УДК 510.62

Ю. П. ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО, д-р техн. наук, *В. В. ШЛЯХОВ*

ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ СВЕРТОЧНОГО СЕМЕЙСТВА ПРЕДИКАТОВ

В статье изучаются экспериментально проверяемые условия, при выполнении которых произвольная динамическая система, обследуемая методом нуль-органа [1], может быть математически описана интегралом свертки. Такие динамические системы широко распространены в природе и технике. Статья продолжает исследования, начатые в работе [2].

Введем линейное пространство $L_2(-\infty, \infty)$ на множестве всех измеримых функций $x(\tau)$, для каждой из которых

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|} x^2(\tau)\, d\tau < \infty.$$

Скалярное произведение двух элементов x, y этого пространства определим следующим образом:

$$(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|} x(\tau)\, y(\tau)\, d\tau.$$

Введенное пространство удовлетворяет всем аксиомам абстрактного гильбертова пространства, поэтому общий вид линейного функционала в нем такой [3]:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|} x(\tau)\, S(\tau)\, d\tau, \tag{1}$$

где $S(\tau)$ — функция из $L_2(-\infty, \infty)$.

Семейство предикатов $\{\Phi_t\}_{t \in R}$, заданных на декартовом квадрате пространства $L_2(-\infty, \infty)$, назовем сверточным, если каждый предикат этого семейства может быть представлен в виде

$$\Phi_t(x, y) = D\left(\int_{-\infty}^{t} e^{\tau - t} x(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau,\ \int_{-\infty}^{t} e^{\tau - t} y(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau\right). \tag{2}$$

Здесь R — множество всех вещественных чисел, D — предикат равенства вещественных чисел, u — функция из $L_2(-\infty, \infty)$, удовлетворяющая условию

$$\int_0^\infty e^{-\tau}u^2(\tau)\,d\tau \neq 0. \tag{3}$$

Неравенство (3) означает, что функция u почти всюду на полуоси $[0, \infty)$ не равна тождественно нулю.

Сформулируем и докажем теорему об условиях существования сверточного семейства предикатов.

Теорема 1. *Для того чтобы семейство предикатов* $\{\Phi_t\}_{t\in R}$ было *сверточным, необходимо и достаточно, чтобы все предикаты этого семейства обладали свойством однородности, а предикат* Φ_0 — *свойствами необратимости, аддитивности, одномерности и непрерывности.*

Предикат Φ_t назовем однородным, если при любых $x, y \in L_2(-\infty, \infty)$ $\Phi_0(x, y) = \Phi_t(x_t, y_t)$ **(4)**, где $x_t(\tau) = x(\tau - t)$. Предикат Φ_0 назовем необратимым, если из равенства $x(\tau) = y(\tau)$, выполняющегося почти всюду при $\tau < 0$, вытекает $\Phi_0(x, y) = 1$ **(5)**; аддитивным, если при любых $x_1, y_1, x_2, y_2 \in L_2(-\infty, \infty)$ и условия $\Phi_0(x_1, y_1) = \Phi_0(x_2, y_2) = 1$ вытекает равенство $\Phi_0(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = 1$; одномерным, если существует функция $a(\tau) \in L_2(-\infty, \infty)$, такая, что для любого x найдется единственное вещественное число $\alpha(x)$, удовлетворяющее условию $\Phi_0(x, \alpha(x)\,a) = 1$ **(6)**; непрерывным, если функционал $\alpha(x)$ непрерывен в метрике пространства $L_2(-\infty, \infty)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть число t произвольным образом зафиксировано, а предикат Φ_t определяется зависимостью (2). Докажем однородность предиката Φ_t. Из условия (5) вытекает равенство

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\tau}x(\tau)\,u(-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{0} e^{\tau}y(\tau)\,u(-\tau)\,d\tau.$$

Подставляя в нем $\tau - t$ вместо τ, получим равенство

$$\int_{-\infty}^{t} e^{\tau-t}x(\tau - t)\,u(t - \tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} e^{\tau-t}y(\tau - t)\,u(t - \tau)\,d\tau,$$

т. е. $\Phi_t(x_t, y_t) = 1$. Точно так же из условия $\Phi_0(x, y) = 0$ выводим $\Phi_t(x_t, y_t) = 0$. Отсюда непосредственно следует уравнение (4).

Необратимость и аддитивность предиката Φ_0 очевидны. Докажем одномерность предиката $\Phi_0(x, y)$. Положим $a(\tau) = u(-\tau)$. Условие (6) равносильно уравнению

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\tau}x(\tau)\,u(-\tau)\,d\tau = \alpha(x)\int_{-\infty}^{0} e^{\tau}u^2(-\tau)\,d\tau,$$

которое при любом x ввиду (3) имеет единственное решение:

$$\alpha(x) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{0} e^{\tau} x(\tau)\, u(-\tau)\, d\tau}{\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\tau} u^2(\tau)\, d\tau}. \qquad (7)$$

Непрерывность предиката Φ_0 непосредственно следует из непрерывности функционала (7).

Достаточность. Предположим, что предикат Φ_t при любом $t \in R$ однороден, а предикат Φ_0 непрерывен, аддитивен, одномерен и необратим. Выведем отсюда сверточность семейства предикатов $\{\Phi_t\}_{t \in R}$. С этой целью найдем общий вид функционала $\alpha(x)$. Согласно свойству одномерности для любых x и y имеем $\Phi_0(x, \alpha(x)\, a) = 1$ **(8)**; $\Phi_0(y, \alpha(y)\, a) = 1$ **(9)**; $\Phi_0(x + y, \alpha(x + y)\, a) = 1$ **(10)**. С другой стороны, по свойству аддитивности из (8) и (9) получаем $\Phi_0(x + y, \alpha(x)\, a + \alpha(y)\, a) = 1$ **(11)**. Сравнивая (10) и (11), из единственности коэффициента при $a(\tau)$ (свойства одномерности) выводим аддитивность функционала α: $\alpha(x + y) = \alpha(x) + \alpha(y)$.

Так как функционал $\alpha(x)$ к тому же непрерывен (свойство непрерывности), то он линеен. Согласно (1) его общий вид следующий:

$$\alpha(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|} x(\tau)\, S(\tau)\, d\tau. \qquad (12)$$

Из свойства необратимости непосредственно следует, что предикат $\Phi_0(x, y)$ рефлексивен. Докажем теперь, что $\Phi_0(x, y) = D(\alpha(x), \alpha(y))$. Из равенства $\Phi_0(x, y) = 1$, аддитивности и рефлексивности вытекает $\Phi_0(x - y, 0) = 1$. Учитывая одномерность предиката Φ_0, получаем $\alpha(x - y) = 0$, т. е. $\alpha(x) = \alpha(y)$ **(13)**. Повторяя рассуждения в обратном порядке, из (13) выводим $\Phi_0(x, y) = 1$. Таким образом, $\Phi_0(x, y) = D(\alpha(x), \alpha(y))$ **(14)**. Заметим, что из (14) вытекает симметричность и транзитивность предиката Φ_0.

Рассмотрим функцию $x^*(\tau)$, определяемую условием

$$x^*(\tau) = \begin{cases} x(\tau), & \text{если } \tau < 0, \\ 0, & \text{если } \tau \geqslant 0. \end{cases} \qquad (15)$$

Согласно свойству необратимости из (15) следует $\Phi_0(x^*, x) = 1$ **(16)**. Из (16) и (14) выводим $\alpha(x) = \alpha(x^*)$. Отсюда по (12) вытекает равенство

$$\alpha(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{\tau} x(\tau)\, S(\tau)\, d\tau.$$

Положим $S(\tau) = u(-\tau)$, тогда

$$\Phi_0(x, y) = D\left(\int\limits_{-\infty}^{0} e^{\tau} x(\tau)\, u(-\tau)\, d\tau, \int\limits_{-\infty}^{0} e^{\tau} y(\tau)\, u(-\tau)\, d\tau\right).$$

Учитывая свойство однородности, получаем

$$\Phi_t(x, y) = D\left(\int_{-\infty}^{0} e^{\tau}x(\tau+t)\,u(-\tau)\,d\tau, \quad \int_{-\infty}^{0} e^{\tau}y(\tau+t)\,u(-\tau)\,d\tau\right).$$

Производим замену τ на $\tau - t$:

$$\Phi_t(x, y) = D\left(\int_{-\infty}^{t} e^{\tau-t}x(\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau, \quad \int_{-\infty}^{t} e^{\tau-t}y(\tau)\,u(t-\tau)\,dt\right).$$

Теорема доказана.

Следующая ниже теорема свидетельствует о том, что система условий теоремы 1 несократима.

Теорема 2. *Условия однородности, одномерности, необратимости, аддитивности и непрерывности независимы.*

Доказательство. Для того чтобы доказать эту теорему, достаточно привести для каждого из условий теоремы 1 примеры семейств предикатов, которые удовлетворяют всем условиям теоремы, кроме одного.

1. Однородность. Принимаем

$$\Phi_t(x, y) = D\left(\int_{-\infty}^{t} e^{\tau}x(\tau)\,\tau d\tau, \quad \int_{-\infty}^{t} e^{\tau}y(\tau)\,\tau d\tau\right). \tag{17}$$

Пусть, кроме того, $x(\tau) = \tau + 3$, $y(\tau) = 1$. Нетрудно вычислить, что в этом случае

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\tau}x(\tau)\,\tau d\tau = \int_{-\infty}^{0} e^{\tau}y(\tau)\,\tau d\tau,$$

т.е. $\Phi_0(x, y) = 1$.

Тем не менее, как показывают вычисления, при $t \neq 0$

$$\int_{-\infty}^{t} e^{\tau}x_t(\tau)\,\tau d\tau \neq \int_{-\infty}^{t} e^{\tau}y_t(\tau)\,\tau d\tau.$$

Таким образом, $\Phi_0(x, y) \neq \Phi_t(x_t, y_t)$ и свойство однородности не выполняется. Однако все остальные свойства имеют место. Действительно, предположим, что для каких-либо $x, x', y, y' \in L_2(-\infty, \infty)$ выполняются равенства $\Phi_0(x, x') = \Phi_0(y, y') = 1$. Тогда из (17) следует

$$\int_{-\infty} e^{\tau}x(\tau)\,\tau d\tau = \int_{-\infty}^{0} e^{\tau}x'(\tau)\,\tau d\tau,$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\tau}y(\tau)\,\tau d\tau = \int_{-\infty}^{0} e^{\tau}y'(\tau)\,\tau d\tau.$$

Отсюда

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\tau}[x(\tau) + y(\tau)]\,\tau d\tau = \int_{-\infty}^{0} e^{\tau}[x'(\tau) + y'(\tau)]\,\tau d\tau$$

или $\Phi_0(x + y, x' + y') = 1$. Значит, предикат $\Phi_0(x, y)$ аддитивен.

Докажем его одномерность. Положим $a(\tau)=\tau$. В этом случае число $\alpha(x)$ для любого $x\in L_2(-\infty,\ \infty)$ единственным образом находится из уравнения

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\tau}x(\tau)\,\tau d\tau=\alpha(x)\int_{-\infty}^{0} e^{\tau}\tau^2 d\tau,$$

а именно

$$\alpha(x)=\frac{\int_{-\infty}^{0} e^{\tau}x(\tau)\,\tau d\tau}{\int_{-\infty}^{0} e^{\tau}\tau^2 d\tau}. \tag{18}$$

Таким образом, доказана одномерность, а из (18) следует непрерывность $\alpha(x)$ в метрике $L_2(-\infty,\ -\infty)$.

Осталось доказать свойство необратимости. Оно выполняется, поскольку для функций $x(\tau)$ и $y(\tau)$, совпадающих почти всюду при $\tau<0$, имеем

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\tau}x(\tau)\,\tau d\tau=\int_{-\infty}^{0} e^{\tau}y(\tau)\,\tau d\tau,$$

т. е. $\Phi_0(x,\ y)=1$.

2. Аддитивность. Из неравенства Гельдера [3] следует, что для любой функции $x(\tau)\in L_2(-\infty,\ \infty)$ выполняется

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|}x^{5/3}(\tau)\,d\tau\right|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|}\,|x(\tau)|^{5/3}d\tau\leqslant$$

$$\leqslant\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|}\{|x(\tau)|^{5/3}\}^{6/5}d\tau\right]^{5/6}\cdot\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|}1^6 d\tau\right]^{1/6}. \tag{19}$$

Из (19) вытекает

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|}x^{5/3}(\tau)\,d\tau\right|<2^{1/6}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|}x^2(\tau)\,d\tau\right\}^{5/6}<\infty. \tag{20}$$

Неравенство (20) означает, что для любого $x(\tau)\in L_2(-\infty,\ \infty)$ существует функция

$$\alpha_t(x)=\int_{-\infty}^{t} e^{\tau-t}x^{5/3}(\tau)\,d\tau. \tag{21}$$

Допустим, $\{\Phi_t\}_{t\in R}$ задано следующим образом: $\Phi_t(x,\ y)=$ $=D(\alpha_t(x),\ \alpha_t(y))$.

Из (21) следует, что определение корректно. Данное семейство будет однородным, в чем легко убедиться, подставив в (21) τ на место $\tau-t$.

Предикат $\Phi_0(x,\ y)$ будет необратимым вследствие того, что интегрирование происходит на интеграле $(-\infty,\ 0]$. Его одномерность вытекает, если положить $a(\tau)=1$. В этом случае $\alpha(x)=$

$= \alpha_0(x)$. Из последнего равенства следует непрерывность. Однако аддитивностью $\Phi_0(x, y)$ не обладает, так как из (21) видно, что $\alpha_0(x)$ не аддитивный функционал.

3. Одномерность. Положим $\Phi_t(x, y) \equiv 1$. Тогда это семейство предикатов не будет обладать свойством одномерности, так как при любом $a(\tau)$, $x(\tau) \in L_2(-\infty, \infty)$ существует бесконечно много чисел $\alpha(x)$ (а именно, любое действительное число), для которых $\Phi_0(x, \alpha(x)a) = 1$.

С другой стороны, все остальные свойства выполняются. Это легко проверить. Свойство же непрерывности определено только для одномерных предикатов и требовать его выполнения не имеет смысла.

4. Необратимость. Возьмем семейство предикатов

$$\Phi_t(x, y) = D\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau-t|}x(\tau)(t-\tau)\,d\tau, \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau-t|}y(\tau)(t-\tau)\,d\tau\right) \tag{22}$$

и две функции, удовлетворяющие условиям $x(\tau) = y(\tau)$ при $\tau < 0$; $x(\tau) = 1$, $y(\tau) = 2$ при $\tau \geqslant 0$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau-t|}x(\tau)(t-\tau)\,d\tau \neq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau-t|}y(\tau)(t-\tau)\,d\tau$$

или $\Phi_0(x, y) = 0$ **(23)**.

Из (23) явствует, что предикат Φ_0 не обладает свойством необратимости. С другой стороны, из $a(\tau) = -\tau$ и

$$\alpha(x) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|}\,x(\tau)(-\tau)\,d\tau}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|}\tau^2\,d\tau} \tag{24}$$

следует одномерность и непрерывность предиката Φ_0. Из (24) видим, что $\alpha(x)$ аддитивен, поэтому предикат $\Phi_0(x, y)$ также аддитивен. Однородность доказывается заменой $\tau - t$ на τ в выражении (22).

5. Непрерывность. Зададим в $L_2(-\infty, \infty)$ функционал $\alpha^*(x)$ следующим образом. Каждая функция $x(\tau) \in L_2(-\infty, \infty)$ является суммой:

$$x'\tau = \begin{cases} x(\tau) & \text{при } \tau < 0 \\ 0 & \text{при } \tau \geqslant 0 \end{cases} \quad x''(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau < 0 \\ x(\tau) & \text{при } \tau \geqslant 0. \end{cases}$$

Причем $x'(\tau) \perp x''(\tau)$. Таким образом, $L_2(-\infty, \infty) = M \oplus N$, где M — подпространство функций, почти всюду равных 0 при $\tau < 0$, а N — подпространство функций, почти всюду равных 0 при $\tau \geqslant 0$. Теперь допустим, что $f(x)$ — однородный, аддитивный и разрывный функционал на N [3]. Положим $\alpha^*(x) = f(x')$, где $x = x' + x''$, $x' \in N$, $x'' \in M$. Тогда $\alpha^*(x)$ будет однородным, аддитивным и разрывным функционалом, заданным в $L_2(-\infty, \infty)$ и обладающим тем свойством, что для любых двух функций $x(\tau)$ и $y(\tau)$, равных почти всюду при $\tau < 0$, имеем $\alpha^*(x) = \alpha^*(y)$. Положим $\Phi_0(x, y) = D(\alpha^*(x), \alpha^*(y))$ **(25)**.

Из аддитивности и только что указанного свойства $\alpha^*(x)$ следует, что предикат $\Phi_0(x, y)$ аддитивен и необратим. Докажем его одномерность. Заметим, что по построению $\alpha^*(x) \neq 0$, поэтому существует $a(\tau) \in L_2(-\infty, \infty)$, для которой $\alpha^*(a) = 1$. Единственное вещественное число $\alpha(x)$, удовлетворяющее условию $\Phi_0(x, \alpha(x)a) = 1$, находится единственным образом из уравнения $\alpha^*(x) = \alpha^*(\alpha(x)a)$ и $\alpha(x) = \alpha^*(x)$ Одномерность доказана. Непрерывность же для предиката $\Phi_0(x, y)$ не выполняется из-за разрывности $\alpha^*(x)$ и $\alpha(x)$ соответственно. Теперь положим для любого t $\Phi_t(x, y) = \Phi_0(x^*, y^*)$ **(26)**, где $x^*(\tau) = x(\tau + t)$, а $y^*(\tau) = y(\tau + t)$. Для семейства предикатов $\{\Phi_t\}_{t \in R}$, заданного формулой (26), как нетрудно видеть, выполняется свойство однородности. Теорема 2 доказана.

Список литературы: 1. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П.* Применение метода нуль-органа в психофизике. — Пробл. бионики, 1978, вып. 21, 22, с. 1 — 15, 50 — 60. 2. *Шабанов-Кушнаренко Ю. П., Рвачев В. Л., Мурашко А. Г.* Математичні моделі зору. — К.: Техніка, 1966. — 95 с. 3. *Ахизер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1966. — 543 с.

Поступила в редколлегию 14. 06. 82.