вой схемы, которое осуществляется соответствующими межсоединениями входных и выходных выводов рангеров, воспроизводится широкий набор логических функций инвариантной обработки аналоговых сигналов. Для реализации операций перепрограммирования могут быть использованы коммутирующие матрицы с кодовым управлением от микроконтроллера. В постоянное запоминающее устройство микроконтроллера закладывается библиотека межсоединений (схем) в виде соответствующих кодов. При таком подходе инвариантные классификаторы являются гибридными персональными вычислительными системами. Таким образом, в элементном базисе рангеров возможно построение широкой номенклатуры инвариантных классификаторов без промежуточных преобразований аналоговых сигналов в цифровой код. В связи с этим появляется необходимость промышленного выпуска рангеров в виде гибридных интегральных микросхем общего применения и дальнейшего развития рангерной микросхемотехники.

Литература: **1.** *Плотников В. Н.* Речевой диалог в системах управления. М.: Машиностроение, 1988. 224 с. **2.** *Васильев В. И.* Распознающие системы. К.: Наук. думка, 1983. 424 с. **3.** *Полонский А. Д.* О рангере (Сообщение) // Радиоэлектроника и информатика. 1999. № 3 (08). С. 60.

Поступила в редколлегию 08.06.2003

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Воробьев Г.С.

Полонский Александр Дмитриевич, канд. техн. наук, докторант кафедры искусственного интеллекта ХНУРЭ. Научные интересы: инвариантные системы. Адрес: Украина, 40001, Сумы, ул. Кирова-165, д. 140, кв. 41, тел. (0542) 277-975.

УДК 517.9+532.5

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ЧИСЛЕННОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ КОНВЕКТИВНЫХ ВЯЗКИХ ТЕЧЕНИЙ В ОДНОСВЯЗНЫХ И МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

СИДОРОВ М.В.

Рассматривается задача расчета конвективного течения вязкой несжимаемой жидкости в односвязной или многосвязной области. Предлагается приближенный метод решения этой задачи, основанный на применении методов R-функций и последовательных приближений.

Введение

При построении численных алгоритмов решения задач конвективного движения вязкой несжимаемый жидкости (например, при моделировании процессов выращивания монокристаллов, при расчете охлаждения подвижных частей двигателей и др.) часто используется система уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска в переменных «функция тока – температура». Применение этих уравнений для решения задач в многосвязных областях затруднено тем обстоятельством, что, приняв значение функции тока на одной из границ равным некоторой постоянной величине, мы не можем определить функцию тока на других границах. В связи с этим возникают определенные трудности численного решения уравнений.

1. Постановка задачи

Рассмотрим стационарное конвективное движение вязкой жидкости в плоской области Ω с кусочно-непрерывной границей $\partial\Omega$ (предполагаем, что массовые силы отсутствуют). Уравнения Навье-Стокса в приближении Буссинеска (приближение слабой сжимаемости) в переменных "функция тока – температура" имеют вид [1]

$$\Delta\Delta\psi = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\Delta\psi\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\Delta\psi\right) + Gr\frac{\partial T}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{1}{Pr}\Delta T = \frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial\psi}{\partial x}\right), \ x \in \Omega. \quad (2)$$

Здесь ψ – функция тока, связанная с компонентами скорости соотношениями $v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}$, $v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$; T – температура жидкости; Pr – число Прандтля; Gr – число Грасгофа.

Систему уравнений (1), (2) дополним граничными условиями.

Если область Ω односвязная, ограниченная твердыми неподвижными стенками, то, используя условия прилипания, можно задать условия вида

$$\psi\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega} = 0, \quad (3)$$

$$T\big|_{\partial\Omega} = T_0(x, y)\big|_{\partial\Omega}. \quad (4)$$

Рассмотрим теперь случай, когда область Ω многосвязная (для простоты изложения ограничимся случаем двухсвязной области). По-прежнему предполагаем, что область Ω ограничена твердыми неподвижными стенками. Обозначим через $\partial\Omega_0$ внешнюю границу области Ω, а через $\partial\Omega_1$ – внутреннюю. Известно [1], что функция тока $\psi(x, y)$ определена с точностью до несущественной постоянной, поэтому на одной части границы можно положить

$$\psi\big|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega_0} = 0; \quad (5)$$

но тогда
$$\psi\big|_{\partial\Omega_1} = c, \quad \frac{\partial\psi}{\partial n}\bigg|_{\partial\Omega_1} = 0, \quad (6)$$

где $c = \text{const}$, но эта постоянная не задана. Постоянную c из (6) найдем из условия однозначного определения давления в многосвязной области Ω. Рассуждая аналогично, как и в [2], для определения c можно получить условие

$$\oint_{\partial\Omega_1} \frac{\partial \Delta\psi}{\partial n} ds = Gr \oint_{\partial\Omega_1} \frac{\partial T}{\partial x} ds . \quad (7)$$

2. Метод решения

Систему уравнений (1), (2) будем решать, применяя итерационный процесс последовательных приближений по нелинейности, т.е. решая на каждом $(m+1)$-м шаге линейную систему

$$\Delta\Delta\psi^{(m+1)} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi^{(m)}}{\partial y}\Delta\psi^{(m)}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi^{(m)}}{\partial x}\Delta\psi^{(m)}\right) + Gr\frac{\partial T^{(m)}}{\partial x}, \quad (8)$$

$$\frac{1}{Pr}\Delta T^{(m+1)} = \frac{\partial}{\partial x}\left(T^{(m)}\frac{\partial \psi^{(m)}}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(T^{(m)}\frac{\partial \psi^{(m)}}{\partial x}\right). \quad (9)$$

Можно доказать, что указанный итерационный процесс при достаточно малых числах Прандтля и Грасгофа сходится к единственному обобщенному решению соответствующих краевых задач.

Начальное приближение может быть выбрано произвольно, например, в качестве $\psi^{(0)}$ можно взять течение Стокса.

Обозначим

$$F_m = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi^{(m)}}{\partial y}\Delta\psi^{(m)}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi^{(m)}}{\partial x}\Delta\psi^{(m)}\right) + Gr\frac{\partial T^{(m)}}{\partial x},$$

$$G_m = \frac{\partial}{\partial x}\left(T^{(m)}\frac{\partial \psi^{(m)}}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(T^{(m)}\frac{\partial \psi^{(m)}}{\partial x}\right).$$

Случай односвязной области Ω. Пусть известна функция $\omega(x, y)$, удовлетворяющая условиям:

$$\omega > 0 \text{ в } \Omega, \omega = 0 \text{ на } \partial\Omega, |\nabla\omega| = 1 \text{ на } \partial\Omega,$$
$$\partial\Omega = \partial\Omega_0 \cup \partial\Omega_1 .$$

В соответствии с методом R-функций [3] и используя структуры решений, полученные ранее [3, 4], решение уравнений (8), (9), удовлетворяющее краевым условиям (3), (4), будем искать в виде

$$\psi^{(m+1)} = \omega^2 \Phi_1^{(m+1)}, \quad (10)$$

$$T^{(m+1)} = T_0 + \omega\Phi_2^{(m+1)}, \quad (11)$$

где $\Phi_1^{(m+1)}, \Phi_2^{(m+1)}$ – неопределенные компоненты. Для их аппроксимации можно воспользоваться, например, каким-либо вариационным методом, представив их в виде линейной комбинации базисных функций.

Случай двухсвязной области Ω. Функцию тока в задаче (8), (9), (5)–(7), (4) будем искать в виде

$$\psi^{(m+1)} = u_0^{(m+1)} + cu_1 , \quad (12)$$

где c – константа из (7). Здесь функция $u_0^{(m+1)}$ – решение задачи

$$\Delta\Delta u_0^{(m+1)} = F_m \text{ в } \Omega, \quad (13)$$

$$u_0^{(m+1)}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u_0^{(m+1)}}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (14)$$

а функция u_1 – решение задачи

$$\Delta\Delta u_1 = 0 \text{ в } \Omega, \quad (15)$$

$$u_1|_{\partial\Omega_0} = 0, \; u_1|_{\partial\Omega_1} = 1, \; \frac{\partial u_1}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (16)$$

Таким образом, функция u_1 в (12) от номера итерации не зависит и при реализации вычислительного процесса находится лишь один раз.

Очевидно, что при таком выборе функций $u_0^{(m+1)}$, u_1 функция $\psi^{(m+1)}$ вида (12) будет удовлетворять уравнению (8) и краевым условиям (5), (6); кроме того, функции $u_0^{(m+1)}$ и u_1 будут линейно-независимыми.

Подставив теперь (12) в (7) для определения постоянной c, получим соотношение

$$c\oint_{\partial\Omega_1} \frac{\partial \Delta u_1}{\partial n} ds = -\oint_{\partial\Omega_1} \frac{\partial \Delta u_0}{\partial n} ds + Gr\oint_{\partial\Omega_1} \frac{\partial T}{\partial x} ds . \quad (17)$$

Для решения задач (13)-(16) можно воспользоваться методом R-функций [3]. Пусть известны функции $\omega_0(x, y)$ и $\omega_1(x, y)$, такие, что

$$\omega_0 > 0 \text{ в } \Omega \cup \partial\Omega_1, \omega_0 = 0 \text{ на } \partial\Omega_0, |\nabla\omega_0| = 1 \text{ на } \partial\Omega_0;$$

$$\omega_1 > 0 \text{ в } \Omega \cup \partial\Omega_0, \omega_1 = 0 \text{ на } \partial\Omega_1, |\nabla\omega_1| = 1 \text{ на } \partial\Omega_1.$$

Тогда функция $\omega = \omega_0 \wedge_\alpha \omega_1$ будет удовлетворять таким условиям:

$$\omega > 0 \text{ в } \Omega, \omega = 0 \text{ на } \partial\Omega, |\nabla\omega| = 1 \text{ на } \partial\Omega.$$

Структуры решения задач (13)-(16) возьмем соответственно в виде

$$u_0^{(m+1)} = \omega^2 \Phi_0^{(m+1)}, \quad (18)$$

$$u_1 = \frac{\omega_0}{\omega_0 + \omega_1} - \omega D_\omega^{(1)}\left(\frac{\omega_0}{\omega_0 + \omega_1}\right) + \omega^2\Phi_1 . \quad (19)$$

Здесь $\Phi_0^{(m+1)}$, Φ_1 – неопределенные компоненты структур; $D_\omega^{(1)} = \frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}$.

Далее, найдя значение $\psi^{(m+1)}$, решаем задачу (9), (4) для температуры. Ее структура решения может быть выбрана в виде (11).

3. Результаты вычислительного эксперимента

С помощью пакета Mathematica 4.2© было получено решение задачи свободной конвекции при $Pr = 1$, $Gr = 50$ для двух областей: прямоугольной

$$\Omega = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1, \;\; 0 \le y \le 1\}$$

и имеющей форму полуэллипса:

$$\Omega = \left\{(x, y) \mid 4(x-0{,}5)^2 + y^2 \le 1, \quad 0 \le y \le 1\right\}.$$

Краевое условие для температуры (4) задавалось в виде $T_0(x, 0) = 1 - |2x - 1|$ и $T_0(x, y) = 0$ на остальных участках границы области Ω. Полученные приближенные решения сравнивались с решениями, полученными в [5] с помощью метода фиктивных областей. Результаты очень хорошо согласуются.

Литература: 1. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с. **2.** *Сидоров М.В.* Приближенный метод расчета многосвязных вязких течений // Радиоэлектроника и информатика. 2003. № 1. С. 42-44. **3.** *РвачевВ.Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. К.: Наук. думка, 1982. 552 с. **4.** *Сидоров М.В.* Применение метода R-функций к расчету течения в квадратной каверне при малом числе Рейнольдса // Радиоэлектроника и информатика. 2002. № 4. С. 54-56. **5.** *Вабищевич П.Н.* Метод фиктивных областей в математической физике. М.: Изд-во МГУ, 1991. 156 с.

Поступила в редколлегию 21.10.2003

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. Колосов А.И.

Сидоров Максим Викторович, ассистент кафедры прикладной математики ХНУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование, математическая физика, теория R-функций и ее приложения. Увлечения и хобби: история культуры. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина. 14, тел. (0572) 702-14-36.

УДК 517.977.5

ЗАДАЧА ДИНАМИЧЕСКОГО СИНТЕЗА ПРИ ВЕКТОРНОМ УПРАВЛЕНИИ

РАДИЕВСКИЙ А. Е.

Рассматривается процедура разработки математического обеспечения задачи динамического синтеза при векторном управлении. Сформулированная задача исследуется на основе положений одного из разделов современной теории экстремальных задач – формализме Дубовицкого-Милютина.

1. Введение

Современный этап развития научно-технического прогресса в области проектирования современных и перспективных систем управления (СУ) технологическими процессами и подвижными объектами базируется на положениях прикладной современной теории автоматического управления [1]. Использование ее положений позволяет учитывать специфичность процедуры проектирования, связанную с применением средств вычислительной техники в структуре управляющих устройств СУ, а также наличия информационных и энергетических закономерностей и ограничений.

2. Постановка и особенности задачи

На движениях объекта управления (ОУ)

$$\frac{dx}{dt} = F(x, u, w, t)$$

необходимо определить алгоритм управления (АУ), доставляющий оптимум векторному критерию качества

$$J(u) = J(f_0(x, u)), \tag{1}$$

который задается как некая функция произвольного множества $(\alpha_i J_i(u))_{i=1}^{m}$ локальных критериев качества при наличии ограничений

$$x \in Q = (x : |x| \le x_{max}), \tag{2}$$

$$u \in U = (u : |u| \le u_{max}) \tag{3}$$

и граничных условий $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = 0$, где $x = x(t) \in C^n(t_0, t_1)$ – состояние ($C^n(t_0, t_1)$-пространство n-мерных непрерывных на отрезке $[t_0, t_1]$ функций $x(t)$ с нормой

$$\|x\| = \max|x(t)|, \ \forall t \in [t_0, t_1] \subset R^1);$$

$u = u(t) \in L_\infty^r(t_0, t_1)$-управление ($L_\infty^r(t_0, t_1)$-пространство r- мерных существенно ограниченных на отрезке $[t_0, t_1]$ измеримых функций $u(t)$ с нормой $\|u\| = \operatorname{vrai\,sup}|u(t)|, \forall t \in [t_0, t_1] \subset R^1$); $w = w(t) \in E^w$ – возмущение (E^w – пространство элементарных случайных функций вида [2] $w(t) = c(t)\lambda$, $c(t)$ – координатная функция, λ – случайная величина, принадлежащая счетному множеству); $f_0(x, u)$ – функционал; $J_i(u), i \in [1, m]$ – интегральный квадратичный функционал, $\alpha_i > 0, i \in [1, m]$ – весовые коэффициенты, причем $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$; x_{max}, u_{max} – заданные числа; $t \in [t_0, t_1] \subset R^1$ – время; $[t_0, t_1]$ – интервал управления; R^1 – числовая прямая.

3. Особенности задания векторного критерия качества

Предполагается, что $m = n$. Возможны три варианта соотношений между величинами n и r:

$$n = r; \ n > r \ (n - r = z_1); \ n < r \ (r - n = z_2).$$

Для первого варианта локальные критерии качества задаются в виде

$$J_i(u) = \int_{t_{0i}}^{t_{1i}} W_i(x_i, u_i)dt = \int_{t_{0i}}^{t_{1i}} \left(x_i^T R_i x_i + u_i^T M_i u_i\right)dt, \tag{4}$$

$i \in [1, n]$;