

## ВЫБОР ПОРЯДКА ЛИНЕЙНОГО ФИЛЬТРА ПРЕДСКАЗАНИЯ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С ГАУССОВОЙ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИЕЙ \*)

Д.И. ЛЕХОВИЦКИЙ, М.И. ТАБАЧНИКОВ, С.И. ШИПИЦЫН

Устанавливается связь между порядком линейного фильтра предсказания и уровнем минимальной дисперсии ошибки для процесса с гауссовой автокорреляционной функцией. Обосновывается выбор порядка линейного фильтра предсказания в соответствующей ситуации.

**Ключевые слова:** линейное предсказание с минимальной ошибкой, порядок фильтра, гауссова корреляционная функция, коэффициент подавления.

Линейные фильтры предсказания (ЛФП) – составные элементы устройств обработки сигналов различной природы – геофизических, акустических, радиолокационных и т.п. [1, 2]. Они обычно используются для минимизации дисперсии

$$d(p) = \overline{|\varepsilon(p)|^2} \quad (1)$$

разности (ошибки)

$$\varepsilon(p) = y_{p+1} - \mathbf{k}^* \cdot \mathbf{y}_- = y_{p+1} - \sum_{i=1}^p k_i^* \cdot y_i \quad (2)$$

между текущим  $(p+1)$ -м значением  $y_{p+1}$  входного процесса  $\mathbf{y} = \{y_i\}_{i=1}^{p+1}$  и линейной комбинацией его предшествующих значений  $\mathbf{y}_- = \{y_i\}_{i=1}^p$  за счет соответствующего выбора импульсной характеристики  $\mathbf{k} = \{k_i\}_{i=1}^p$ .

Важным вопросом при проектировании ЛФП является обоснование их порядка  $p$ , который выбирается в зависимости от достижимой степени снижения дисперсии  $d(p)$  по мере роста  $p$ . Как известно, она определяется корреляционной матрицей (КМ) входного процесса

$$\Phi(p+1) = \{\varphi_{i\ell}\}_{i,\ell=1}^{p+1} = \overline{\mathbf{y} \mathbf{y}^*}, \quad (3)$$

в чем легко убедиться, переписав (2) в виде

$$\varepsilon(p) = \mathbf{r}^* \mathbf{y}; \quad \mathbf{r}^* = \{r_i\}_{i=1}^{p+1} = \{-\mathbf{k}^*, 1\}; \quad r_{p+1} = 1, \quad (4)$$

откуда, учитывая (1), (3), получаем

$$d(p) = \mathbf{r}^* \Phi(p+1) \mathbf{r}. \quad (5)$$

**Цель работы** – обосновать выбор порядка ЛФП для широко используемой модели стационарного входного процесса с нулевым средним и гауссовой корреляционной функцией (КФ)

$$\begin{aligned} \rho &= \{\rho_i\}_{i=1}^{p+1}, \quad \rho_i = \overline{y_{s+i-1} \cdot y_s^*} = \overline{y_s y_1^*} = \\ &= \sigma_n^2 c^{(i-1)\beta} e^{j(i-1)\alpha}, \quad s \in 1, p+2-i, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\sigma_n^2$  – дисперсия (мощность) входного процесса;  $c < 1$  и  $\beta$  – соответственно модуль и фаза коэффициента взаимной корреляции  $\overline{y_{i+1} y_i^*} / \sigma_n^2$  ( $i \in 1, p$ ) произвольной пары его смежных отсчетов.

\*) Радиотехника. – М. – 1990. – № 4. – С. 44–48.

Для этой модели положительно определенная корреляционная матрица (3) эрмитова ( $\varphi_{i\ell} = \varphi_{\ell i}^*$ ) теплицева ( $\varphi_{i\ell} = \varphi_{i-\ell+1,1}$ ,  $\ell \leq i$ ) и поэтому полностью определяется своим первым столбцом  $\Phi_1 = \{\varphi_{i1}\}_{i=1}^{p+1} = \rho$ .

Для решения поставленной задачи воспользуемся результатом из [3], в соответствии с которым минимум  $v(p)$  квадратичной формы (5) при выполнении последнего равенства (4)

$$v(p) = \min_{\mathbf{r}} d(p) = \det \Phi(p+1) / \det \Phi(p), \quad (7)$$

где  $\det \mathbf{A}$  – детерминант (определитель) матрицы  $\mathbf{A}$ .

Этот минимум достигается на векторе  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ , являющемся решением системы

$$\Phi(p+1) \mathbf{r}_0 = v(p) \mathbf{e}_{p+1}^{(p+1)}, \quad (8)$$

где  $\mathbf{e}_i^{(M)}$  –  $i$ -й столбец единичной  $M \times M$  матрицы  $\mathbf{I}_M$ .

В Приложении показано, что для рассматриваемого случая гауссовой КФ (6) справедлива рекурсия

$$\det \Phi(p+1) = \sigma_n^2 \det \Phi(p) \prod_{i=1}^p (1 - c^{2i}), \quad (9)$$

в силу которой (7) преобразуется к виду

$$v(p) = \sigma_n^2 \prod_{i=1}^p (1 - c^{2i}). \quad (10)$$

Отсюда следует, что переход от ЛФП  $(p-1)$ -го к ЛФП  $p$ -го порядка уменьшает дисперсию ошибки в

$$\gamma(p) = (1 - c^{2p})^{-1} \quad (11)$$

раз, так что с ростом  $p$  прирост эффективности монотонно уменьшается, и тем в большей степени, чем меньше модуль  $c$ . Мерой эффективности ЛФП обычно служит “коэффициент подавления”  $K_n(p) = \sigma_n^2 / v(p)$  [4], в рассматриваемом случае равный

$$K_n(p) = \prod_{i=1}^p (1 - c^{2i})^{-1}. \quad (12)$$

Соответствующие (12) зависимости  $K_n(p)$  при различных значениях  $c$  показаны сплошными кривыми на рис. 1. Они наглядно иллю-

стрируют вклад в увеличение  $K_{\Pi}(p)$ , обусловленный изменением порядка ЛФП.

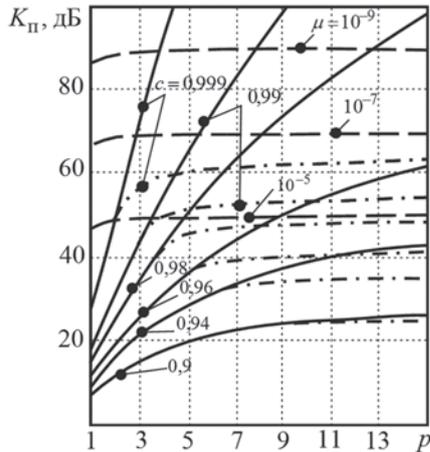


Рис. 1. Зависимость  $K_{\Pi}$  от порядка  $p$  ЛФП

При обработке стационарных временных рядов ЛФП  $p$ -го порядка может быть реализован в форме трансверсального КИХ фильтра с весовыми коэффициентами, совпадающими с соответствующими компонентами вектора  $\mathbf{r}_0$  (8).

Более удобна, однако, его реализация в форме эквивалентного  $p$ -звенного решетчатого фильтра. Дисперсия  $v(i)$  ошибки на каждом из двух выходов его  $i$ -го ( $i \in 1, p$ ) элементарного решетчатого фильтра (ЭРФ) связана с дисперсией  $v(i-1)$  на его входах соотношением  $v(i) = v(i-1)(1 - |\alpha_i|^2)$ ,  $v(0) = \sigma_{\Pi}^2$  [2] и, следовательно

$$v(p) = \sigma_{\Pi}^2 \prod_{i=1}^p (1 - |\alpha_i|^2), \quad (13)$$

где  $\alpha_i$  – коэффициент корреляции процессов на входах  $i$ -го звена, численно совпадающий с  $i$ -м частным коэффициентом корреляции входного процесса [2].

Из сопоставления (13) и (10) следует, что

$$|\alpha_i| = c^i, \quad (14)$$

т.е. процесс с гауссовской КФ имеет экспоненциальную частную КФ. Этот результат впервые приведен в [5], однако его доказательство там существенно сложнее. Еще более простое доказательство равенства (14) дано в [8].

В реальных условиях из-за наличия некоррелированного шума значения  $K_{\Pi}(p)$  меньше показанных на рис. 1 непрерывными кривыми. Степень снижения определяется относительным уровнем шума  $\mu = \sigma_{\text{ш}}^2 / \sigma_{\Pi}^2$ , а предельный уровень  $K_{\Pi}(p)$  соответствует полностью коррелированным отсчетам процесса ( $c = 1$ ). В этом случае

$$\Phi(p+1) = \sigma_{\text{вх}}^2 \mu (\mu + 1)^{-1} (\mathbf{I}_{p+1} + \mu^{-1} \mathbf{e}_{p+1} \mathbf{e}_{p+1}^*), \quad (15)$$

где

$$\sigma_{\text{вх}}^2 = \sigma_{\Pi}^2 + \sigma_{\text{ш}}^2 = \sigma_{\Pi}^2 (1 + \mu); \quad \mathbf{e}_{p+1} = \{ \exp(j(i-1)\beta) \}_{i=1}^{p+1};$$

поэтому

$$\det \Phi(p+1) = \left( \sigma_{\text{вх}}^2 \cdot \mu \cdot (1 + \mu)^{-1} \right)^{p+1} \left( 1 + \mu^{-1} \cdot (p+1) \right),$$

и, в соответствии с (7),

$$v(p) = \sigma_{\text{вх}}^2 \cdot \mu \cdot (\mu + p + 1) / \{ (1 + \mu) \cdot (p + \mu) \},$$

так что

$$K_{\Pi}(p) = \sigma_{\text{вх}}^2 / v(p) = [(\mu + 1) / \mu] [(\mu + p) / (\mu + p + 1)]. \quad (16)$$

При малом уровне шума ( $\mu \ll 1$ )  $K_{\Pi}(p) \approx \mu^{-1} p / (1 + p)$ , т.е. основное подавление, равное  $1/2 \cdot \mu$ , обеспечивается уже при  $p = 1$  и при увеличении  $p$  вплоть до  $p \rightarrow \infty$  увеличивается не более, чем вдвое (на 3 дБ). Можно показать также, что в условиях (15)  $i$ -й ( $i \leq p$ ) частный коэффициент корреляции  $\alpha_i = -(\mu + i)^{-1} \exp(ji\beta)$ , и при  $\mu \ll 1$   $|\alpha_i| \approx i^{-1}$ , т.е. аддитивная смесь детерминированного сигнала и некоррелированного шума малой интенсивности имеет гиперболическую частную КФ.

На рис. 1 штриховыми кривыми приведено семейство зависимостей  $K_{\Pi}(p)$  (16) для ряда значений параметра  $\mu$ . Эти кривые задают верхнюю границу коэффициента подавления, которая при соответствующем значении  $\mu$  не может быть превзойдена ни при каких значениях  $c \leq 1$ . Поэтому в реальных условиях ( $\mu \neq 0$ ) скорость изменения  $K_{\Pi}(p)$  с ростом порядка ЛФП оказывается ниже теоретически возможной (12) в отсутствие шума (непрерывные кривые на рис. 1). Степень замедления тем выше, чем выше модуль коэффициента корреляции  $c$  входного процесса. В связи с этим наличие шума «нивелирует» отличия в скорости изменения  $K_{\Pi}(p)$  для разных значений  $c$ , что наглядно иллюстрируется штрихпунктирными кривыми на рис. 1, определяющими зависимости  $K_{\Pi}(p)$  при  $\mu = 10^{-7}$  и  $c < 1$ .

Как следует из анализа этих зависимостей, при  $\mu > 10^{-7}$  (–70 дБ) ЛФП порядка  $p = 3 \div 5$  обеспечивают практически предельный коэффициент подавления независимо от значения  $c$ , так что использование ЛФП более высоких порядков в этих условиях малоэффективно.

Значения  $p = 3 \div 5$  могут рассматриваться в качестве верхней границы порядка ЛФП для минимизации дисперсии ошибки и для широкого класса других реальных процессов с унимодальными спектрами мощности, поскольку для них характерен более медленный рост коэффициента подавления, чем для рассмотренного процесса с гауссовской (колокольной) формой спектра.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Докажем равенство (9), следствием которого являются основные результаты (10)–(12), а также формула (14), выводу которой посвящены статьи [5–7] (см. также предыдущую статью данного выпуска).

Заметим вначале, что матрица  $\Phi(p+1)$  допускает представление

$$\Phi(p+1) = \mathbf{D} \mathbf{A}(p+1) \mathbf{D}^*, \quad (П1)$$

$$\mathbf{A}(p+1) = \{ a_{i\ell} \}_{i,\ell=1}^{p+1}, \quad a_{i\ell} = \sigma_{\Pi}^2 \cdot c^{(i-\ell)^2},$$

где  $\mathbf{D} = \text{diag}\{d_i\}_{i=1}^{p+1}$  – диагональная матрица с элементами  $d_i = \exp\{j(i-1)\beta\}$  на главной диагонали.

Поскольку  $\mathbf{D}\mathbf{D}^* = \mathbf{I}_{p+1}$ , то

$$\det \Phi(p+1) = \det \mathbf{A}(p+1) \quad (\text{П2})$$

и, следовательно, (9) эквивалентно равенству

$$\det \mathbf{A}(p+1) = \sigma_{\Pi}^2 \det \mathbf{A}(p) \prod_{i=1}^p (1 - c^{2i}) \quad (\text{П3})$$

для действительной симметричной теплицевой матрицы  $\mathbf{A}(p+1)$  (П1), которую можно записать в блочном виде

$$\mathbf{A}(p+1) = \begin{bmatrix} \sigma_{\Pi}^2 & & \\ -\frac{\sigma_{\Pi}^2}{\sigma_{\Pi}^2} \mathbf{s} & \mathbf{A}(p) & \\ \sigma_{\Pi}^2 \mathbf{s}^* & & \end{bmatrix}; \mathbf{s} = \{s_i\}_{i=1}^p; s_i = c^{i^2}. \quad (\text{П4})$$

Детерминант этой матрицы, как известно, равен

$$\det \mathbf{A}(p+1) = \sigma_{\Pi}^2 \det \mathbf{G}(p); \quad \mathbf{G}(p) = \{g_{i\ell}\}_{i,\ell=1}^p = \mathbf{A}(p) - \sigma_{\Pi}^2 \mathbf{s}\mathbf{s}^*. \quad (\text{П5})$$

Используя (П1), (П4), для элементов матрицы  $\mathbf{G}(p)$  получим

$$g_{i\ell} = \sigma_{\Pi}^2 (c^{(i-\ell)^2} - c^{i^2+\ell^2}) = \sigma_{\Pi}^2 c^{(i-\ell)^2} (1 - c^{2i\ell}),$$

что позволяет представить ее в виде произведения

$$\mathbf{G}(p) = \mathbf{Q}\mathbf{H}(p) \quad (\text{П6})$$

диагональной матрицы  $\mathbf{Q} = \text{diag}\{q_i\}_{i=1}^p$  с элементами  $q_i = 1 - c^{2i}$  и детерминантом

$$\det \mathbf{Q} = \prod_{i=1}^p (1 - c^{2i}) \quad (\text{П7})$$

на матрицу  $\mathbf{H}(p) = \{h_{i\ell}\}_{i,\ell=1}^p$  с элементами

$$h_{i\ell} = \sigma_{\Pi}^2 c^{(i-\ell)^2} \left\{ \frac{(1 - c^{2i\ell})}{(1 - c^{2i})} \right\}.$$

Дробь в фигурных скобках последнего выражения описывает сумму  $\ell$  членов геометрической прогрессии с единичным первым членом и знаменателем, равным  $c^{2i}$ , поэтому это выражение можно переписать в виде

$$h_{i\ell} = \sigma_{\Pi}^2 c^{(i-\ell)^2} \sum_{v=1}^{\ell} c^{2i(\ell-v)} = \sum_{v=1}^{\ell} \sigma_{\Pi}^2 c^{(i-v)^2} c^{\ell^2 - v^2},$$

или, учитывая (П1),  $h_{i\ell} = \sum_{v=1}^{\ell} a_{iv} c^{\ell^2 - v^2}$ , т.е.  $\mathbf{H}(p) = \mathbf{A}(p)\mathbf{V}(p)$ , где  $\mathbf{V}(p) = \{v_{i\ell}\}_{i,\ell=1}^p$  – верхняя треугольная матрица с элементами  $v_{i\ell} = 0$  ( $\ell < i$ ),  $v_{i\ell} = c^{\ell^2 - v^2}$  ( $\ell \geq i$ ). Поскольку ее диагональные элементы  $v_{ii} = 1$ ,  $\det \mathbf{V}(p) = 1$  и, значит,  $\det \mathbf{H}(p) = \det \mathbf{A}(p)$ , что в сочетании с (П8), (П7), (П5) и (П2) доказывает (П3) и равенство (9) в основном тексте.

### От редактора

В процессе подготовки статьи к публикации в данном выпуске было найдено еще более простое “решетчатое” доказательство равенства (9)

и, тем самым, основных результатов (10) – (12) данной статьи.

Искомый результат получается последовательным использованием равенств (7), (20), (21б), (41), (51а), (61) первой статьи [9] настоящего сборника

$$\begin{aligned} \det \Phi(p+1) &= (\det \Psi(p+1))^{-1} = (\det(\mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H}))^{-1} = \\ &= \left( \prod_{m=1}^{p+1} h_{mm}^2 \right)^{-1} = \left( \prod_{m=1}^p h_{mm}^2 \right)^{-1} \cdot h_{p+1,p+1}^{-2} = \\ &= (\det \Psi(p))^{-1} \cdot (b_{p+1}^{(p+1)})^{-2} = \det \Phi(p) \cdot s_1^{-2} \cdot \prod_{i=2}^{p+1} s_i^{-2} = \\ &= \det \Phi(p) \cdot \sigma_{\Pi}^2 \cdot \prod_{i=2}^{p+1} (1 - |\alpha_i|^2), \end{aligned}$$

что в сочетании с формулой (2) предыдущей статьи завершает доказательство.

### Литература

- [1] Фридландер Б. Решетчатые фильтры для адаптивной обработки данных // ТИИЭР. – 1982. – Т. 70, № 8. – С. 54–97.
- [2] Мосунов В.Б. Алгоритмы адаптивного линейного усиления // Зарубежная радиоэлектроника. – М. – 1985. – №5. – С. 3–23.
- [3] Беллман Р. Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1976.
- [4] Ширман Я.Д., Манжос В.Н. Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех. – М.: Радио и связь, 1981.
- [5] Джаковитти Дж., Скарано Дж. О свойстве коэффициентов частной корреляции стационарных процессов с гауссовской корреляционной функцией // ТИИЭР. – 1987. – т.75. – №7.
- [6] A.E. Yagle “On geometric sequences of reflection coefficients and Gaussian autocorrelations,” Proc. IEEE, vol. 76, no. 10, pp. 1372–1374, Oct. 1988.
- [7] D.L. Jones and T.W. Parks, “On computing spaced samples of a complex Gaussian function,” IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, vol. ASSP-35, no. 10, Oct. 1987.
- [8] Леховицкий Д.И. Замечание к сообщению “о свойстве коэффициентов частной корреляции стационарных процессов с гауссовой автокорреляционной функцией // ТИИЭР т. 77, №12, декабрь 1989, С. 222.
- [9] Леховицкий Д.И., Рачков Д.С., Семеняка А.В., Рябуха В.П., Атаманский Д.В. Адаптивные решетчатые фильтры. Часть I. Теория решетчатых структур// Настоящий сборник.

Поступила в редколлегию 4.10.2011

Леховицкий Давид Исаакович, фото и сведения об авторе см. на с. 404.

Шипицын Сергей Иванович, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры Национального университета “Юридическая академия Украины имени Ярослава Мудрого”. Область научных интересов – пространственно-временная обработка сигналов на фоне помех.



УДК 621.372.54

**Вибір порядку лінійного фільтра проорокування для стаціонарних випадкових процесів з гаусівською кореляційною функцією / Д.І. Леховицький, М.І. Табачников, С.І. Шипіцин // Прикладна радіоелектроніка: наук.-техн. журнал. — 2011. Том 10. № 4. — С. 450-453.**

Установлюється зв'язок між порядком лінійного фільтра проорокування й рівнем мінімальної дисперсії помилки для процесу з гаусівською автокореляційною функцією. Обґрунтовується вибір порядку лінійного фільтра проорокування у відповідній ситуації.

*Ключові слова:* лінійне проорокування з мінімальною помилкою, порядок фільтра, гаусівська кореляційна функція, коефіцієнт придушення.

Л. 1. Бібліогр.: 9 найм.

UDC 621.372.54

**Choice of order of linear prediction filter for stationary random processes with Gaussian correlation function / D.I. Lekhovytsky, M.I. Tabachnikov, S.I. Shipitsyn // Applied Radio Electronics: Sci. Journ. 2011. Vol. 10. № 4. — P. 450-453.**

The paper establishes the connection between the order of a linear prediction filter and the level of error minimal variance for the process with Gaussian autocorrelation function. The choice of linear prediction filter order is also validated for this case.

*Keywords:* linear prediction with minimal error, filter order, Gaussian correlation function, suppression ratio.

Fig. 1. Ref: 9 items.