



**International Science Group**

**ISG-KONF.COM**

**||**

**INTERNATIONAL SCIENTIFIC  
AND PRACTICAL CONFERENCE  
"INNOVATIONS IN EDUCATION: PROSPECTS AND  
CHALLENGES OF TODAY"**

**Sofia, Bulgaria**

**January 16 - 19, 2024**

**ISBN 979-8-89292-753-6**

**DOI 10.46299/ISG.2024.1.2**

# ВИЗНАЧЕННЯ СЕРЕДНЬОГО ВЗДОВЖ ТРАЄКТОРІЇ ПРОМІНЮ ПОКАЗНИКА ЗАЛОМЛЕННЯ ПОВІТРЯ НА ОСНОВІ ЕФЕКТУ ПРИШИРЕННЯ ЛІНІЙ ПОГЛИНАННЯ МОЛЕКУЛ ПОВІТРЯ

**Ремаєва Ольга Олександрівна**

к. т. н., доцент, доцент кафедри вищої математики  
Харківський національний університет радіоелектроніки

**Стогній Надія Петрівна**

к. ф. - м. н., доцент, доцент кафедри вищої математики  
Харківський національний університет радіоелектроніки

У зв'язку з широкомасштабним використанням GPS технологій точність позиціонування досліджуваного об'єкта має високе значення. Розглянуто вплив поглинання основними молекулами повітря на величину показника його заломлення. На основі цих досліджень розроблено метод визначення величини середньоінтегрального показника заломлення повітря, досліджено похибки методу.

Відома формула визначення показника заломлення повітря, значення якого пропорційно до щільності повітря в точці спостереження [1]:

$$N = \frac{\rho_d}{\rho_{ds}} N_{ds} + \frac{\rho_w}{\rho_{ws}} N_{ws}, \quad (1)$$

де  $N = n - 1$ ,  $n$  - показник заломлення повітря,  $\rho$  - щільність повітря. Величини з індексом  $d$  описують параметри для сухої частини повітря, з індексом  $w$  - для водяної пари. Індекс  $s$  відноситься до параметрів стандартних атмосферних умов, причому значення стандартних параметрів не впливають на результати подальших досліджень, як буде показано далі.

Відповідно до [1] щільність сухого та вологого компоненту повітря визначається з рівняння для щільності (ВІРМ 1981/91):

$$\rho_d = \frac{PM_d(1 - \chi_w)}{ZRT}, \quad (2)$$

$$\rho_w = \frac{PM_w \chi_w}{ZRT}. \quad (3)$$

Тут  $P$  - повний атмосферний тиск, Па;  
 $T$  - температура, К;

$M_d, M_w$  - молярна маса сухої частини повітря та водяної пари (кг/моль)  
 відповідно;

$Z$  - параметр стисливості повітря;

$\chi_w$  - молярна частка водяної пари в повітрі (у відносних одиницях);

$R$  - універсальна газова стала, Дж/(мольК).

Опис окремих параметрів формул (2, 3) не наведено, їх значення можна знайти у [1].

Як відомо, середній вздовж траєкторії поширення сигналу показник заломлення повітря визначається інтегралом

$$\bar{n} = \frac{1}{D} \int_D n(l) dl, \quad (4)$$

де  $D$  - довжина траєкторії між джерелом та приймачем сигналу;

$n(l)$  - поточне значення показника заломлення на траєкторії;

$l$  - променева координата.

Інтегрування ведеться траєкторією променя.

Підставимо (1 – 3) у (4) і отримаємо вираз:

$$\bar{N} = \frac{M_d}{RD} N_d \int_D \frac{P(1-\chi_w)}{ZT} dl + \frac{M_w}{RD} N_w \int_D \frac{P\chi_w}{ZT} dl \quad (5)$$

Відомо (див. напр. [2]), що енергетичні рівні електронних, обертальних та коливальних переходів різних молекул повітря мають складний набір ліній поглинання (і випромінювання), але ізольовані молекули мають дискретний спектр.

Переходи між дискретними енергетичними рівнями ізольованої молекули, пов'язані з випромінюванням або поглинанням світла, мають фіксовані частоти, хоча вони не характеризуються строго монохроматичними лініями. Реальні лінії мають певний контур навіть у ізольованої молекули. Причиною цього є відомий ефект радіаційного згасання, викликаного кінцевим часом життя молекули у певному енергетичному стані. Такий ефект призводить до розширення спектральної лінії, який названий природним.

У газах у стані термодинамічної рівноваги, коли розподіл швидкості молекул має максвеллівський характер, основною причиною розширення контуру спектральної лінії є ефект Доплера. Цей ефект переважає в розріджених газах і практично не помітний при тисках, близьких до атмосферного, за рахунок переважання ефекту розширення, обумовленого взаємодією молекул повітря між собою.

Взаємодія молекули із сусідніми призводить до спотворення її енергетичних рівнів, що у свою чергу призводить до розширення спектральних ліній поглинання (випромінювання). Очевидно, що цей ефект безпосередньо

пов'язаний із щільністю молекул повітря, і величину даного ефекту можна використовувати для визначення показника заломлення повітря.

Теорія Лоренца, розроблена ще на початку ХХ століття, описує контур спектральної лінії, утворений зіткненнями молекул, відомою формулою коефіцієнта поглинання:

$$\kappa(\nu) = \frac{S}{\pi} \frac{\gamma_L}{(\nu - \nu_0)^2 + \gamma_L^2}, \quad (6)$$

де  $S$  - інтенсивність лінії;

$\nu_0$  - центральна частота контуру поглинання;

$\nu$  - частота;

$\gamma_L$  - напівширина контуру.

Оскільки концентрація молекул у газі пропорційна тиску, то ширина контуру лінії поглинання також буде пропорційна тиску. Для двокомпонентної суміші газів відома формула [2]

$$\gamma_L = \gamma_L^0 \frac{P}{P_0} \sqrt{\frac{T_0}{T}}, \quad (7)$$

де індекс 0 належить параметрам суміші газів у нормальних умовах.

Земна атмосфера в приземному шарі на 99% складається з азоту та кисню (двохатомні молекули) [3], тобто є практично двокомпонентною сумішшю газів. Істотний внесок до складу повітря може зробити наявність водяної пари (до 1-2%), однак, визначивши  $\gamma_L^0$  для стандартної атмосфери з урахуванням середнього парціального тиску водяної пари, можна розраховувати на збереження пропорційності у формулі (7).

Перетворюємо (7) на вигляд

$$\frac{P}{T} = \left( \frac{\gamma_L}{\gamma_L^0} \right)^2 \frac{P_0^2}{T_0 P} \quad (8)$$

і підставимо (8) до (5). Отримаємо

$$\bar{N} = \frac{M_d}{RD} N_d \int_D \left( \frac{\gamma_L}{\gamma_L^0} \right)^2 \frac{P_0^2 (1 - \chi_w)}{Z T_0 P} + \frac{M_w}{RD} N_w \int_D \left( \frac{\gamma_L}{\gamma_L^0} \right)^2 \frac{P_0^2 \chi_w}{Z T_0 P} \quad (9)$$

Розглянемо інтеграл  $\int_0^D \frac{\gamma_L^2}{P} dl$ . Нехай  $P = \bar{P} + \delta P$ , а  $\gamma_L = \bar{\gamma}_L + \delta \gamma_L$ , де  $\bar{P}$  - середній вздовж траєкторії поширення сигналу тиск,  $\bar{\gamma}_L$  - напівширина середнього контуру лінії поглинання, причому  $\int_0^D \delta P dl = 0$  і  $\int_0^D \delta \gamma_L dl = 0$ .

Тоді  $\int_0^D \frac{\gamma_L^2}{P} dl = \int_0^D \frac{(\bar{\gamma}_L + \delta \gamma_L)^2}{\bar{P} + \delta P} dl \approx \frac{\bar{\gamma}_L^2}{\bar{P}} \int_0^D \left( 1 + 2 \frac{\delta \gamma_L}{\bar{\gamma}_L} + \frac{\delta \gamma_L^2}{\bar{\gamma}_L^2} \right) \left( 1 - \frac{\delta P}{\bar{P}} \right) dl$ . Тут знаменник підінтегрального виразу розкладений у ряд з урахуванням лише другого доданку. Остаточний вираз для розглянутого інтеграла матиме вигляд

$$\int_0^D \frac{\gamma_L^2}{P} dl \approx \frac{\bar{\gamma}_L^2}{\bar{P}} \int_0^D \left( 1 - 2 \frac{\delta \gamma_L}{\bar{\gamma}_L} \frac{\delta P}{\bar{P}} - \frac{\delta \gamma_L^2}{\bar{\gamma}_L^2} \frac{\delta P}{\bar{P}} \right) dl \quad (10)$$

Зазначимо, що інтеграли від другого та третього доданків становлять взаємні просторові кореляційні функції відповідних співмножників. Як відомо, тиск земної атмосфери є регулярною функцією висоти над рівнем моря. Температура повітря крім регулярної залежності від висоти має суттєві просторові флуктуації, спричинені впливом поверхні, що підстилає, та іншими причинами.  $\gamma_L$  згідно з формулою (7) обернено пропорційна кореню з температури, отже мінливість цього параметра в просторі має випадковий характер, і можна очікувати, що інтеграли від другого і третього доданків (9) близькі до нуля.

У такому припущенні формула (9) для середнього вздовж траєкторії променя показника заломлення повітря набуде вигляду:

$$\bar{N} = \frac{M_d^2 P_0^2 (1 - \chi_w)}{Z R \bar{P} T_0} \left( \frac{\bar{\gamma}_L}{\gamma_L^0} \right)^2 N_d + \frac{M_w^2 P_0^2 \chi_w}{Z R \bar{P} T_0} \left( \frac{\bar{\gamma}_L}{\gamma_L^0} \right)^2 N_w \quad (11)$$

При поширенні в земній атмосфері сигнал на кожній елементарній ділянці траєкторії зазнаватиме поглинання, інтенсивність якого поблизу одиночної спектральної лінії певного виду молекули описується контуром з лоренцівським розподілом, напівширина якого має значення  $\gamma_L(l)$ . Таким чином, у точці спостереження частотний розподіл інтенсивності сигналу, що описується формулою (7) з напівшириною  $\bar{\gamma}_L$ . Отже, провівши спектральний аналіз інтенсивності прийнятого сигналу, визначивши напівширину контуру розподілу інтенсивності за частотою і знайшовши середній тиск, можна визначити середньоінтегральний показник заломлення повітря частоті лінії поглинання певної молекули.

Крім уже зазначених спрощень при отриманні формули (11) (розкладання в ряд і зневага до просторової кореляції тиску та температури) були допущені й

інші – залежно від метеопараметрів величин  $Z$  і  $\chi_w$ . Проте ці залежності настільки слабкі, що з отриманні формули (11) ними можна було знехтувати. Для перевірки цієї обставини було проведено чисельний експеримент, у результаті

якого отримано такі дані (у нормальних атмосферних умовах):  $\frac{\partial \chi_w}{\partial T} \approx 1,3 \cdot 10^{-7}$  ;

$$\frac{\partial \chi_w}{\partial P_w} \approx 10^{-5} ; \quad \frac{\partial Z}{\partial T} \approx 1,5 \cdot 10^{-5} ; \quad \frac{\partial Z}{\partial P} \approx 4,2 \cdot 10^{-9}$$

. Якщо врахувати, що коефіцієнт впливу  $Z$  та  $\chi_w$  на точність визначення густини повітря близький до одиниці, то загальний внесок у похибку визначення середньоінтегрального показника заломлення повітря таке припущення не перевищує  $(3 \div 5) \cdot 10^{-9}$ , а для визначення цих параметрів достатньо виміряти температуру та тиск в одній – двох точках траси. Середній тиск також можна визначити за результатами вимірювань у початковій та кінцевій точках. Явні вирази для  $Z$  і  $\chi_w$  наведені в [1], і через їх громіздкість у роботі не представлені.

#### Список літератури:

1. В. Ciddor. Refractive index of air: new equations for visible and near infrared. Applied Optics, 1996, Vol. 35, No 9, pp. 1566 – 1573.
2. В.Е.Зуев. Распространение видимых и инфракрасных волн в атмосфере. М.: Советское радио, 1970, 496 с.
3. Атмосфера стандартная. Параметры. ГОСТ 44-81.