрана такой, что одна из составляющих информативного вектора оказывается исключена из процесса измерений и ее влияние на измерение второй составляющей частично или полностью устраняется. Например, использование не поверхностного, а линейного усреднения при реализации оптимального алгоритма (8) или (9),  $R_2 = 0$ , позволяет исключить зависимость оценки от  $\lambda_y$ . Это значит, что отклик второго канала измерителя равен нулю и необходимость в его синтезе отпадает.

Таким образом, при статистическом синтезе оптимальных измерителей с пространственной обработкой сигналов наилучший результат, обеспечивающий минимальную простоту устройства, дает использование в качестве информативных элементарных фазовых сигналов при выполнении условия неэнергетичности оцениваемых параметров, что достигается соблюдением условия (24). При этом необходимая размерность информативного вектора может быть обеспечена использованием группы элементарных сигналов с соответствующим набором волновых фронтов.

Список литературы: 1. Фалькович С. Е. Оценка параметров сигналов. — М.: Сов. радио, 1970. — 324 с. 2. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуля-

ции.— М.: Сов. радио, 1972.— Т. 1. 744 с. 3. Куликов Е. И., Трифонов А. П. Оценка параметров сигналов.— М.: Сов. радио, 1978.— 296 с. 4. Табунечко Е. Н., Щербак В. И. Критерий максимального правдоподобия при статистической оценке пространственных параметров мелкоструктурных полей // Радиотехника.— 1985.— Вып. 72.— С. 89—93. 5. Табунечко Е. Н., Щербак В. И. Преобразующие операторы при статистическом синтезе процессоров оценки пространственных параметров полей // Радиотехника.— 1984.— Вып. 71.— С. 81—85.

Поступила в редколлегию 19.11.85.

УДК 621.391

А. А. ФИРСАКОВ, А. Е. ОХРИМЕНКО

### ДОСТОВЕРНОСТЬ И ИНФОРМАТИВНОСТЬ КЛАССИФИКАЦИИ МНОГОМЕРНЫХ ГАУССОВЫХ ЗАШУМЛЕННЫХ СИГНАЛОВ

При радиолокации распределенных целей необходимо обрабатывать многомерные сигналы. Особенности обнаружения таких сигналов рассмотрены в ряде работ. В то же время теоретические аспекты их различения и классификации в литературе практически не отражены, а положения теории распознавания образов в условиях зашумленности сигналов используются весьма ограниченно [1].

Таким образом, целесообразно рассмотреть методику и некоторые результаты анализа качества классификации многомерных сигналов, образованных  $N$  нормально распределенными комплексными амплитудами  $\xi_n$ , относящихся к различным элементам разрешения. Согласно положениям работы [2] будем считать их статистически независимыми. Сигналы будем наблюдать на фоне равномерного по пространству разрешения гауссова шума.

Запишем оптимальное в смысле максимума правдоподобия решающее правило при различении.

Если  $\frac{P_{k0}(\xi, \xi^*)}{P_0(\xi, \xi^*)} > \frac{P_{l0}(\xi, \xi^*)}{P_0(\xi, \xi^*)}$  для всех  $l > k$ , то принимается  $A_k^*$  (1), где  $P_{k0}(\xi, \xi^*)$  — многомерная плотность вероятности  $k$ -го класса из  $M$  возможных;  $P_0(\xi, \xi^*)$  — многомерная плотность вероятности шума.

Структура различения и классификации сигналов (рис. 1) содержит  $M$  (по числу возможных классов) параллельных каналов, реализующих обработку, оптимальную для сигналов соответствующих классов, блока сравнения выходов каналов и принятия решения  $A_k^*$ .

Поскольку многомерная плотность вероятности с учетом зашумленности описывается выражением

$$P_{k0}(\xi, \xi^*) = \prod_{n=1}^{N_k} [2\pi(2\sigma_{nk}^2 + 2\sigma_0^2)]^{-1} \exp \left[ -\frac{\xi_n^* \xi_n}{2(\sigma_{nk}^2 + \sigma_0^2)} \right], \quad (2)$$

где  $\sigma_{nk}^2$  — средняя мощность  $n$ -го элемента сигнала  $k$ -го класса;