УДК 621.391: 519.246.8

В.А. ТИХОНОВ, Н.В. КУДРЯВЦЕВА

СИНТЕЗ И АНАЛИЗ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ПРОЦЕССОВ ЛИНЕЙНОГО ПРЕДСКАЗАНИЯ

Введение

Для решения некоторых прикладных задач статистической радиотехники необходим синтез и анализ моделей сложных случайных процессов, состоящих из нескольких зависимых или независимых процессов. Известные модели линейного предсказания описывают сложные процессы интегрально, т.е. как процессы с многомодовым спектром. Такой подход недостаточно полно и точно описывает такие процессы. Поэтому необходимы исследования с целью создания новых конструктивных моделей линейного предсказания, позволяющих учитывать тонкую структуру сложных процессов.

Многие случайные процессы, исследуемые в статистической радиотехнике, сформированы в результате последовательного линейного или нелинейного инерционного преобразования порождающего процесса [1]. Параметры составляющих фильтров формирующего фильтра мультипликативных моделей [2] линейного предсказания могут рассчитываться по классическим [3] или обобщенным моделям линейного предсказания [4]. Мультипликативные процессы могут быть получены методом формирующего фильтра, на вход которого подается гауссов либо негауссов белый шум (БШ). Такие процессы будем называть истинными мультипликативными процессами линейного предсказания, т.к. известен порядок этих моделей и коэффициенты усиления формирующих фильтров. В работах [1, 5] показано, что для негауссовых процессов мультипликативную модель можно описывать одним разностным уравнением, учитывающим статистики второго и высших порядков. Параметры моделей рассчитываются по корреляционным и моментным функциям, путем анализа ошибок предсказания.

В статье найдены уравнения для вычисления параметров мультипликативных моделей, состоящих из моделей линейного предсказания одинакового ранга. Принципы построения предложенных моделей отличаются от классических тем, что формирующий фильтр для них представляется в виде последовательно соединенных фильтров АР, СС или АРСС с различными комбинациями классов моделей, рангов и порядков этих моделей. Рассмотрен пример построения присоединенной модели второго ранга АР$_1$(1)$\times$АР$_2$(2). С помощью систем линейных и нелинейных уравнений рассчитаны параметры этих моделей.

Мультипликативные процессы линейного предсказания

Некоторые гауссовы и негауссовы процессы в природе и технике получаются в результате последовательного преобразования фильтрами порождающего процесса [3]. Если для таких процессов выбрать в качестве порождающего процесса гауссов или негауссов БШ и полагать, что фильтры линейны и имеют рациональную передаточную функцию, то они описываются моделями линейного предсказания. Блок-схема формирователя этих мультипликативных процессов линейного предсказания с рациональной системной функцией $H(z)$ представлена на рис. 1.

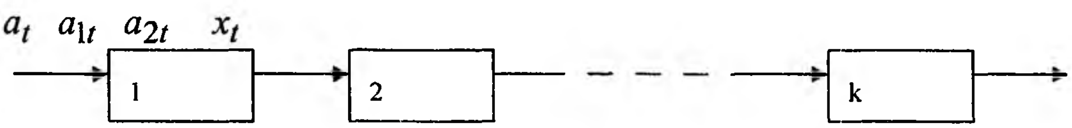

Рис. 1

Формирующие фильтры 1,2, …, k могут быть формирующими фильтрами АР, СС или АРСС. Параметры этих фильтров задаются либо, исходя из формы спектра выходного процесса x_t, либо вычисляются заранее как выборочные значения моделируемого реального процесса. Если коэффициенты рассчитываются по обобщенным моделям линейного предсказания случайного процесса, то формирующие фильтры 1,2, …, k описываются моделями ОАР, ОСС, ОАРОСС.

Системная функция мультипликативного процесса АРСС равна произведению системных функций составляющих ее моделей

$$H(z) = H_1(z)H_2(z)...H_k(z).$$

Системная функция формирующего фильтра АРСС [6] равна произведению системных функций модели СС

$$H_{CC}(z) = 1 - \sum_{n=1}^{q} Q[n]z^{-n},$$

и модели АР

$$H_{AP}(z) = (1 - \sum_{i=1}^{p} \Phi[i]z^{-i})^{-1}, \tag{1}$$

т.е.

$$H(z) = H_{CC}(z)H_{AP}(z) = \frac{1 - \sum_{n=1}^{q} Q[n]z^{-n}}{1 - \sum_{i=1}^{p} \Phi[i]z^{-i}}, \tag{2}$$

где действие оператора сдвига z^{-k} определяется выражением $z^{-k}x[t] = x[t-k]$.

Чтобы получить выражения для расчета параметрических спектров мультипликативных процессов, необходимо сделать замену в (2) $z \to e^{j2\pi fT}$. Тогда выражение для оценки спектральной плотности мультипликативной модели записывается в виде

$$P(f) = |H(f)|^2 D_a = |H_1(f)|^2 |H_2(f)|^2 ... |H_k(f)|^2 D_a, \tag{3}$$

где D_a – дисперсия ошибки предсказания.

Возможны различные комбинации формирующих фильтров 1, 2,…, k (рис. 1). Если в качестве второго фильтра использовать фильтр ОАР, то мультипликативную модель будем называть СС×ОАР, где знак умножения означает, что системная функция этой модели, получена перемножение системных функций моделей СС и ОАР. Заметим, что вид системных функций СС и АР и ОСС, ОАР совпадают. Однако значения параметров системных функций и порядок моделей у классических и обобщенных моделей могут отличаться. Следует также учитывать, что негауссов порождающий процесс, проходя через последовательность формирующих фильтров 1 и 2 (рис. 1) будет частично или даже полностью нормализоваться. Особенно это наблюдается при прохождении широкополосных процессов через узкополосные АР фильтры.

Мультипликативная модель $АР_1(1)\times АР_2(2)$

Для этой модели разностное уравнение выражается через системные функции следующим образом:

$$\Phi_1(z)\Phi_2(z)x[t] = a[t]. \tag{4}$$

Условие оптимальности мультипликативной модели АР состоит в статистической независимости $a[t]$. В случае модели АР второго ранга ошибки $a[t]$ должны быть некоррелированными

$$a[t]a[t-j] = 0, \text{ при } j \neq 0. \tag{5}$$

Умножив правую и левую части уравнения (4) на $x[t-j]$ и усреднив, получим уравнение

$$\Phi_1(z)\Phi_2(z)R[j]=0, \tag{6}$$

при выводе которого было использовано свойство оптимальности (5). Из уравнения (6) получим систему уравнений для расчета параметров модели

$$\begin{aligned} R[1] &= (\Phi_2[1]+\Phi_1[1])R[0]-(\Phi_2[2]-\Phi_1[1]\Phi_2[1])R[1]-\Phi_1[1]\Phi_2[2]R[2], \\ R[2] &= (\Phi_2[1]+\Phi_1[1])R[1]-(\Phi_2[2]-\Phi_1[1]\Phi_2[1])R[0]-\Phi_1[1]\Phi_2[2]R[1], \\ R[3] &= (\Phi_2[1]+\Phi_1[1])R[2]-(\Phi_2[2]-\Phi_1[1]\Phi_2[1])R[1]-\Phi_1[1]\Phi_2[2]R[0]. \end{aligned} \tag{7}$$

Методом статистического моделирования была синтезирована модель $АР_1(1)\times АР_2(2)$ истинного мультипликативного присоединенного процесса. Модель строилась с помощью двухзвенного формирующего фильтра, структура которого представлена на рис. 1, где первый фильтр формирует процесс $АР_1(1)$ первого порядка, а второй фильтр уже формирует процесс $x[t]$, описываемый моделью $АР_1(1)\times АР_2(2)$. Выходной процесс $АР_1(1)\times АР_2(2)$ состоял из модели $АР_1(1)$ первого порядка с заданной частотой пика $f_1=0$ и шириной полосы $df_1=2$ и модели $АР_2(2)$ второго порядка с параметрами спектра $f_2=30$, $df_2=3$, при интервале дискретизации T=0,01. На вход формирующего фильтра подавался гауссов белый шум.

Для этой модели были получены теоретические и выборочные значения коэффициентов авторегрессии. Найденные теоретические значения параметров для модели $АР_1(1)$ составляли: $\Phi_1[1]=0{,}8819$ и $\Phi_2[1]=-0{,}5624$, $\Phi_2[2]=-0{,}8282$ для $АР_2(2)$ модели. Выборочные оценки коэффициентов модели равнялись: $\Phi_1[1]=0{,}8215$ и $\Phi_2[1]=-0{,}5229$, $\Phi_2[2]=-0{,}7864$. Они были рассчитаны по выборочной функции корреляции из системы уравнений (7). Значения рассчитанных коэффициентов АР близки к истинным значениями исследуемого процесса. Формулу для параметрической оценки спектра (3) для модели $АР_1(1)\times АР_2(2)$ можно записать в виде

$$P(f)=|H(f)|^2D_a=|H_1(f)|^2|H_2(f)|^2D_a. \tag{8}$$

Используя формулу (3), с учетом (1), получим выражение для параметрической оценки спектра модели $АР_1(1)\times АР_2(2)$ используя замену $z\to e^{j2\pi fT}$.

$$P(f)=\frac{D_a}{\left|1-\Phi_1[1]e^{-j2\pi fT}\right|^2\left|1-\sum_{i=1}^{2}\Phi_2[i]e^{-j2\pi fiT}\right|^2}. \tag{9}$$

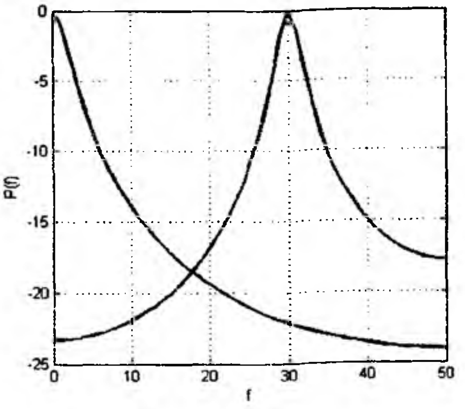

Рис. 2

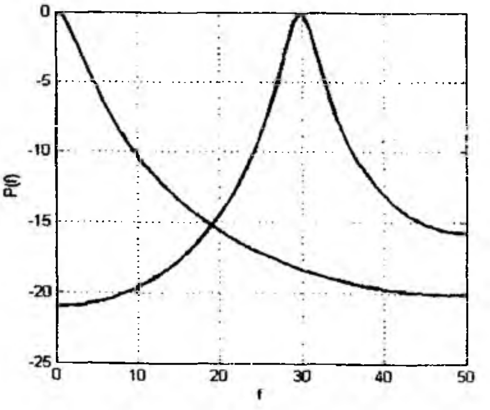

Рис. 3

С помощью выражения для оценки спектра мультипликативной модели (9) получены теоретические и выборочные значения спектральных оценок. Теоретические и выборочные параметрические оценки спектров составляющих процессов $AP_1(1)$ и $AP_2(2)$, полученные с помощью известных формул [3, 6], показаны на графиках рис. 2 и 3.

По найденным теоретически и выборочным оценкам параметров моделей линейного предсказания рассчитаны параметрические оценки спектра мультипликативного процесса $AP_1(1)\times AP_2(2)$ с помощью выражения (9). Графики спектров показаны на рис. 4 и 5.

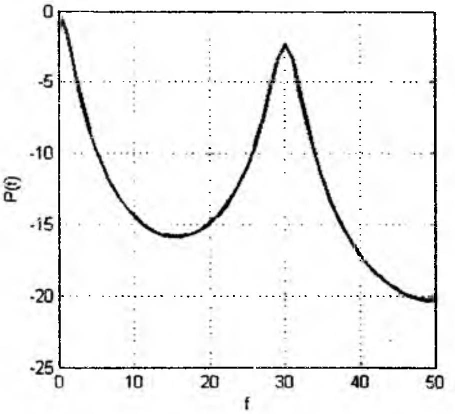

Рис. 4

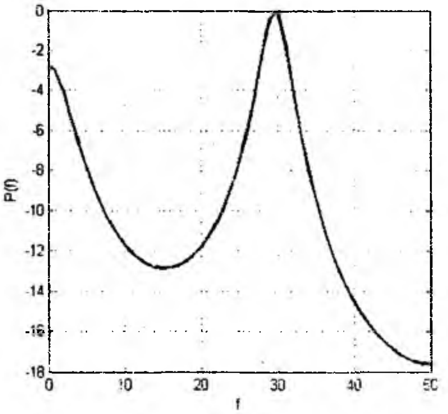

Рис. 5

Сравнение задаваемых спектров процессов и выборочных параметрических оценок спектров сгенерированных имитационных процессов показывает хорошее совпадение. Это подтверждает правильность предложенной теории мультипликативных моделей линейного предсказания. Применяя приведенную методику, можно синтезировать и другие мультипликативные модели линейного предсказания.

Заключение

Практическая значимость: предложенные модели могут быть полезны для моделирования гауссовых и негауссовых сигналов и помех, для факторизации случайных сигналов и помех на основе концепции мультипликативности, а также спектрального анализа мультипликативных случайных процессов, при решении задач линейного прогнозирования.

Научная новизна: впервые получены уравнения для оценки параметров присоединенных моделей линейного предсказания одинакового ранга случайных процессов. Получила дальнейшее развитие теория линейного предсказания факторизуемых случайных процессов. Показано, что использование предложенной модели истинного мультипликативного процесса позволяет достаточно точно разложить исходный процесс на составляющие.

Список литературы: 1. *Тихонов В. А., Кудрявцева Н. В.* Присоединенные комбинированные модели линейного предсказания-обобщенного линейного предсказания негауссовых процессов // Радиотехника. 2008. №154. С. 152–155. 2. *Тихонов В. А., Кудрявцева Н. В.* Спектральный анализ присоединенных моделей линейного предсказания негауссовых процессов. 3. *Бокс Дж., Дженкинс Г.* Анализ временных рядов. Пер. с. англ. М.: Мир, 1974. Вып. 1. 406 с. 4. *Тихонов В.А.* Обобщенная модель авторегрессии высших рангов негаус совых процессов // Радиоэлектроника и информатика. 2003. №4. С. 39–42. 5. *Тихонов В. А., Дзюга А. Г., Кудрявцева Н. В.*Обобщенная модель авторегрессии высших рангов ошибок предсказания // Радиотехника. 2008. Вып. 153. С. 10-14. 6. *Марпл.-мл. С. Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир. 1990. 584 с.

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 14.05.2010