УДК 51 : 65.012.122

О. К. ИЛЮНИН, канд. техн. наук, *Б. В. НОВИКОВ*

О ТРАНЗИТИВНЫХ МОДИФИКАЦИЯХ ГРУППОВЫХ ОТНОШЕНИЙ

Рассмотрим некоторые аспекты одного из основных вопросов теории группового выбора — построения транзитивных групповых упорядочений объектов. Используется терминология Б. Г. Миркина [1]; необходимые свойства бинарных отношений приведены там же.

Пусть M — множество сравниваемых объектов; $R_1, \ldots, R_n$ — индивидуальные предпочтения на множестве M группы лиц (экспертов), являющиеся линейными квазипорядками; $f(n)$ — некоторая (не обязательно возрастающая) функция от n, такая, что $0 \leqslant f(n) \leqslant n$ для любого натурального n. Для объектов a, $b \in M$ через $n(a, b)$ обозначим число отношений R_i, для которых $(a, b) \in R_i$. Пусть R — групповое отношение, построенное по следующему правилу:

$$(a, b) \in R \leftrightarrow n(a, b) \geqslant f(n). \qquad (1)$$

В частности, при $f(n) = n/2$ получается правило простого большинства [1], при $f(n) = [\alpha n] + 1$ — правило α-большинства [2].

Отношение R, определенное правилом (1), не является ни линейным, ни транзитивным. Для удобства предполагаем $n(a, a) = n$ для любого объекта $a \in M$, тогда R станет рефлексивным. Кроме того, легко видеть, что при $f(n) \leqslant n/2$ отношение R линейно, поскольку $n(a, b) + n(b, a) \geqslant n$.

Определим так же, как и в [1], модификации отношения R. Отношение R' назовем модификацией группового отношения R, если для любых a, $b \in M$ выполняются условия: 1) если $n(a, b) > f(n)$, то $(a, b) \in R'$; 2) если $n(a, b) = f(n)$, то $(a, b) \in R'$ или $(b, a) \in R'$; 3) если $n(a, b) < f(n)$, то $(a, b) \notin R'$.

Отметим некоторые свойства модификаций, необходимые для дальнейшего изложения. Пусть R' — модификация отношения R, тогда $R' \subseteq R$. Пересечение P всех модификаций отношения R обладает таким свойством:

$$(a, b) \in P \leftrightarrow n(a, b) > f(n). \qquad (2)$$

Далее, если $f(n) \leqslant n/2$, каждая модификация R' линейна. Действительно, если $(a, b) \notin R'$ и $(b, a) \notin R'$, то $n(a, b) < f(n)$ и $n(b, a) < f(n)$, откуда $n(a, b) + n(b, a) < 2f(n) \leqslant n$. Мы пришли к противоречию, так как для любых объектов $a, b \in M$ выполняется неравенство $n(a, b) + n(b, a) \geqslant n$.

Обратно легко проверить, что любое линейное отношение, лежащее между P и R, является модификацией отношения R.

В [1] поставлена задача о нахождении алгоритма построения транзитивной модификации при $f(n) = n/2$; в работе [3] предложен такой алгоритм и дано необходимое и достаточное условие существования транзитивной модификации. В данной статье с использованием методов работы [3] дано решение этой же задачи для более общего случая, когда $f(n)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию $0 \leqslant f(n) \leqslant n/2$.

В дальнейшем используются обозначения: Δ — диагональ декартова квадрата $M \times M$, $\Delta(a, b) = \Delta \cup \{(a, b)\}$. Для произвольного бинарного отнсшения A через $\overline{A}$ обозначается его дополнение; через A^{τ} — транзитивное замыкание; P — пересечение всех модификаций группового отношения R, построенного по правилу (1). Запись aAb означает $(a, b) \in A$, где A — бинарное отношение. Всюду ниже предполагаем, что $0 \leqslant f(n) \leqslant n/2$.

Для построения алгоритма используются следующие утверждения.

Лемма [3]. *Пусть A — произвольный квазипорядок. Тогда для любых $a, b \in M$ $(A \cup (a, b))^{\tau} = A\Delta(a, b)A$.*

Теорема. *Пусть Q — такое транзитивное отношение, что $P \subseteq Q \subseteq R$, и пусть $b\overline{Q}a$ для некоторых объектов $a, b \in M$. Тогда $(Q \cup (a, b))^{\tau} \subseteq R$. (Заметим, что из $b\overline{Q}a$ следует $b\overline{P}a$, т. е. по свойству* (2) *$n(b, a) \leqslant f(n)$, откуда $n(a, b) \geqslant n - f(n) \geqslant f(n)$ и $(a, b) \in R$).*

Доказательства леммы и теоремы приведены в приложении.

Алгоритм нахождения транзитивной модификации группового решения работает следующим образом. На первом шаге находим транзитивное замыкание P^{τ} отношения P (для этого матрица из нулей и единиц, соответствующая отношению P, возводится в степень до тех пор, пока степени не стабилизируются). Если $P^{\tau} \not\subseteq R$, транзитивной модификации не существует (P является пересечением всех модификаций, поэтому P^{τ} содержится в пересечении всех транзитивных модификаций). Если же $P^{\tau} \subseteq R$, обозначим $Q_1 = P^{\tau}$ и перейдем ко второму шагу. При этом $P \subseteq Q_1 \subseteq R$.

Пусть на i-м шаге ($i \geqslant 1$) получено транзитивное отношение Q_i, такое, что $P \subseteq Q_i \subseteq R$. Если aQ_ib или bQ_ia для каждой пары $(a, b) \in M \times M$, то отношение Q_i линейно и, следовательно, является искомой транзитивной модификацией. Пусть найдутся такие объекты $a, b \in M$, что $a\overline{Q}_ib$ и $b\overline{Q}_ia$. Тогда (см. замечание к теореме) aRb и bRa, и мы переходим к следующему шагу, полагая $Q_{i+1} = (Q_i \cup (a, b))^{\tau} = Q_i\Delta(a, b)Q_i$. По теореме отношение Q_{i+1} содержится в R, будучи при этом отличным от Q_i.

Из описания алгоритма непосредственно получается следующее необходимое и достаточное условие существования транзитивной модификации, удобное для практических применений.

Следствие. Транзитивная модификация группового отношения R (при $0 \leqslant f(n) \leqslant n/2$) существует тогда и только тогда, когда $P^{\tau} \subseteq R$.

Пример. Покажем на примере работу алгоритма. Пусть 4 эксперта имеют индивидуальные отношения на множестве объектов $M = \{1, 2, 3, 4, 5\} : R_1 : 1 = 2 = 3 > 4 > 5$; $R_2 : 4 > 5 > 1 > > 3 > 2$; $R_3 : 3 > 2 > 5 > 4 > 1$; $R_4 : 5 > 1 > 4 > 3 > 2$.

Положим $f(n) = n/2$. Тогда отношения P и R задаются матрицами:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Транзитивное замыкание отношения P совпадает с его квадратом, поэтому

$$Q_1 = P^{\tau} = P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

На втором шаге к Q_1 можно добавить пару (4, 1), так как $(4, 1) \notin Q_1$ и $(1, 4) \notin Q_1$. Получаем

$$Q_2 = (Q_1 \cup (4, 1))^{\tau} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

На третьем шаге присоединяем пару (5, 4):

$$Q_3 = (Q_2 \cup (5, 4))^{\tau} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Полученное отношение Q_3 линейно и, следовательно, является искомой транзитивной модификацией отношения R: $R' = Q_3 : 5 > 4 > 1 > 3 > 2$.

Отметим некоторые особенности алгоритма.

Замечание 1. При нахождении транзитивной модификации на ЭВМ матрицу отношения $Q_i = (Q_{i-1} \cup \Delta(a, b))^{\tau}$ удобно вычислять, используя лемму. Если $Q_i = (q^i_{\alpha\beta})^n_{\alpha, \beta=1} \Delta(a, b) = (\delta_{\alpha\beta})^n_{\alpha, \beta=1}$, из соотношения $Q_i = Q_{i-1}\Delta(a, b)\, Q_{i-1}$ получаем

$$q^i_{\alpha\beta} = \sum_{x, y=1}^{n} q^{i-1}_{\alpha x} \delta_{xy} q^{i-1}_{y\beta} = \sum_{x=1}^{n} q^{i-1}_{\alpha x} q^{i-1}_{x\beta} + q^{i-1}_{\alpha a} q^{i-1}_{b\beta}.$$

Так как $Q^2_{i-1} = Q_{i-1}$, то $\sum\limits_{x=1}^{n} q^{i-1}_{\alpha x} q^{i-1}_{x\beta} = q^{i-1}_{\alpha\beta}$, откуда получаем формулу для вычисления элементов матрицы Q_i: $q^i_{\alpha\beta} = q^{i-1}_{\alpha\beta} + q^{i-1}_{\alpha a} q^{i-1}_{b\beta}$.

Замечание 2. Нельзя упростить алгоритм, присоединяя на каждом шаге сразу несколько пар, удовлетворяющих условию теоремы. Так, в приведенном выше примере

$$(Q_1 \cup (2, 4) \cup (4, 1))^\tau = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \not\subseteq R.$$

Замечание 3. В случае, когда $f(n) > \frac{n}{2}$, алгоритм не применим. Так, например, если заданы индивидуальные отношения: $R_1: 1 > 2 > 3 > 4 > 5$; $R_2: 2 = 3 > 4 > 1 = 5$; $R_3: 1 > 4 = 5 > > 3 > 2$; $R_4: 1 = 2 = 3 = 5 > 4$; $R_5: 4 > 2 > 1 = 3 = 5$; $R_6: 5 > > 1 = 4 > 3 > 2$, то при $f(n) = \frac{2}{3}n$ получаем $n(3, 5) = n(5, 3) = = 4$. В то же время легко проверить, что $(P^2 \cup (5, 3))^\tau \not\subseteq R$, хотя $P^\tau = P^2 \subseteq R$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы. Покажем сначала, что отношение $A\Delta(a, b)A$ является квазипорядком. Действительно, $\Delta \subseteq A \cap \Delta(a, b)$, откуда следует рефлексивность отношения $A\Delta(a, b)A$. Докажем, что $A\Delta(a, b)A$ транзитивно.

Пусть $(x, y) \in A\Delta(a, b)A$ и $(y, z) \in A(a, b)A$, тогда найдутся такие α, β, γ, $\delta \in M$, что $xA\alpha$, $yA\gamma$, $\alpha\Delta(a, b)\beta$, $\gamma\Delta(a, b)\delta$, βAy, δAz.

Из $\alpha\Delta(a, b)\beta$ следует $\alpha = \beta$ или $\alpha = a$, $\beta = b$. В первом случае $xA\gamma$, $\gamma\Delta(a, b)\delta$, δAz, т. е. $(x, z) \in A(a, b)A$. Точно так же $(x, z) \in A\Delta(a, b)A$, если $\gamma = \delta$.

Предположим теперь, что $\alpha = \gamma = a$, $\beta = \delta = b$. Тогда xAa, bAz, откуда $(x, z) \in A\Delta(a, b)A$, т. е. отношение $A\Delta(a, b)A$ транзитивно.

В силу рефлексивности $A \cup (a, b) \subseteq A\Delta(a, b)A$, откуда $(A \cup (a, b))^\tau \subseteq \subseteq A\Delta(a, b)A$. С другой стороны, $A\Delta(a, b)A = A(\Delta \cup (a, b))A = A^2 \cup A(a, b)A \subseteq (A \cup (a, b))^3 \subseteq (A \cup (a, b))^\tau$. Таким образом, $(A \cup (a, b))^\tau = A\Delta(a, b)A$, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы. Предположим обратное. Пусть $(x, y) \notin R$, $(x, y) \in (Q \cup (a, b))^\tau$ для некоторых объектов x, $y \in M$. По лемме $(x, y) \in Q\Delta(a, b)Q$, т. е. $xQ\alpha$, $\alpha\Delta(a, b)\beta$, βQy.

Если $\alpha = \beta$, $(x, y) \in Q \subseteq R$ (в силу транзитивности отношения Q) вопреки предположению. Поэтому $\alpha \neq \beta$ и, следовательно, $\alpha = a$, $\beta = b$. Отсюда xQa и bQy. Если bQx, используя транзитивность отношения Q, получаем bQa, что противоречит условию теоремы, поэтому bQx.

Так как групповое отношение R линейно, то из xRy следует yRx. Поэтому $n(x, y) < f(n)$, $n(y, x) \geqslant n - n(x, y) > n - f(n) \geqslant f(n)$ и, следовательно, xPy, yPx по определению отношения P. Так как $P \subseteq Q$, то yQx. Но bQy, откуда bQx — противоречие. Следовательно, $(Q \cup (a, b))^\tau \subseteq R$, что и требовалось доказать.

Таким образом, построен алгоритм, позволяющий получить транзитивное решение в случае, когда отношение, полученное методом большинства, нетранзитивно. Этот алгоритм может быть использован при построении моделей, учитывающих влияние субъективных факторов — мнений индивидуумов и коллективных решений.

Список литературы: 1. *Миркин Б. Г.* Проблема группового выбора. М.: Наука, 1974. 180 с. 2. *Апинис А. А.* О транзитивности правил α-большинства и более общих правил.— Мат. методы в социальных науках. Вильнюс, 1974, вып. 4, с. 3—36. 3. *Илюнин О. К.*, *Новиков Б. В.* О транзитивных модификациях мажоритарных отношений. (Депон. ВИНИТИ, № 4421, 1976). — Реф. журн. мат., 1977, 4В582.

Поступила 13 ноября 1978 г.