преобразования сигналов к виду, удобному для декодирования (рис. 2 представит собой преобразователь аналог—код. Число разрядов двоичног счетчика преобразователя зависит от требуемой точности преобразовани непрерывно изменяющихся сигналов и от количества подлежащих ра познаванию спектров.

Дешифратор ставит в соответствие каждой комбинации сигналов V V_1', W_2, W_3, ... W_{n-2} на выходе преобразователя аналог — код в обще случае n-возбужденных шин. Информация с выхода дешифратора може записываться в регистр памяти, соответствующие ячейки которого объ диняются в схемы совпадений.

Для уменьшения количества оборудования сигналы V_1, V_1', W_2, W ... W_{n-2} можно подавать на преобразователь аналог — код через комму татор последовательно во времени. При этом только усложнится логик схемы управления прибора и увеличится время распознавания объект

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. П. Шабанов-Кушнаренко. Вывод модели цветового зрения из зак нов Грассмана. Сб. «Проблемы бионики», вып. 2. Изд-во ХГУ, Харьков, 1969.
2. В. П. Пчелинов, Е. П. Путятин. Электронная модель распознавани цветов органом зрения человека. Сб. «Проблемы бионики», вып. 2. Изд-во ХГ Харьков, 1969.
3. Ю. П. Шабанов-Кушнаренко. Математическая модель переработк информации в органе зрения человека. Сб. «Моделирование в биологии и медицине вып. 2. Изд-во «Наукова думка», Киев, 1966.

АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ ЦВЕТОВОГО ЗРЕНИЯ

Ю. П. Шабанов-Кушнаренко

1. Постановка вопроса

В статье рассматривается задача математического моделировани стационарных и однородных зрительных процессов. Эта задача сводитс к отысканию вида зависимости

$$\overline{S} = F\,[b\,(\lambda)], \quad (1)$$

где $b\,(\lambda)$ — входной сигнал органа зрения в виде спектра излучения
λ — длина волны световых колебаний;
$\overline{S}$ — выходной сигнал органа зрения в виде трехмерного вектор цвета;
F — искомая функциональная зависимость выходного сигнала о входного.

Исследования Ньютона [1], Ломоносова [2], Юнга [3], Максвелла [4 Гельмгольца [5] и других авторов привели к построению трехкомпонент ной теории цветового зрения, которую можно сформулировать следующи образом.

Всевозможные излучения $B\,(\lambda)$, для которых совпадают тройки чисе B_1, B_2, B_3, вычисляемые по формулам

$$B_1 = \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} B\,(\lambda)\,m\,(\lambda)\,d\,\lambda, \quad B_2 = \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} B\,(\lambda)\,n\,(\lambda)\,d\lambda, \; B_3 = \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} B\,(\lambda)\,p\,(\lambda)\,d\lambda, \quad (2$$

вызывают одинаковые цвета. Вместе с тем излучения, для которых эт тройки чисел различны, влекут за собой различные цвета. В формула

(2) $m(\lambda)$, $n(\lambda)$, $p(\lambda)$ обозначают линейно независимые функции (так называемые функции сложения), определяемые для органа зрения экспериментально [6]. Числа λ_1 и λ_2 обозначают соответственно наименьшее и наибольшее значение длины волны видимого диапазона спектра электромагнитных колебаний.

Как непосредственно следует из приведенной формулировки трехкомпонентной теории цветового зрения, вектор цвета $\overline{S}$ с компонентами S_1, S_2, S_3 связан некоторой взаимно-однозначной вектор-функцией f с вектором $\overline{B}$, имеющим компоненты B_1, B_2, B_3:

$$\overline{S} = f(\overline{B}). \tag{3}$$

Конкретный вид зависимости f трехкомпонентной теорией цветового зрения не расшифровывается.

Совокупность формул (2) и (3) можно рассматривать в качестве математической модели, которая описывает вид искомого преобразования сигналов, осуществляемого органом зрения человека.

Блок-схема этой модели изображена на рис. 1. В ней блоки 1_1, 1_2, 1_3 осуществляют вычисление линейных функционалов B_1, B_2, B_3 по формулам (2). Блок 2 осуществляет некоторое взаимно-однозначное преобразование по формуле (3) вектора $\overline{B}$ с компонентами B_1, B_2, B_3 в вектор $\overline{S}$ цвета зрительного ощущения с компонентами S_1 — светлотой, S_2 — насыщенностью, S_3 — цветовым тоном.

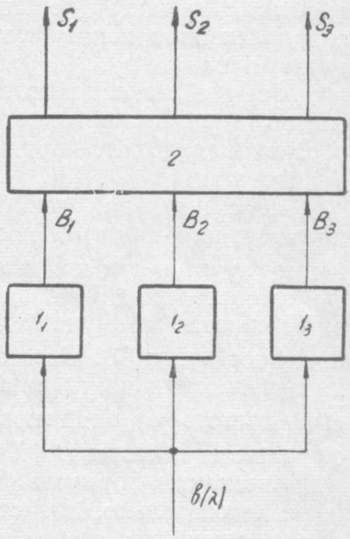

Рис. 1. Блок-схема модели стационарных и однородных зрительных процессов.

Возникает вопрос, является ли эта модель всего лишь гипотезой, различные следствия которой подтверждаются в эксперименте, или же она рассматривается как достоверный факт и, следовательно, может быть логически выделена из прочно установленных экспериментальных законов, принимаемых в качестве аксиом.

Многие авторы вводят эти уравнения до рассмотрения экспериментальных фактов, подтверждающих их справедливость. В этом случае формулы (2), (3) фактически фигурируют в качестве гипотезы [6].

Затем, основываясь на формулах (2) и (3), вводят понятие вектора цвета, понимая под ним вектор $\overline{B}$ с компонентами B_1, B_2, B_3. Далее вводят операции сложения цветов и умножения их на постоянные числа, а также понятие линейной зависимости цветов. Затем, исходя из введенных понятий, формулируют три закона смешения цветов (законы Грассмана [7]). Иногда эти три закона объединяют в один. Законы Грассмана служат основой для построения стройной системы колориметрии. Приведем один из вариантов формулировки законов Грассмана.

Закон аддитивности: *Суммы попарно равных цветов также суть равные цвета.*

Закон трехмерности: *Любые четыре цвета линейно зависимы, однако существуют тройки линейно независимых цветов.*

Закон непрерывности: *Непрерывному изменению излучения соответствует непрерывное изменение цвета.*

В то же время в литературе существует мнение, по-видимому, впервые высказанное в 1920 г. Шредингером [8], что из законов Грассмана в приведенной выше формулировке чисто логически вытекает модель цвето вого зрения в виде формул (2) и (3). В той же работе Шредингер приве вывод, доказывающий, по его мнению, это положение. Професс Н. Д. Нюберг пишет: «Обычно интегральные выражения цвета выв дятся как следствие гипотезы Гельмгольца, но их возможно получит непосредственно из закона Грассмана, *не пользуясь никакой гипоте* (курсив Нюберга. — *Ю. Ш.-К*). Это положение за недостатком мес я оставляю без доказательства, которое можно найти в статье Шреди гера» [9].

Однако выполненный нами анализ этого доказательства показ (см. п. 6), что в его основе содержится ошибка «логического круга делающая вывод неэффективным. Дело в том, что в качестве исходн посылки Шредингер использовал законы Грассмана, сформулированн с привлечением понятий сложения цветов и умножения цвета на пост янные числа.

Все же легко доказать, что законность введения операций сложен цветов и умножения цветов на постоянные числа не получит строго обоснования до тех пор, пока не будет доказана справедливость моде в виде формул (2), (3).

Действительно, законность введения операций сложения цвет и умножения цвета на постоянные числа может быть обоснована толь в том случае, если под цветом понимать вектор $\overline{B}$, компоненты B_1, B B_3 которого линейно зависят от излучений $b(\lambda)$, т. е., иными словам определяются формулами (2), поскольку других линейных зависимост не существует [10]. Однако вектор $\overline{B}$ может рассматриваться в качест характеристики цвета лишь в том случае, если одинаковым вектора $\overline{B}$ соответствуют одинаковые цвета, а одинаковым цветам соответству одинаковые векторы B. Таким образом, мы приходим к необходимос использования формулы (3).

Следовательно, для строгого обоснования законности введения оп раций сложения цветов и умножения цвета на постоянные числа нео ходимо прежде признать справедливой модель цветового зрения в ви формул (2) и (3).

Поэтому при выводе модели цветового зрения в виде формул и (3) мы не имеем права пользоваться законами Грассмана, сформул рованными с привлечением понятий сложения цветов и умножения цве на постоянные числа.

Однако сказанное вовсе не исключает из законов Грассмана вы кания модели цветового зрения в виде формул (2) и (3). Такое утверж ние справедливо лишь при возможности сформулировать эти законы б привлечения понятий сложения цветов и умножения цвета на посто ные числа.

Однако, как будет показано ниже, такая формулировка зако Грассмана возможна. Мы также докажем, что из этой новой форму ровки законов Грассмана логически вытекает модель цветового зрен в виде формул (2) и (3).

2. Новая формулировка законов Грассмана

Выше было показано, что использование понятий сложения цве и умножения цвета на постоянные числа в неявной форме опирается гипотетическую модель цветового зрения в виде формул (2) и (3). С довательно, и законы Грассмана, сформулированные с использовани тех же понятий, зависят от этой гипотезы. Но в таком случае могут законы Грассмана, опирающиеся на гипотезу, называться законами?

Для того, чтобы восстановить законы Грассмана в своих правах, необходимо сформулировать их без привлечения понятий сложения цветов и умножения цвета на постоянные числа.

Приступая к решению этой задачи, мы будем пользоваться лишь операциями сложения излучений и умножения излучения на постоянные числа. Законность введения этих операций основана на хорошо изученных свойствах света и не зависит от каких-либо гипотез относительно вида преобразования сигналов в органе зрения.

Пусть имеются два поля сравнения, причем на одном из них сформировано излучение $b_1(\lambda)$, а на другом $b_2(\lambda)$. Вследствие предъявления этих зрительных картин в органе зрения возникают зрительные ощущения, характеризующиеся соответственно цветами $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$. Для характеристики условий такого опыта удобно ввести функцию $\beta(\lambda)$, равную разности спектров излучений первого и второго полей сравнения,

$$\beta(\lambda) = b_1(\lambda) - b_2(\lambda). \tag{4}$$

Этой функции мы не приписываем никакого физического смысла. Она вводится лишь затем, чтобы с ее помощью изящнее и короче сформулировать законы Грассмана.

Заметим, что каждой функции $\beta(\lambda)$ соответствует не одна, а бесчисленное множество пар излучений вида $b_1(\lambda) + \beta_0(\lambda)$, $b_2(\lambda) + \beta_0(\lambda)$, где $\beta_0(\lambda)$ — произвольная функция длины волны. Таким образом, прибавляя или вычитая (когда это возможно) на полях сравнения одинаковые излучения, мы не меняем значения функции $\beta(\lambda)$. Из-за полной равноправности полей сравнения перемена местами излучений соответствует, по существу, одному и тому же опыту. Так что, если для пары излучений $b_1(\lambda)$, $b_2(\lambda)$ наблюдается равенство цветов полей сравнения, то это равенство будет также наблюдаться и для пары излучений $b_2(\lambda)$, $b_1(\lambda)$.

Сформулируем теперь закон аддитивности:

Если в двух опытах с условиями, характеризуемыми функциями $\beta_1(\lambda)$ *и* $\beta_2(\lambda)$, *наблюдается равенство цветов полей сравнения, то во всевозможных опытах с условиями, характеризуемыми функцией* $\beta_1(\lambda) + \beta_2(\lambda)$, *также будет наблюдаться равенство цветов полей сравнения.*

В новой редакции закон аддитивности может быть продемонстрирован на следующем опыте. Берем две произвольные пары излучений $b_1'(\lambda)$, $b_2'(\lambda)$ и $b_1''(\lambda)$, $b_2''(\lambda)$, цвета которых попарно одинаковы (цвет излучения $b_1'(\lambda)$ совпадает с цветом излучения $b_2'(\lambda)$, а цвет излучения $b_1''(\lambda)$ совпадает с цветом излучения $b_2''(\lambda)$). Определяем для этих пар излучений функции, характеризующие условия опытов: $\beta'(\lambda) = b_1'(\lambda) - b_2'(\lambda)$, $\beta''(\lambda) = b_1''(\lambda) - b_2''(\lambda)$, а также суммарную функцию $\beta(\lambda) = \beta'(\lambda) + \beta''(\lambda)$. Затем берем произвольную пару излучений $b_1(\lambda)$, $b_2(\lambda)$, разность которых дает функцию $\beta(\lambda)$, т. е. $b_1(\lambda) - b_2(\lambda) = \beta(\lambda)$, и убеждаемся на опыте, что для этих излучений также наблюдается равенство цветов полей сравнения.

Следствием закона аддитивности является тот факт, что одинаковые излучения порождают одинаковые цвета. Действительно, пусть на поля сравнения поданы излучения $b'(\lambda)$ и $b''(\lambda)$, для которых наблюдается равенство цветов полей сравнения. Характеристикой условий этого опыта является функция $\beta_1(\lambda)$, равная $\beta_1(\lambda) = b'(\lambda) - b''(\lambda)$. Поменяем излучения местами. Как отмечалось выше, в силу равноправности полей сравнения по-прежнему будет наблюдаться равенство цветов. Характеристикой условий этого опыта служит функция $\beta_2(\lambda)$, равная $\beta_2(\lambda) = b''(\lambda) - b'(\lambda)$.

Согласно закону аддитивности, равенство цветов полей сравнения будет наблюдаться также для всевозможных опытов, характеризуемых функцией $\beta_1(\lambda) + \beta_2(\lambda) = [b'(\lambda) - b''(\lambda)] + [b''(\lambda) - b'(\lambda)] = 0$. Этой фу ции соответствуют всевозможные пары равных излучений. Следователь одинаковые излучения порождают одинаковые цвета.

Это следствие весьма важно в методологическом отношении. Т как одинаковым излучениям, т. е. входным сигналам, соответству одинаковые цвета, т. е. выходные сигналы органа зрения, то между ни существует причинная связь. Этим обосновывается правомерность пос новки задачи моделирования стационарных и однородных зрительн процессов.

Предположим, что на полях сравнения сформированы излучен цвета которых одинаковы. Из закона аддитивности следует, что доб ление или вычитание на этих полях одинаковых излучений в результ снова дает равенство цветов. Именно это обстоятельство делает естеств ным введение функций $\beta(\lambda)$, определяемых равенством (4), для харак ристики условий опыта.

Сформулируем теперь закон трехмерности:

Наличие тройки фиксированных функций $\beta_1(\lambda)$, $\beta_2(\lambda)$, $\beta_3(\lambda)$ *обна живает для любой функции* $\beta(\lambda)$ *тройку чисел* u_1, u_2, u_3, *примене которых в опытах с условиями, характеризуемыми функцией*

$$u_1\beta_1(\lambda) + u_2\beta_2(\lambda) + u_3\beta_3(\lambda) + \beta(\lambda),$$

определяет равенство цветов полей сравнения.

Закон трехмерности можно продемонстрировать на опыте следую образом. Пусть даны три пары специально подобранных излуче $b_1'(\lambda)$, $b_1''(\lambda)$; $b_2'(\lambda)$, $b_2''(\lambda)$; $b_3'(\lambda)$, $b_3''(\lambda)$, разности которых обозначим че $\beta_1(\lambda)$, $\beta_2(\lambda)$, $\beta_3(\lambda)$, т. е. $\beta_1(\lambda) = b_1'(\lambda) - b_1''(\lambda)$; $\beta_2(\lambda) = b_2'(\lambda) - b_2''$ $\beta_3(\lambda) = b_3'(\lambda) - b_3''(\lambda)$. Согласно закону трехмерности, такие три п излучений всегда могут быть найдены. Пусть, кроме того, дана про вольная пара излучений $b'(\lambda)$, $b''(\lambda)$, разность которых обозначим че $\beta(\lambda)$, т. е. $\beta(\lambda) = b'(\lambda) - b''(\lambda)$. Подадим на поля сравнения излуче $b'(\lambda)$ и $b''(\lambda)$.

Будем теперь добиваться достижения равенства цветов полей ср нения. С этой целью разрешается одновременно прибавлять излуче каждой из трех пар на соответствующие поля сравнения, причем в лю порядке и с умножением на любые равные положительные числа. Кр того, разрешается прибавлять или вычитать (когда это возможно) полях сравнения любые равные излучения. Опыты убеждают в посто ной возможности подбора на полях сравнения таких линейных ком наций излучений, которые обеспечивают равенство цветов полей сра ния. Такому подбору соответствует функция (5), определяемая как ность полученных излучений на полях сравнения.

Опыты свидетельствуют, что при достижении равенства цветов по сравнения в функции разности излучений полей сравнения для та опыта неизменно получаются одни и те же коэффициенты U_1, U_2,

Закон непрерывности сформулируем следующим образом: *Непре ному изменению функции* $\beta(\lambda)$ *соответствует непрерывное изменение ч* U_1, U_2, U_3.

Непрерывность функции $\beta(\lambda)$ понимается в смысле метрики простр ства L суммируемых функций [11]. Имеются в виду числа U_1, U_2, существование и единственность которых постулируется вторым закон

Демонстрация закона трехмерности осуществляется следующим о зом. Берем такие две произвольные пары излучений $b_1'(\lambda)$, $b_1''(\lambda)$ и b_2' $b_2''(\lambda)$, при которых соответствующие им функции разности излуче $\beta_1(\lambda) = b_1'(\lambda) - b_1''(\lambda)$ и $\beta_2(\lambda) = b_2'(\lambda) - b_2''(\lambda)$ близки в смысле метр пространства L. Это значит, что расстояние σ между этими функциями, определяемое формулой $\sigma = \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} |\beta_1(\lambda) - \beta_2(\lambda)| \, d\lambda$, достаточно мало. На опыте убеждаемся, что соответствующие числа $U_1' - U_1''$, $U_2' - U_2''$, $U_3' - U_3''$ всегда оказываются довольно близкими к нулю.

При сравнении новой и прежней формулировок законов Грассмана замечаем, что в нынешней формулировке совершенно не участвуют операции сложения и умножения цвета на постоянные числа. Утверждается лишь равенство или неравенство цветов между собой. Сознание наблюдателя используется при этом лишь как нуль-прибор, фиксирующий равенство или неравенство цветов двух зрительных ощущений.

Стандартные колориметрические опыты фактически выполняются в точности по той процедуре, которая необходима для демонстрации справедливости законов Грассмана в новой формулировке, поскольку в этих опытах операциям сложения и умножения на постоянные коэффициенты подвергаются именно излучения, а не цвета. Цвета же подвергаются единственной операции, состоящей в установлении их равенства или неравенства [12].

Наконец, отказ от использования операций сложения цветов и умножения цвета на постоянные числа приводит к более громоздкой формулировке законов. Однако новая формулировка законов Грассмана в отличие от прежней свободна от каких-либо гипотез.

3. Вывод модели из законов Грассмана

Приступим теперь к выводу математической модели цветового зрения в виде формул (2) и (3) из законов Грассмана в новой формулировке.

Прежде всего докажем, что совокупность функций $\beta(\lambda)$, являющихся разностью спектров пар всевозможных излучений, образует линейное нормированное пространство $L[\lambda_1\lambda_2]$ суммируемых функций [13].

Для этого выполняются следующие три условия: 1) для любой функции $\beta(\lambda)$ может быть введена операция умножения на произвольное вещественное число; 2) допускается внедрение операции сложения двух любых функций $\beta_1(\lambda)$ и $\beta_2(\lambda)$; 3) любой функции $\beta(\lambda)$ может быть поставлено в соответствие конечное число $\|\beta\|$ — норма этой функции, определяемое равенством

$$\|\beta\| = \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} |\beta(\lambda)| \, d\lambda \tag{6}$$

и удовлетворяющее аксиомам нормы [14].

Возьмем произвольную функцию $\beta(\lambda)$, которую можно представить как разность спектров $b'(\lambda)$ и $b''(\lambda)$ некоторой пары излучений

$$\beta(\lambda) = b'(\lambda) - b''(\lambda). \tag{7}$$

Образуем функцию $m\beta(\lambda)$, где m — любое неотрицательное число. Эту функцию также можно представить в виде разности спектров пары излучений. В качестве таковых можно использовать излучения со спектрами $mb'(\lambda)$ и $mb''(\lambda)$.

Действительно,

$$mb'(\lambda) - mb''(\lambda) = m[b'(\lambda) - b''(\lambda)] = m\beta(\lambda). \tag{8}$$

Пусть теперь m — любое отрицательное число. Функцию $m\beta(\lambda)$ также можно представить в виде разности спектров двух излучений, за которые можно принять $-mb''(\lambda)$ и $-mb'(\lambda)$. Действительно,

$$-mb''(\lambda) - [-mb'(\lambda)] = m[b'(\lambda) - b''(\lambda)] = m\beta(\lambda). \tag{9}$$

3*

Таким образом, если функцию $\beta(\lambda)$ можно представить в виде ности спектров пары излучений, то подобным же образом представ и функцию $m\beta(\lambda)$, где m — любое вещественное число. Следовател первое условие выполняется.

Пусть имеются две функции $\beta_1(\lambda)$ и $\beta_2(\lambda)$, представленные в разности спектров пар излучений $b_1'(\lambda)$, $b_1''(\lambda)$ и $b_2'(\lambda)$, $b_2''(\lambda)$:

$$\beta_1(\lambda) = b_1'(\lambda) - b_1''(\lambda),$$

$$\beta_2(\lambda) = b_2'(\lambda) - b_2''(\lambda).$$

Сумму этих функций $\beta_1(\lambda) + \beta_2(\lambda)$ также возможно предста в виде разности спектров пары излучений, за которые принима спектры излучений $b_1'\lambda + b_2'(\lambda)$ и $b_1''(\lambda) + b_2''(\lambda)$.

Действительно,

$$b_1'(\lambda) + b_2'(\lambda) - \left[b_1''(\lambda) + b_2''(\lambda)\right] = b_1'(\lambda) - b_1''(\lambda) + \left[b_2'(\lambda) + \right.$$
$$\left. + b_2''(\lambda)\right] = \beta_1(\lambda) + \beta_2(\lambda).$$

Таким образом, если функции $\beta_1(\lambda)$ и $\beta_2(\lambda)$ представлены в виде ности спектров пар излучений, то и их сумму $\beta_1(\lambda) + \beta_2(\lambda)$ можно п ставить тем же образом. Следовательно, второе условие также вы няется.

Пусть имеется функция $\beta(\lambda)$, представленная в виде (7). Н этой функции, определяемая по формуле (6), равна

$$\|\beta\| = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} |b'(\lambda) - b''(\lambda)|\, d\lambda \leqslant \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} |b'(\lambda)|\, d\lambda + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} |b'(\lambda)\, d\lambda.$$

Интегралы $\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b'(\lambda)\, d\lambda$ и $\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b''(\lambda)\, d\lambda$ представляют собой в некото масштабе энергию излучений со спектрами $b'(\lambda)$ и $b''(\lambda)$ и, след тельно, всегда имеют конечные значения. Таким образом,

$$\|\beta\| < \infty.$$

Кроме того, выполняются все аксиомы нормы. Действительно, для бой функции $\beta(\lambda)$ имеем: 1) $\|\beta\| \geqslant 0$, причем $\|\beta\| = 0$, если $\beta(\lambda) =$ смысле метрики L; 2) $\|m\beta\| = |m| \cdot \|\beta\|$; 3) аксиома треуголь $\|\beta_1 + \beta_2\| \leqslant \|\beta_1\| + \|\beta_2\|$ следует из неравенства Минковского для и ралов [15].

Этим доказано выполнение третьего условия.

Итак, мы доказали, что совокупность функций $\beta(\lambda)$ образует л ное нормированное пространство $L[\lambda_1\lambda_2]$ суммируемых функций.

Докажем теперь, что числа U_1, U_2, U_3, введенные законом мерности, суть линейные непрерывные функционалы функций $\beta(\lambda)$. этого достаточно доказать [15], что функционалы $U_1 = U_1[\beta(\lambda)]$, $= U_2[\beta(\lambda)]$ и $U_3 = U_3[\beta(\lambda)]$ аддитивны и непрерывны.

Пусть $\beta(\lambda)$ есть сумма функций $\beta'(\lambda)$ и $\beta''(\lambda)$:

$$\beta(\lambda) = \beta'(\lambda) + \beta''(\lambda).$$

Согласно закону трехмерности, функции $\beta(\lambda)$ соответствует т тройка чисел $U_1[\beta(\lambda)]$, $U_2[\beta(\lambda)]$, $U_3[\beta(\lambda)]$, при которых в опытах с виями, характеризуемыми функцией

$$U_1[\beta(\lambda)] \cdot \beta_1(\lambda) + U_2[\beta(\lambda)]\, \beta_2(\lambda) + U_3[\beta(\lambda)]\, \beta_3(\lambda) + \beta(\lambda),$$

наблюдается равенство цветов полей сравнения.

С другой стороны, согласно закону трехмерности, функциям $\beta'(\lambda)$ и $\beta''(\lambda)$ также соответствуют свои тройки чисел $U_1[\beta'(\lambda)]$,

$$U_2[\beta'(\lambda)],\ U_3[\beta'[(\lambda)]\ \text{и}\ U_1[\beta''(\lambda)],\ U_2[\beta''(\lambda)],\ U_3[\beta''(\lambda)],$$

при которых в опытах с условиями, характеризуемыми функциями

$$U_1[\beta'(\lambda)]\,\beta_1(\lambda) + U_2[\beta'(\lambda)]\,\beta_2(\lambda) + U_3[\beta'(\lambda)]\,\beta_3(\lambda) + \beta'(\lambda) \tag{17}$$

$$U_1[\beta''(\lambda)]\,\beta_1(\lambda) + U_2[\beta''(\lambda)]\,\beta_2(\lambda) + U_3[\beta''(\lambda)]\,\beta_3(\lambda) + \beta''(\lambda), \tag{18}$$

аблюдается равенство цветов полей сравнения.

Образуем сумму функций (17) и (18)

$$\{U_1[\beta'(\lambda)] + U_1[\beta''(\lambda)]\}\,\beta_1(\lambda) + \{U_2[\beta'(\lambda)] + U_2[\beta''(\lambda)]\}\,\beta_2(\lambda) + \\ + \{U_3[\beta'(\lambda)] + U_3[\beta''(\lambda)]\}\,\beta_3(\lambda) + b'(\lambda) + b''(\lambda). \tag{19}$$

Согласно закону аддитивности, в опытах с условиями, характеризуемыми функцией (19), имеет место равенство цветов полей сравнения.

В выражениях (16) и (19) функции $\beta(\lambda)$ и $\beta'(\lambda) + \beta''(\lambda)$, согласно 15), совпадают. Следовательно, согласно закону трехмерности, в этих ыражениях совпадают коэффициенты при функциях $\beta_1(\lambda)$, $\beta_2(\lambda)$, $\beta_3(\lambda)$, . е.

$$\begin{aligned} U_1[\beta(\lambda)] &= U_1[\beta'(\lambda)] + U_1[\beta''(\lambda)], \\ U_2[\beta(\lambda)] &= U_2[\beta'(\lambda)] + U_2[\beta''(\lambda)], \\ U_3[\beta(\lambda)] &= U_3[\beta'(\lambda)] + U_3[\beta''(\lambda)]. \end{aligned} \tag{20}$$

Заменяя $\beta(\lambda)$, согласно равенству (15), окончательно получим

$$\begin{aligned} U_1[\beta'(\lambda) + \beta''(\lambda)] &= U_1[\beta'(\lambda)] + U_1[\beta''(\lambda)], \\ U_2[\beta'(\lambda) + \beta''(\lambda)] &= U_2[\beta'(\lambda)] + U_2[\beta''(\lambda)], \\ U_3[\beta'(\lambda) + \beta''(\lambda)] &= U_3[\beta'(\lambda)] + U_3[\beta''(\lambda)]. \end{aligned} \tag{21}$$

Равенства (21) означают, что функционалы $U_1[\beta(\lambda)]$, $U_2[\beta(\lambda)]$, $_3[\beta(\lambda)]$ аддитивны.

Непрерывность этих функционалов непосредственно вытекает из кона непрерывности.

Таким образом, числа U_1, U_2, U_3 — линейные непрерывные функционалы, определенные на линейном нормированном пространстве $L[\lambda_1, \lambda_2]$ ммируемых функций $\beta(\lambda)$.

При этих условиях, согласно теореме об общем виде линейного нкционала [10], функционалы U_1, U_2, U_3 могут иметь лишь следущий вид:

$$U_1 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \beta(\lambda)\,m(\lambda)\,d\lambda,\quad U_2 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \beta(\lambda)\,n(\lambda)\,d\lambda,\quad U_3 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \beta(\lambda)\,p(\lambda)\,d\lambda, \tag{22}$$

е $m(\lambda)$, $n(\lambda)$, $p(\lambda)$ — некоторые фиксированные функции.

угих видов линейных непрерывных функционалов, определенных на нейном нормированном пространстве $L[\lambda_1\lambda_2]$ суммируемых функций), не существует.

Можно показать, что функции $m(\lambda)$, $n(\lambda)$, $p(\lambda)$ линейно независимы. йствительно, в случае их линейной зависимости одну из них (пусть будет, к примеру, функция $p(\lambda)$) возможно выразить в виде линей й комбинации остальных

$$p(\lambda) = a_1 m(\lambda) + a_2 n(\lambda), \tag{23}$$

е a_1, a_2 — некоторые фиксированные вещественные числа.

Подставляя (23) в последнее из равенств (22), имеем

$$U_3 = a_1 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \beta(\lambda)\, m(\lambda)\, d\lambda + a_2 \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \beta(\lambda)\, n(\lambda)\, d\lambda.$$

Используя первые два из равенств (22), перепишем (24) в виде

$$U_3 = a_1 U_1 + a_2 U_2.$$

Таким образом, для любой функции $\beta(\lambda)$ число U_3 однозначно оп деляется числами U_1 и U_2 по формуле (25). Если, к примеру, $U_1 = U_2 = 0$, то должно быть также $U_3 = 0$. Однако это не так, поскол для функции $\beta_3(\lambda)$ $U_1 = U_2 = 0$, но $U_3 = -1$, и этот набор чис согласно закону трехмерности, является единственным.

Итак, мы пришли к противоречию. Следовательно, функции m $n(\lambda)$, $p(\lambda)$ линейно независимы.

Введем теперь в рассмотрение вектор $\bar{B}$ с компонентами B_1, B_2, определяемыми для произвольного излучения с помощью формул (2

Можно доказать, что вектор связан взаимно-однозначной зави мостью (3) с вектором цвета $\bar{S}$ по формуле (3).

Для доказательства этого утверждения нужно установить, что, первых, излучения, имеющие одинаковые значения интегралов (2), пор дают одинаковые цвета; во-вторых, излучения, порождающие одинако цвета, имеют одинаковые значения интегралов (2).

Докажем справедливость первого утверждения. Возьмем для э пару излучений $b'(\lambda)$ и $b''(\lambda)$, имеющих одинаковые значения инте лов (2),

$$B'_1 = B''_1,$$
$$B'_2 = B''_2,$$
$$B'_3 = B''_3,$$

где

$$B'_1 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b'(\lambda)\, m(\lambda)\, d\lambda,$$

$$B'_2 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b'(\lambda)\, n(\lambda)\, d\lambda,$$

$$B'_3 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b'(\lambda)\, p(\lambda)\, d\lambda;$$

$$B''_1 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b''(\lambda)\, m(\lambda)\, d\lambda,$$

$$B''_2 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b''(\lambda)\, n(\lambda)\, d\lambda,$$

$$B''_3 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b''(\lambda)\, p(\lambda)\, d\lambda.$$

Введем в рассмотрение функцию $\beta(\lambda) = b'(\lambda) - b''(\lambda)$ и опреде для нее значения интегралов (22):

$$U_1 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \beta(\lambda)\, m(\lambda)\, d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} [b'(\lambda) - b''(\lambda)]\, m(\lambda)\, d\lambda,$$

$$U_2 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b(\lambda)\, n(\lambda)\, d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} [b'(\lambda) - b''(\lambda)]\, n(\lambda)\, d\lambda,$$

$$U_3 = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \beta(\lambda) p(\lambda) d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} [b'(\lambda) - b''(\lambda)] p(\lambda) d\lambda.$$

Используя формулы (26) — (28), получаем:

$$\begin{aligned} U_1 &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b'(\lambda) m(\lambda) d\lambda - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b''(\lambda) m(\lambda) d\lambda = B_1' - B_1'' = 0, \\ U_2 &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b'(\lambda) n(\lambda) d\lambda - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b''(\lambda) n(\lambda) d\lambda = B_2' - B_2'' = 0, \\ U_3 &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b'(\lambda) p(\lambda) d\lambda - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b''(\lambda) p(\lambda) d\lambda = B_3' - B_3'' = 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Таким образом, для функции $\beta(\lambda) = b'(\lambda) - b''(\lambda)$ числа U_1, U_2, U_3 равны нулю.

Согласно закону трехмерности, для любой пары излучений, соответствующей функции $\beta(\lambda)$, имеет место равенство цветов полей сравнения. Одной из таких пар являются излучения $b'(\lambda)$ и $b''(\lambda)$; следовательно, им также свойственно равенство цветов полей сравнения.

Итак, мы приходим к выводу, что излучения, имеющие одинаковые значения интегралов (2), порождают одинаковые цвета.

Докажем теперь справедливость второго утверждения. Пусть излучения $b'(\lambda)$ и $b''(\lambda)$ вызывают одинаковые цвета. Тогда для функции $\beta(\lambda) = b'(\lambda) - b''(\lambda)$ имеет место равенство цветов полей сравнения. Следовательно, согласно закону трехмерности, для этой функции значения интегралов (22) U_1, U_2, U_3 равны нулю:

$$\begin{aligned} U_1 &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \beta(\lambda) m(\lambda) d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} [b'(\lambda) - b''(\lambda)] m(\lambda) d\lambda = 0, \\ U_2 &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \beta(\lambda) n(\lambda) d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} [b'(\lambda) - b''(\lambda)] n(\lambda) d\lambda = 0, \\ U_3 &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \beta(\lambda) p(\lambda) d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} [b'(\lambda) - b''(\lambda)] p(\lambda) d\lambda = 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b'(\lambda) m(\lambda) d\lambda &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b''(\lambda) m(\lambda) d\lambda, \\ \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b'(\lambda) n(\lambda) d\lambda &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b''(\lambda) n(\lambda) d\lambda, \\ \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b'(\lambda) p(\lambda) d\lambda &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b''(\lambda) p(\lambda) d\lambda. \end{aligned} \tag{32}$$

Учитывая зависимости (27) и (28), приходим к выводу, что

$$\begin{aligned} B_1' &= B_1'', \\ B_2' &= B_2'', \\ B_3' &= B_3''. \end{aligned} \tag{33}$$

Следовательно, излучения, порождающие одинаковые цвета, имеют и одинаковые значения интегралов (2).

Итак, доказано, что вектор $\overline{B}$ связан взаимно-однозначной зависимостью (3) с вектором цвета $\overline{S}$.

Таким образом, из закона Грассмана логически вытекает матем тическая модель цветового зрения в виде формул (2) и (3).

Только теперь, используя формулы (2) и (3), можно рассматрива вектор $\overline{B}$ как вектор цвета без привлечения каких-либо гипотез и об нованно ввести понятия сложения цветов и умножения цвета на пос янные числа, составляющие основу колориметрии.

Утверждение о трехмерности вектора цвета $\overline{S}$ вытекает как ло ческое следствие из факта трехмерности вектора $\overline{B}$ и наличия взаим однозначной зависимости (3) вектора $\overline{S}$ от вектора $\overline{B}$.

4. Вывод законов Грассмана из модели

В предыдущем параграфе мы доказали, что из законов Грассма чисто логически можно вывести математическую модель цветового з ния в виде формул (2) и (3). На вопросы, можно ли из законов Гр смана вывести нечто большее, чем модель, и не заключена ли в н какая-либо дополнительная информация, не нашедшая еще отражен в модели, ответили отрицательно. Законы Грассмана, с одной сторон и математическая модель цветового зрения в виде формул (2) и (с другой, — равносильные утверждения. Математическая модель цве вого зрения в виде формул (2) и (3) — лишь иная формулировка закон Грассмана.

Для доказательства этого утверждения, достаточно вывести зако Грассмана в виде логического следствия из математической модели ц тового зрения в виде формул (2) и (3).

Выведем сначала из формул (2) и (3) закон аддитивности.

Предположим, что две пары излучений со спектрами $b_1'(\lambda)$, b_2' и $b_1''(\lambda)$, $b_2''(\lambda)$ вызывают на выходе модели попарно одинаковые сигна S_1', S_2' и S_1'', S_2'', т. е., что

$$S_1' = S_2',$$
$$S_1'' = S_2''.$$

Попарно разности спектров излучений обозначим через $\beta'(\lambda)$ и β''

$$\beta'(\lambda) = b_1'(\lambda) - b_2'(\lambda),$$
$$\beta''(\lambda) = b_1''(\lambda) - b_2''(\lambda).$$

Образуем функцию $\beta(\lambda)$, равную сумме функций $\beta'(\lambda)$ и $\beta''(\lambda)$:

$$\beta(\lambda) = \beta'(\lambda) + \beta''(\lambda).$$

Требуется доказать, что любая пара излучений со спектрами b_1 и $b_2(\lambda)$, разность которых дает функцию

$$\beta(\lambda) = b_1(\lambda) - b_2(\lambda),$$

порождает на выходе модели два одинаковых сигнала $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$, т. $\overline{S}_1 = \overline{S}_2$.

Для доказательства этого утверждения ввиду наличия взаимно-од значной зависимости (3) достаточно показать, что совпадают векто $\overline{B}_1$ и $\overline{B}_2$, соответствующие сигналам $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$, т. е. что $\overline{B}_1 = \overline{B}_2$.

Обозначим компоненты векторов $\overline{B}_1$ и $\overline{B}_2$ соответственно через B B_{12}, B_{13} и B_{21}, B_{22}, B_{23}.

Совпадение векторов $\overline{B}_1$ и $\overline{B}_2$ будет доказано, если мы установим, что

$$\begin{aligned} B_{11} - B_{21} &= 0, \\ B_{12} - B_{22} &= 0, \\ B_{13} - B_{23} &= 0. \end{aligned} \tag{38}$$

Приступим к доказательству справедливости равенств (38). Согласно формулам (2), имеем

$$\begin{aligned} B_{11} - B_{21} &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} [b_1(\lambda) - b_2(\lambda)]\, m(\lambda)\, d\lambda, \\ B_{12} - B_{22} &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} [b_1(\lambda) - b_2(\lambda)]\, n(\lambda)\, d\lambda, \\ B_{13} - B_{23} &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} [b_1(\lambda) - b_2(\lambda)]\, p(\lambda)\, d\lambda. \end{aligned} \tag{39}$$

Заменяя в (39) разность $b_1(\lambda) - b_2(\lambda)$, по формулам (35) — (37) получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} B_{11} - B_{21} &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[b_1'(\lambda) - b_2'(\lambda)\right] m(\lambda)\, d\lambda + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[b_1''(\lambda) - b_2''(\lambda)\right] m(\lambda)\, d\lambda, \\ B_{12} - B_{22} &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[b_1'(\lambda) - b_2'(\lambda)\right] n(\lambda)\, d\lambda + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[b_1''(\lambda) - b_2''(\lambda)\right] n(\lambda)\, d\lambda, \\ B_{13} - B_{23} &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[b_1'(\lambda) - b_2'(\lambda)\right] p(\lambda)\, d\lambda + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[b_1''(\lambda) - b_2''(\lambda)\right] p(\lambda)\, d\lambda. \end{aligned} \tag{40}$$

Все интегралы, стоящие в правой части формул (40), равны нулю, поскольку по условию (34) излучения $b_1'(\lambda)$, $b_2'(\lambda)$ и $b_1''(\lambda)$, $b_2''(\lambda)$ дают попарно одинаковые цвета, а это значит, что и интегралы (2) от них попарно одинаковы. Этим доказывается справедливость формул (38). Вывод закона аддитивности из формул (2) и (3) сделан.

Переходим к выводу закона трехмерности из формул (2) и (3).

В качестве тройки фиксированных функций примем функции $m(\lambda)$, $n(\lambda)$, $p(\lambda)$.

Нам нужно доказать, что для произвольной функции всегда можно построить функцию

$$U_1 m(\lambda) + U_2 n(\lambda) + U_3 p(\lambda) + \beta(\lambda) \tag{41}$$

с единственно возможным набором чисел U_1, U_2, U_3, при которой для любой пары излучений со спектрами $b_1(\lambda)$, $b_2(\lambda)$, разность которых равна функции (41)

$$b_1(\lambda) - b_2(\lambda) = U_1 m(\lambda) + U_2 n(\lambda) + U_3 p(\lambda) + \beta(\lambda), \tag{42}$$

будут совпадать порождаемые этими излучениями выходные сигналы модели $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$.

Для доказательства этого утверждения сначала установим, что для каждой функции $\beta(\lambda)$ возможность совпадения выходных сигналов модели $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ достигается лишь при единственном наборе чисел U_1, U_2, U_3.

Действительно, пусть выходные сигналы модели $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ совпадают. Это равносильно попарным равенствам координат B_{11}, B_{12}, B_{13} и B_{21},

B_{22}, B_{23}, соответствующих векторов $\bar{B}_1$ и $\bar{B}_2$, которые ввиду (2) можно записать в виде следующих условий:

$$
\begin{aligned}
B_{11}-B_{21} &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\left[b_1(\lambda)-b_2(\lambda)\right] m(\lambda)\,d\lambda = 0,\\
B_{12}-B_{22} &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\left[b_1(\lambda)-b_2(\lambda)\right] n(\lambda)\,d\lambda = 0, \qquad (43)\\
B_{13}-B_{23} &= \int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\left[b_1(\lambda)-b_2(\lambda)\right] p(\lambda)\,d\lambda = 0.
\end{aligned}
$$

После подстановки по формуле (42) равенства (43) примут вид:

$$
\begin{aligned}
&U_1\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} m(\lambda)\,m(\lambda)\,d\lambda + U_2\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} n(\lambda)\,m(\lambda)\,d\lambda + U_3\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} p(\lambda)\,m(\lambda)\,d\lambda = \\
&\qquad = -\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\beta(\lambda)\,m(\lambda)\,d\lambda,\\
&U_1\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} m(\lambda)\,n(\lambda)\,d\lambda + U_2\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} n(\lambda)\,n(\lambda)\,d\lambda + U_3\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} p(\lambda)\,n(\lambda)\,d\lambda = \\
&\qquad = -\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\beta(\lambda)\,n(\lambda)\,d\lambda, \qquad (44)\\
&U_1\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} m(\lambda)\,p(\lambda)\,d\lambda + U_2\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} n(\lambda)\,p(\lambda)\,d\lambda + U_3\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} p(\lambda)\,p(\lambda)\,d\lambda = \\
&\qquad = -\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\beta(\lambda)\,p(\lambda)\,d\lambda.
\end{aligned}
$$

В силу линейной независимости функций $m(\lambda)$, $n(\lambda)$, $p(\lambda)$ составленный из них определитель Грама [16]

$$
D = \begin{vmatrix}
\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} m(\lambda)\,m(\lambda)\,d\lambda & \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} n(\lambda)\,m(\lambda)\,d\lambda & \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} p(\lambda)\,m(\lambda)\,d\lambda\\
\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} m(\lambda)\,n(\lambda)\,d\lambda & \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} n(\lambda)\,n(\lambda)\,d\lambda & \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} p(\lambda)\,n(\lambda)\,d\lambda\\
\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} m(\lambda)\,p(\lambda)\,d\lambda & \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} n(\lambda)\,p(\lambda)\,d\lambda & \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} p(\lambda)\,p(\lambda)\,d\lambda
\end{vmatrix}, \qquad (45)
$$

не равен нулю [17]. В то же время этот определитель совпадает с определителем системы трех линейных уравнений (44) относительно неизвестных U_1, U_2, U_3. Следовательно, для каждой функции $\beta(\lambda)$ решение системы (44) существует, и оно единственно.

Итак, если совпадение выходных сигналов модели $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$ возможно, то оно достигается лишь при единственном наборе чисел U_1, U_2, U_3.

Докажем теперь, что при наборе чисел U_1, U_2, U_3, представляющем собой решение системы уравнений (44), действительно наблюдается совпадение выходных сигналов модели $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$.

С этой целью введем в рассмотрение следующие определители:

$$
D_1 = \begin{vmatrix}
-\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\beta(\lambda)\,m(\lambda)\,d\lambda & \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} n(\lambda)\,m(\lambda)\,d\lambda & \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} p(\lambda)\,m(\lambda)\,d\lambda\\
-\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\beta(\lambda)\,n(\lambda)\,d\lambda & \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} n(\lambda)\,n(\lambda)\,d\lambda & \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} p(\lambda)\,n(\lambda)\,d\lambda\\
-\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\beta(\lambda)\,p(\lambda)\,d\lambda & \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} n(\lambda)\,p(\lambda)\,d\lambda & \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} p(\lambda)\,p(\lambda)\,d\lambda
\end{vmatrix}, \qquad (46)
$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} m(\lambda)\, m(\lambda)\, d\lambda & -\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \beta(\lambda)\, m(\lambda)\, d\lambda & \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} p(\lambda)\, m(\lambda)\, d\lambda \\ \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} m(\lambda)\, n(\lambda)\, d\lambda & -\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \beta(\lambda)\, n(\lambda)\, d\lambda & \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} p(\lambda)\, n(\lambda)\, d\lambda \\ \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} m(\lambda)\, p(\lambda)\, d\lambda & -\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \beta(\lambda)\, p(\lambda)\, d\lambda & \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} p(\lambda)\, p(\lambda)\, d\lambda \end{vmatrix}, \tag{47}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} m(\lambda)\, m(\lambda)\, d\lambda & \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} n(\lambda)\, m(\lambda)\, d\lambda & -\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \beta(\lambda)\, m(\lambda)\, d\lambda \\ \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} m(\lambda)\, n(\lambda)\, d\lambda & \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} n(\lambda)\, n(\lambda)\, d\lambda & -\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \beta(\lambda)\, n(\lambda)\, d\lambda \\ \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} m(\lambda)\, p(\lambda)\, d\lambda & \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} n(\lambda)\, p(\lambda)\, d\lambda & -\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \beta(\lambda)\, p(\lambda)\, d\lambda \end{vmatrix}. \tag{48}$$

Система уравнений (44) имеет следующее решение:

$$U_1 = \frac{D_1}{D}, \quad U_2 = \frac{D_2}{D}, \quad U_3 = \frac{D_3}{D}. \tag{49}$$

Согласно (2), попарные разности соответствующих координат векторов $\overline{B}_1$ и $\overline{B}_2$ равны:

$$\begin{aligned} B_{11} - B_{21} &= \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} [b_1(\lambda) - b_2(\lambda)]\, m(\lambda)\, d\lambda, \\ B_{12} - B_{22} &= \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} [b_1(\lambda) - b_2(\lambda)]\, n(\lambda)\, d\lambda, \\ B_{13} - B_{23} &= \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} [b_1(\lambda) - b_2(\lambda)]\, p(\lambda)\, d\lambda. \end{aligned} \tag{50}$$

Производя в формулах (50) подстановку, согласно (42) и (49), получим

$$\begin{aligned} B_{11} - B_{21} &= \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[\frac{D_1}{D} m(\lambda) + \frac{D_2}{D} n(\lambda) + \frac{D_3}{D} p(\lambda) + \beta(\lambda)\right] m(\lambda)\, d\lambda, \\ B_{12} - B_{22} &= \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[\frac{D_1}{D} m(\lambda) + \frac{D_2}{D} n(\lambda) + \frac{D_3}{D} p(\lambda) + \beta(\lambda)\right] n(\lambda)\, d\lambda, \\ B_{13} - B_{23} &= \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[\frac{D_1}{D} m(\lambda) + \frac{D_2}{D} n(\lambda) + \frac{D_3}{D} p(\lambda) + \beta(\lambda)\right] p(\lambda)\, d\lambda. \end{aligned} \tag{51}$$

Непосредственное вычисление показывает, что выражения, стоящие в правой части равенств (51), равны нулю. Следовательно, соответствующие координаты векторов $\overline{B}_1$ и $\overline{B}_2$ совпадают. Поэтому совпадают и сами векторы $\overline{B}_1$ и $\overline{B}_2$. Согласно формуле (3), сигналы $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ также совпадают. Этим доказана возможность выведения закона трехмерности из формул (2) и (3), поскольку при непрерывном изменении функции $\beta(\lambda)$ постоянно преображаются значения свободных членов $-\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \beta(\lambda)\, m(\lambda)\, d\lambda$, $-\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \beta(\lambda)\, n(\lambda)\, d\lambda$, $-\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \beta(\lambda)\, p(\lambda)\, d\lambda$ системы (44). Вместе с ними непрерывно изменяется решение системы (44) — числа U_1, U_2, U_3.

Итак, мы доказали возможность выведения законов Грассмана из формул (2) и (3), т. е. из математической модели цветового зрения. Вместе с тем в предыдущем параграфе указывалось на возможность выведения модели из законов Грассмана. Следовательно, модель цветового зрения в виде формул (2) и (3) и законы Грассмана являются равносильными утверждениями.

5. Обобщение модели цветового зрения для случая произвольных зрительных картин

Важно подчеркнуть, что математическая модель цветового зрения в виде формул (2) и (3) определена и применяется пока для весьма узкого класса входных сигналов: стационарных и однородных зрительных картин $b(\lambda)$. Сохранение в модели тех же самых преобразований в виде интегралов (2) при допущении произвольных входных сигналов $b_\lambda(x, y, t)$, изменяющихся как в поле зрения, так и во времени, возможно с учетом постулата *1*: *Зрительное ощущение $\overline{S}(x, y, t)$ останется тем же, если в порождающей его зрительной картине $b_\lambda(x, y, t)$ произвольным образом произвести замену излучений на любые метамерные излучения.*

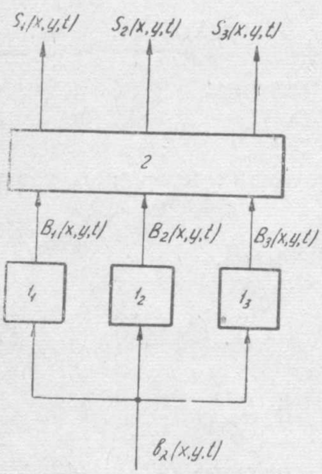

Рис. 2. Блок-схема общей модели зрения.

Под метамерными [18] понимаются излучения, для которых одинаковы числа B_1, B_2, B_3, вычисляемые по формулам (2).

В формулировке этого постулата использована высказанная профессором Н. Д. Нюбергом идея о замещении метамерных излучений [19].

При экспериментальной проверке этого постулата сознание наблюдателя используется как нуль-прибор.

Однако теперь происходит сравнение не двух трехмерных векторов, а объектов неизмеримо более сложной природы: двух вектор-функций трех независимых переменных $\overline{B}_1(x, y, t)$ и $\overline{B}_2(x, y, t)$.

Справедливость этого постулата в психофизическом эксперименте не опровергается данными опытов, но в то же время нет специальных исследований по его проверке.

В некоторых частных случаях справедливость сформулированного принципа не вызывает сомнений. Так, при временной скачкообразной замене излучения $b'_\lambda(x, y)$ на метамерное излучение $b''_\lambda(x, y)$ сознание не замечает каких-либо временных изменений в зрительном ощущении [20, 21]. Сознание наблюдателя также не обнаруживает границы раздела между двумя метамерными излучениями.

Из сформулированного принципа непосредственно вытекает модель преобразования информации в органе зрения в виде блок-схемы, изображенной на рис. 2.

Математическое описание модели следующее:

Блок 1_1

$$B_1(x, y, t) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_\lambda(x, y, t)\, m(\lambda)\, d\lambda,$$

Блок 1_2

$$B_2(x, y, t) = \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_\lambda(x, y, t)\, n(\lambda)\, d\lambda, \tag{52}$$

Блок 1_3

$$B_3(x, y, t) = \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_\lambda(x, y, t)\, p(\lambda)\, d\lambda,$$

где $B_1(x, y, t)$, $B_2(x, y, t)$, $B_3(x, y, t)$ — компоненты вектор-функции, $\overline{B}(x, y, t)$ — промежуточного сигнала модели.

Блок 2:

$$\overline{S}(x, y, t) = F\left[\overline{B}(x, y, t)\right], \tag{53}$$

где F — произвольный однозначный оператор;

$\overline{S}(x, y, t)$ — вектор-функция зрительного ощущения с компонентами $S_1(x, y, t)$, $S_2(x, y, t)$, $S_3(x, y, t)$.

Оператор F нельзя считать взаимно-однозначным, ибо в противном случае любая замена излучений в зрительной картине, кроме той, которая предусмотрена постулатом *1*, приводила бы к изменению зрительного ощущения. Заменяя стационарное излучение специально подобранной парой неметамерных, довольно быстро мелькающих излучений, можно получить то же самое зрительное ощущение. Такой же эффект получается при замещающем неметамерном излучении в виде серии достаточно густых полос (временной и пространственный законы Талбота [22]).

Постулат *1* можно дополнить постулатом *2*, обеспечивающим непрерывность оператора F: *При непрерывном изменении функций* $B_1(x, y, t)$, $B_2(x, y, t)$, $B_3(x, y, t)$, *определяемых формулами (52), всегда происходит непрерывное изменение соответствующего зрительного ощущения* $\overline{S}(x, y, t)$.

Возможность экспериментальной проверки этого постулата определяется способностью сознания оценивать величину расстояния между двумя вектор-функциями трех переменных $S_1(x, y, t)$ и $S_2(x, y, t)$, т. е. степень различия между двумя зрительными ощущениями.

Подтверждение правильности постулата на примере простых зрительных картин предполагает его справедливость также и в общем виде. С учетом постулата *2* можно оператор F считать непрерывным.

6. Критика вывода интегральных соотношений цвета, сделанного Шредингером из законов Грассмана

Шредингер формулирует закон аддитивности в следующем виде: *Одинаково выглядящие излучения дают при сложении снова одинаково выглядящие излучения* [8].

Вслед за этим Шредингер пишет: «Этот факт — и только он — позволяет нам ... оперировать непосредственно с цветами вместо того, чтобы оперировать с излучениями».

Затем Шредингер вводит обозначения для цветов и знак «+» для операции сложения цветов, считая, очевидно, что он имеет для этого все основания.

Однако легко доказуемо, что из закона аддитивности еще не вытекает факт существования операции сложения цветов.

Сущность только что приведенной формулировки закона аддитивности состоит в следующем.

Пусть имеются две пары излучений $b_1'(\lambda)$, $b_1''(\lambda)$ и $b_2'(\lambda)$, $b_2''(\lambda)$, цвет которых попарно одинаковы, т. е.

$$\overline{S}\left[b_1'(\lambda)\right] = \overline{S}\left[b_1''(\lambda)\right],$$
$$\overline{S}\left[b_2'(\lambda)\right] = \overline{S}\left[b_2''(\lambda)\right]. \tag{54}$$

Согласно закону аддитивности, цвета суммарных излучений $b_1'(\lambda) + b_2'(\lambda)$, $b_1''(\lambda) + b_2''(\lambda)$ будут также одинаковы:

$$\overline{S}\left[b_1'(\lambda) + b_2'(\lambda)\right] = \overline{S}\left[b_1''(\lambda) + b_2''(\lambda)\right]. \tag{55}$$

Для строгого же введения операции сложения цветов необходим аддитивность цвета, выражаемая равенством

$$\overline{S}\left[b_1(\lambda) + b_2(\lambda)\right] = \overline{S}\left[b_1(\lambda)\right] + \overline{S}\left[b_2(\lambda)\right]. \tag{56}$$

В формуле (56) $b_1(\lambda)$, $b_2(\lambda)$ обозначают два произвольных излучени

Очевидно, что закон аддитивности, с одной стороны, и свойст аддитивности цвета (56), с другой, — представляют собой различны утверждения.

Приведем образец преобразования излучения в цвет, в котором зако аддитивности будет выполняться, а свойство аддитивности цвета — не

Допустим, что координаты S_1, S_2, S_3 вектора цвета вычисляют по формулам

$$S_1[b(\lambda)] = \left[\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b(\lambda)\, m(\lambda)\, d\lambda\right]^3,$$
$$S_2[b(\lambda)] = \left[\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b(\lambda)\, n(\lambda)\, d\lambda\right]^3, \tag{57}$$
$$S_3[b(\lambda)] = \left[\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b(\lambda)\, p(\lambda)\, d\lambda\right]^3,$$

где $b(\lambda)$ — излучение, порождающее цвет $\overline{S}$.

Принятое преобразование излучения в цвет удовлетворяет закон аддитивности. Действительно, равенства (54) в нашем случае запишут в виде

$$\left[\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_1'(\lambda)\, m(\lambda)\, d\lambda\right]^3 = \left[\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_1''(\lambda)\, m(\lambda)\, d\lambda\right]^3,$$
$$\left[\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_1'(\lambda)\, n(\lambda)\, d\lambda\right]^3 = \left[\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_1''(\lambda)\, n(\lambda)\, d\lambda\right]^3,$$
$$\left[\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_1'(\lambda)\, p(\lambda)\, d\lambda\right]^3 = \left[\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_1''(\lambda)\, p(\lambda)\, d\lambda\right]^3;$$
$$\left[\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_2'(\lambda)\, m(\lambda)\, d\lambda\right]^3 = \left[\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_2''(\lambda)\, m(\lambda)\, d\lambda\right]^3,$$
$$\left[\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_2'(\lambda)\, n(\lambda)\, d\lambda\right]^3 = \left[\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_2''(\lambda)\, n(\lambda)\, d\lambda\right]^3,$$
$$\left[\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_2'(\lambda)\, p(\lambda)\, d\lambda\right]^3 = \left[\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_2''(\lambda)\, p(\lambda)\, d\lambda\right]^3.$$

Извлекая кубический корень из обеих частей каждого из равенств (58) и (59), получаем

$$\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} b'_1(\lambda)\, m(\lambda)\, d\lambda = \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} b''_1(\lambda)\, m(\lambda)\, d\lambda,$$

$$\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} b'_1(\lambda)\, n(\lambda)\, d\lambda = \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} b''_1(\lambda)\, n(\lambda)\, d\lambda, \qquad (60)$$

$$\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} b'_1(\lambda)\, p(\lambda)\, d\lambda = \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} b''_1(\lambda)\, p(\lambda)\, d\lambda;$$

$$\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} b'_2(\lambda)\, m(\lambda)\, d\lambda = \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} b''_2(\lambda)\, m(\lambda)\, d\lambda,$$

$$\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} b'_2(\lambda)\, n(\lambda)\, d\lambda = \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} b''_2(\lambda)\, n(\lambda)\, d\lambda, \qquad (61)$$

$$\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} b'_2(\lambda)\, p(\lambda)\, d\lambda = \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} b''_2(\lambda)\, p(\lambda)\, d\lambda.$$

Складываем левые и правые части соответствующих равенств (61) и (62):

$$\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[b'_1(\lambda) + b'_2(\lambda)\right] m(\lambda)\, d\lambda = \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[b''_1(\lambda) + b''_2(\lambda)\right] m(\lambda)\, d\lambda,$$

$$\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[b'_1(\lambda) + b'_2(\lambda)\right] n(\lambda)\, d\lambda = \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[b''_1(\lambda) + b''_2(\lambda)\right] n(\lambda)\, d\lambda, \qquad (62)$$

$$\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[b'_1(\lambda) + b'_2(\lambda)\right] p(\lambda)\, d\lambda = \int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[b''_1(\lambda) + b''_2(\lambda)\right] p(\lambda)\, d\lambda.$$

Наконец, возводим в куб левые и правые части полученных равенств:

$$\left\{\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[b'_1(\lambda) + b'_2(\lambda)\right] m(\lambda)\, d\lambda\right\}^3 = \left\{\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[b''_1(\lambda) + b''_2(\lambda)\right] m(\lambda)\, d\lambda\right\}^3,$$

$$\left\{\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[b'_1(\lambda) + b'_2(\lambda)\right] n(\lambda)\, d\lambda\right\}^3 = \left\{\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[b''_1(\lambda) + b''_2(\lambda)\right] n(\lambda)\, d\lambda\right\}^3, \qquad (63)$$

$$\left\{\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[b'_1(\lambda) + b'_2(\lambda)\right] p(\lambda)\, d\lambda\right\}^3 = \left\{\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[b''_1(\lambda) + b''_2(\lambda)\right] p(\lambda)\, d\lambda\right\}^3.$$

Учитывая (57), имеем λ_1

$$S_1\left[b'_1(\lambda) + b'_2(\lambda)\right] = S_1\left[b''_1(\lambda) + b''_2(\lambda)\right],$$

$$S_2\left[b'_1(\lambda) + b'_2(\lambda)\right] = S_2\left[b''_1(\lambda) + b''_2(\lambda)\right], \qquad (64)$$

$$S_3\left[b'_1(\lambda) + b'_2(\lambda)\right] = S_3\left[b''_1(\lambda) + b''_2(\lambda)\right].$$

Таким образом, приходим к выводу о справедливости равенства (55). Закон аддитивности для построенного примера выполняется.

Проверим теперь, выполняется ли для преобразования (57) свойство (56) аддитивности цвета. Если бы формула (56) была справедлива, то были бы справедливы и равенства

$$\left\{\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left[b_1(\lambda) + b_2(\lambda)\right] m(\lambda)\, d\lambda\right\}^3 = \left[\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_1(\lambda)\, m(\lambda)\, d\lambda\right]^3 + \left[\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_2(\lambda)\, m(\lambda)\, d\lambda\right]^3,$$

$$\left\{\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} [b_1(\lambda) + b_2(\lambda)]\, n(\lambda)\, d\lambda\right\}^3 = \left[\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_1(\lambda)\, n(\lambda)\, d\lambda\right]^3 + \left[\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_2(\lambda)\, n(\lambda)\, d\lambda\right]^3, \quad (65)$$

$$\left\{\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} [b_1(\lambda) + b_2(\lambda)]\, p(\lambda)\, d\lambda\right\}^3 = \left[\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_1(\lambda)\, p(\lambda)\, d\lambda\right]^3 + \left[\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} b_2(\lambda)\, p(\lambda)\, d\lambda\right]^3$$

при любых $b_1(\lambda)$ и $b_2(\lambda)$. Однако это равенство не наблюдается. Таким образом, свойство (56) аддитивности цвета для преобразования (57) не выполняется, а значит, из закона аддитивности не вытекает свойство аддитивности цвета. Следовательно, закон аддитивности не является достаточным основанием для введения операции сложения цветов.

Далее Шредингер, используя введенную им операцию сложения цветов, формулирует закон трехмерности: *Имеется линейно независимая тройка цветов. Четыре цвета всегда линейно зависимы.*

Опираясь на эту формулировку, Шредингер обосновывает необходимость интегральных соотношений (2) для вычисления координат цвета.

Таким образом, вывод интегральных соотношений цвета из законов Грассмана, сделанный Шредингером, спорен, поскольку в его основе лежит операция сложения цветов, введенная без достаточного основания.

7. К вопросу о формулировке законов Грассмана

Грассман [7] так сформулировал свои законы.

Закон трехмерности: *Для любого излучения можно подобрать одинаково выглядящую смесь белого излучения с некоторым чистым спектральным или же пурпурным излучением. Под пурпурным излучением понимается смесь крайних видимых излучений спектра.*

Закон непрерывности: *Непрерывному изменению излучения соответствует непрерывное изменение цвета.*

Закон аддитивности: *Одинаково выглядящие излучения дают при сложении одинаково выглядящие излучения.*

Легко заметить, что формулировка Грассманом закона трехмерности существенно отличается от приводимой нами.

Значительно отличается от нашей и формулировка Грассманом закона непрерывности. В то время как в формулировке Грассмана речь идет о непрерывном изменении цвета, в нашей формулировке подразумевается непрерывное изменение некоторых чисел, а не цвета.

Формулировку Грассманом закона аддитивности необходимо дополнить следующим утверждением: *Если к одинаково выглядящим излучениям добавить или вычесть (когда это возможно) равные излучения, то суммарные излучения также будут выглядеть одинаково.*

Шредингер [8], принимая без изменений формулировки Грассмана законов непрерывности и аддитивности, формулирует закон трехмерности следующим образом: *Имеется линейно независимая тройка цветов. Четыре цвета всегда линейно зависимы.*

Недостаток этой формулировки — в существенном использовании понятия линейной зависимости цветов, а следовательно, операций сложения цветов и умножения цвета на постоянные числа. Как указывалось выше (см. п. 1), это приводит к привлечению гипотетической модели цветового зрения в виде формул (2) и (3).

Шредингер, кроме трех законов Грассмана, привлекает еще один дополнительный постулат: *Не существует двух таких излучений, которые при одинаковом увеличении интенсивности периодически выглядели бы одинаковыми и неодинаковыми.*

В нашей же работе, как было показано выше, интегральные соотношения цвета (2) выводятся исключительно из трех законов Грассмана без привлечения каких-либо дополнительных постулатов.

Формулировки законов Грассмана, встречающиеся в более поздних работах, как правило, почти не отличаются от формулировок Шредингера.

Профессор Н. Д. Нюберг так формулирует закон трехмерности: *Для любых четырех цветов всегда существует связывающее их линейное соотношение, причем это соотношение будет единственным, если только три цвета из этих четырех не связаны линейными соотношениями, причем, с другой стороны, можно найти бесчисленное множество троек цветов, которые никаким линейным соотношением не связаны* [23].

В другой работе [24] профессор Н. Д. Нюберг формулирует закон трехмерности следующим образом: *Для любых четырех цветов (три известных, один неизвестный) всегда можно составить одно и только одно цветовое уравнение одного из указанных выше типов, связывающее четыре данных цвета.*

В этой же работе мы находим формулировку закона аддитивности: *Результат сложения двух или нескольких цветов зависит только от того, каковы эти цвета, но совершенно не зависит от того, из каких спектральных лучей составлен цвет, вызывающий тот или иной из складываемых цветов.*

Профессор Н. Д. Нюберг так формулирует закон аддитивности: *Если какие-либо два излучения визуально неразличимы, то после прибавления к обоим любого одинакового излучения полученные новые суммарные излучения также будут визуально неразличимы* [25].

В книге профессора М. М. Гуревича [26] находим следующую формулировку всех трех законов Грассмана:

закон трехмерности: *Любые четыре цвета находятся в линейной зависимости, хотя существует неограниченное число линейно независимых совокупностей из трех цветов.*

закон непрерывности: *Непрерывному изменению излучения соответствует также непрерывное изменение цвета.*

закон аддитивности: *Цвет смеси зависит только от цвета смешиваемых компонент и не зависит от их спектральных составов.*

Наконец, приведем формулировку Н. Д. Нюбергом всех трех законов Грассмана:

закон аддитивности: *Цвет суммы двух излучений зависит только от цветов складываемых излучений, но не от их спектрального состава.*

закон трехмерности: *Всякие четыре цвета линейно связаны, не существуют тройки линейно независимых цветов.*

закон непрерывности: *При любом непрерывном изменении излучения цвет изменяется непрерывно.*

Нетрудно заметить, что эти формулировки воспроизводят в точности или с небольшими изменениями формулировки, использованные Шредингером.

В заключение упомянем еще одну формулировку закона аддитивности Шейбнером, которая также отличается от нашей: *В результате аддитивного смешения излучений в психофизиологической преобразующей системе возникают классы метамерных излучений или цвета. Эти классы являются подмножествами общего множества излучений, для которых справедливы законы тождества, симметрии и транзитивности* [27].

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Ньютон. Оптика, изд. 2-е. Гостехтеоретиздат, 1954.

2. М. В. Ломоносов. Слово о происхождении света, новую теорию о цветах представляющее. Избранные философские произведения. Госполитиздат, 1950.

3. T. Young. Lecture on the theory of light and colours, Phil. Trans. Roy. Soc. V. 21, 1802.
4. J. C. Maxwell. On the theory of compound colours and the relation of the colours of the spectrum. Proc. Roy. Soc. vob. 10, 1860.
5. H. Helmholtz. Handbuch der physiologischen Optik. Hamburg u. Leipzig 1909—1911.
6. В. В. Мешков. Основы светотехники, ч. 2. Физиологическая оптика и колориметрия. Госэнергоиздат, 1961.
7. H. Grassmann. Zur Theorie der Farbenmischung. Ann. d. Phys. u. Chemie Bd. 89, № 5, 1853.
8. E. Schrödinger. Grundlinien einer Theorie der Farbenmetric im Tagessehen Ann. d. Phys., Bd. 63, 1920.
9. Н. Д. Нюберг. Математические основы задачи измерения цвета. В кн. «Современное состояние колориметрии». Гостехтеоретиздат, 1933.
10. Г. Е. Шилов, Б. Л. Гуревич. Интеграл, мера и производная. Изд-во «Наука», 1967.
11. И. П. Натансон. Теория функций вещественной переменной. Гостехтеоретиздат, 1957.
12. С. О. Майзель, Е. С. Ратнер. Цветовые расчеты и измерения. Госэнергоиздат, 1941.
13. С. Г. Михлин. Прямые методы в математической физике. Гостехтеоретиздат, 1950.
14. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах. Физматгиз, 1959.
15. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. Элементы функционального анализа. Изд-во «Наука», 1965.
16. Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц, изд. 2-е. Физматгиз, 1966.
17. М. М. Гельфандт. Лекции по линейной алгебре. Гостехтеоретиздат, 19
18. Н. Д. Нюберг. Теоретические основы цветной репродукции. Изд-во «Сов. наука», 1947.
19. Н. Д. Нюберг. Грассмана законы. В кн. «Физический энциклопедический словарь», т. 1. Изд-во «Сов. энциклопедия», 1960.
20. М. М. Бонгард, М. С. Смирнов. Четырехмерность цветового пространства человека. Докл. АН СССР, т. 108, № 3, 1956.
21. Л. Фридрих. Об участии палочкового зрения в работе светлоадаптированного глаза человека. «Биофизика», т. 2, вып. 3, 1957.
22. H. F. Talbot. Experiments on light. Phil. Mag., № 5, 1834.
23. Н. Д. Нюберг. Измерение цвета и цветовые стандарты. Изд-во «Стандартизация», 1933.
24. Н. Д. Нюберг. Курс цветоведения. Гизлегпром, 1932.
25. Н. Д. Нюберг. Колориметрические эксперименты как средство исследования цветового зрения и требования к ним. «Биофизика», т. 2, вып. 2, 1957.
26. М. М. Гуревич. Цвет и его измерение. Изд-во АН СССР, 1950.
27. H. Scheibner. On colours of the same appearance. «Optica acta», № 3, 1966.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТАТИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ ВИБРАЦИЙ В ВИБРАЦИОННОЕ ОЩУЩЕНИЕ

Г. Ф. Дюбко, В. В. Тищенко

Многочисленными исследованиями доказывается степень зависимости ощущения от интенсивности вибраций для зрительного и слухового анализатора.

С целью проверки этого положения для вибрационного анализатора, т. е. степенного закона для вибрационной чувствительности кожи, предположим, что вибрационный анализатор производит преобразование раздражающих его стимулов по тем же законам, что зрительный и слуховой анализаторы.

Как следует из [1—3], входная информация подвергается преобразованию в соответствии с уравнениями

$$V = c\lg dJ,$$