

УДК 519.86:621.317.39

ПОБУДОВА НУЛЬОВОГО ТА ПЕРШОГО НАБЛИЖЕНЬ У ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ ВИМІРЮВАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ

Фуніков А.С.

e-mail: anton.funikov@nure.ua

Науковий керівник – д-р фіз.-мат. наук, проф. Сидоров М.В.

Харківський національний університет радіоелектроніки,

кафедра прикладної математики

м. Харків, Україна

This work is devoted to the construction of zero- and first-order approximations for the heat conduction problem in measuring transducers with temperature-dependent thermal conductivity. A nonlinear nonstationary heat conduction model is considered, and the solution is obtained using an expansion in terms of a small parameter. The zero-order approximation is determined from the corresponding linearized problem, while the first-order approximation refines the temperature distribution in the transducer. The proposed approach can be used to improve the accuracy of thermal process modeling in measuring transducers.

Теплові процеси у вимірювальних перетворювачах суттєво впливають на їх метрологічні та динамічні характеристики. При зміні температури змінюються теплофізичні параметри матеріалів, зокрема коефіцієнт теплопровідності, що приводить до нелінійності математичних моделей. Тому при дослідженні теплових процесів у вимірювальних перетворювачах необхідно враховувати залежність коефіцієнта теплопровідності від температури [1].

Математичне моделювання теплових процесів дозволяє дослідити розподіл температури в конструкції вимірювальних перетворювачів та оцінити вплив різних фізичних параметрів на їх роботу. У загальному випадку нестационарний процес теплопровідності описується рівнянням

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial r} \right),$$

де $T(r, t)$ – температура, $\lambda(T)$ – коефіцієнт теплопровідності, c – теплоємність матеріалу, ρ – густина.

Для врахування температурної залежності коефіцієнта теплопровідності приймемо

$$\lambda(T) = \lambda_0(1 + \beta T),$$

де λ_0 – коефіцієнт теплопровідності при опорній температурі, β – малий параметр, що характеризує залежність теплопровідності від температури.

Оскільки параметр β є малим, для розв'язання задачі використаємо метод малого параметра. Температурне поле подамо у вигляді розвинення

$$T(r, t) = T_0(r, t) + \beta T_1(r, t) + \beta^2 T_2(r, t) + \dots$$

Підставляючи це розвинення у вихідне рівняння теплопровідності та групуючи члени за однаковими степенями параметра β , отримуємо систему рівнянь для визначення послідовних наближень [2].

Нульове наближення відповідає лінеаризованій задачі теплопровідності зі сталим коефіцієнтом теплопровідності

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} = a^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_0}{\partial r} \right) \right),$$

де

$$a^2 = \frac{\lambda_0}{c\rho}.$$

Розв'язок цієї задачі може бути поданий у вигляді ряду Фур'є-Бесселя

$$T_0(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\mu_n r) e^{-a^2 \mu_n^2 t},$$

де J_0 – функція Бесселя нульового порядку, μ_n – власні значення задачі [3].

Отриманий розв'язок використовується для побудови першого наближення. Після підстановки розвинення температури у вихідне рівняння та виділення членів першого порядку за параметром β отримуємо рівняння для функції $T_1(r, t)$:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = a^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) \right) + a^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r T_0 \frac{\partial T_0}{\partial r} \right) \right).$$

Праву частину цього рівняння визначає знайдений раніше розв'язок нульового наближення $T_0(r, t)$. Таким чином, задача для першого наближення є лінійною відносно функції T_1 , але містить додатковий член, що враховує вплив температурної залежності теплопровідності.

Запропонований підхід дозволяє послідовно уточнювати розподіл температури у вимірювальному перетворювачі та оцінювати вплив нелінійності теплофізичних параметрів на теплові процеси. Отримані результати можуть бути використані при дослідженні динамічних характеристик вимірювальних перетворювачів та підвищенні точності їх роботи.

Список використаних джерел:

1. Журавльов Ю. І., Кравченко В. П. Основи математичного моделювання фізичних процесів : навч. посіб. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. 212 с.
2. Чала О. Г., Синєглазов В. М. Математичне моделювання систем і процесів : навч. посіб. Київ : НАУ, 2017. 192 с.
3. Incropera F. P., DeWitt D. P., Bergman T. L., Lavine A. S. Fundamentals of Heat and Mass Transfer. 7th ed. Hoboken : John Wiley & Sons, 2011. 1048 p.