УДК 519.6

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ПРОЦЕСІВ ПЕРЕМІШУВАННЯ У БАГАТОЗВ'ЯЗНИХ ОБЛАСТЯХ

Ганна Стаднікова, Поліна Артюх, Максим Сидоров

Харківський національний університет радіоелектроніки

hanna.stadnikova@nure.ua

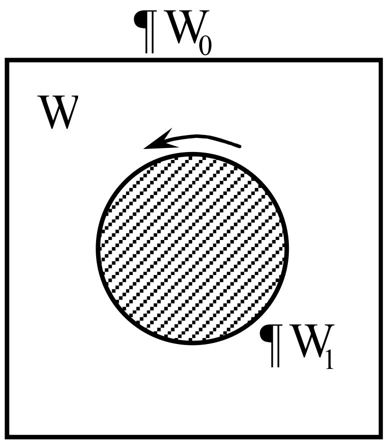
Розглядається задача математичного моделювання нестаціонарних процесів перемішування у плоскій двозв'язній області. Для її чисельного аналізу запропоновано метод, заснований на сумісному використанні принципу суперпозиції та методів R-функцій і Гальоркіна.

Вступ

Однією з актуальних наукових проблем є кінематика перемішування в'язкої рідини при різних умовах їх повільного руху. Результати вивчення механізмів перемішування і керування ним активно застосовується у різних областях науки і техніки: хімічній та харчовій промисловості, геології, океанології тощо [1]. Тому інтерес до математичного моделювання в цій області постійно зростає.

Постановка задачі

Розглянемо нестаціонарну задачу перемішування в'язкої нестисливої рідини в двозв'язній області $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (мал. 1) з кусочно-гладкою межею. Вважатимемо, що ділянки межі $\partial\Omega_0$ нерухомі, а коло, що знаходиться всередині області і має межу $\partial\Omega_1$, рухається проти годинникової стрілки з кутовою швидкістю $\tau(t)$. Припустимо, що в початковий момент часу рідина знаходиться у стані спокою ($\tau(0) = 0$).



Мал. 1. Область Ω

Математичною моделлю задачі перемішування є система диференціальних рівнянь Нав'є-Стокса, яка складається з рівнянь руху для вектору швидкості $\mathbf{v}=(v_x,v_y)$ і тиску p та рівняння неперервності [2]:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\Delta v_x, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\Delta v_y, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0, \qquad (3)$$

де ν – коефіцієнт в'язкості рідини, Δ – оператор Лапласа, t – час.

Введемо функцію течії $\psi=\psi(x,y,t)$, яка пов'язана з вектором $\mathbf{v}=(v_x,v_y)$ швидкостей рідини за допомогою співвідношень

$$v_x=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v_y=-\frac{\partial\psi}{\partial x}. \qquad (4)$$

Використовуючи функцію течії ψ, заданою співвідношеннями (4), система рівнянь Нав'є-Стокса (1) – (3) зводиться до одного нелінійного диференціального рівняння:

$$\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y}=\nu\Delta^2\psi \text{ в } \Omega,\quad t>0. \qquad (5)$$

Відомо, що для повільної течії відношення порядку конвекційних сил інерції до порядку сил в'язкості невелике і нелінійним доданком у рівнянні (5) можна знехтувати. Тоді отримаємо лінеаризоване за Стоксом рівняння в'язкої нестисливої рідини:

$$\frac{\partial}{\partial t}(-\Delta\psi) + \nu\Delta^2\psi = 0 \text{ в } \Omega, \quad t > 0. \qquad (6)$$

Початкові та крайові умови для функції течії можуть бути отримані з відповідних умов, які накладаються на вектор швидкості $\mathbf{v}$. Враховуючи припущення, наведені вище, крайові та початкові умови запишуться так:

$$\psi\big|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad \psi\big|_{\partial\Omega_1} = c(t), \quad \left.\frac{\partial\psi_0}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_1} = \tau(t), \quad \psi\big|_{t=0} = 0, \qquad (7)$$

де $c(t)$ - деяка невідома функція часу, $\tau(t)$ – кутова швидкість $\partial\Omega_0$.

Метод розв'язання

Відповідно до принципу суперпозиції, функцію $\psi = \psi(x, y, t)$ шукатимемо в наступному вигляді:

$$\psi = \psi_0 + c(t)\psi_1, \qquad (8)$$

де $\psi_0 = \psi_0(x, y, t)$, $\psi_1 = \psi_1(x, y, t)$ – нові невідомі функції.

Для знаходження ψ_0 і ψ_1 необхідно розв'язати дві допоміжні задачі:

$$\frac{\partial}{\partial t}(-\Delta\psi_0) + \nu\Delta^2\psi_0 = 0 \text{ в } \Omega, \quad t > 0, \qquad (9)$$

$$\psi_0\big|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad \psi_0\big|_{\partial\Omega_1} = 0, \quad \left.\frac{\partial\psi_0}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial\psi_0}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_1} = \tau(t), \quad \psi_0\big|_{t=0} = 0,$$

та

$$\frac{\partial}{\partial t}(-\Delta\psi_1) + \nu\Delta^2\psi_1 = 0 \text{ в } \Omega, \quad t > 0, \qquad (10)$$

$$\psi_1\big|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad \psi_1\big|_{\partial\Omega_1} = 1, \quad \left.\frac{\partial\psi_1}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial\psi_1}{\partial\mathbf{n}}\right|_{\partial\Omega_1} = 0, \quad \psi_1\big|_{t=0} = 0.$$

Функцію $c(t)$ знайдемо з умови однозначності тиску у двозв'язній області $\oint_{\partial\Omega_1} \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy = 0$. Враховуючи, що для лінеаризованої задачі

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \nu\Delta v_x - \frac{\partial v_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \nu\Delta v_y - \frac{\partial v_y}{\partial t}$$

та беручи до уваги (4), отримаємо задачу Коші для невідомої функції $c(t)$:

$$a(t)\dot{c}(t)+b(t)c(t)+d(t)=0, \quad c(0)=0,$$

$$a(t)=\oint_{\partial\Omega_1}\left[\nu\frac{\partial\Delta\psi_0}{\partial y}-\frac{\partial^2\psi_0}{\partial t\partial y}\right]dx+\left[\frac{\partial^2\psi_0}{\partial t\partial x}-\nu\frac{\partial\Delta\psi_0}{\partial x}\right]dy,$$

$$b(t)=\oint_{\partial\Omega_1}\left[\nu\frac{\partial\Delta\psi_1}{\partial y}-\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t\partial y}\right]dx+\left[\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t\partial x}-\nu\frac{\partial\Delta\psi_1}{\partial x}\right]dy,$$

$$d(t)=\oint_{\partial\Omega_1}-\frac{\partial\psi_1}{\partial y}dx+\frac{\partial\psi_1}{\partial x}dy.$$

Кожна з задач (9), (10) може бути розв’язана за допомогою структурного методу R-функцій [3] з використанням методу Гальоркіна [4] для апроксимації невизначених компонент структур. Побудовані відповідно до методу R-функцій структури розв’язку задач (9), (10) мають вигляд

$$\psi_0=-\omega\frac{\tau(t)\omega_1}{\omega_0+\omega_1}+\omega^2\Phi_0, \quad \psi_1=\frac{\omega_0}{\omega_0+\omega_1}-\omega D_1\left(\frac{\omega_0}{\omega_0+\omega_1}\right)+\omega^2\Phi_1,$$

де ω, ω_0 і ω_1 – нормалізовані рівняння $\partial\Omega$, $\partial\Omega_0$ і $\partial\Omega_1$ відповідно, $\Phi_0(x,y,t)$ і $\Phi_1(x,y,t)$ – невизначені компоненти структури, $D_1 f=(\nabla\omega,\nabla f)$.

Для апроксимації невизначених компонент їх треба подати у вигляді

$$\Phi_0(x,y,t)=\sum_{j=1}^{N}c_j(t)\tau_j(x,y), \quad \Phi_1(x,y,t)=\sum_{j=1}^{N}d_j(t)\tau_j(x,y),$$

де $\{\tau_j\}$ – деяка повна у просторі $L_2(\Omega)$ система функцій.

Для визначення функцій $c_j(t)$ та $d_j(t)$ відповідно до методу Гальоркіна маємо задачу Коші для звичайних диференціальних рівнянь.

Знання функції течії дозволяє дослідити траєкторії руху окремих частинок рідини, розв’язуючи задачу Коші

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial\psi}{\partial y}(x,y,t), \quad \frac{dy}{dt}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,y,t), \quad x(0)=x_0, \quad y(0)=y_0.$$

Обчислювальний експеримент

Для обчислювального експерименту було обрано $\tau(t)=-1+e^{-t}$, $\omega=\omega_0\wedge_0\omega_1$, $\omega_0=\left[x(1-x)\right]\wedge_0\left[y(1-y)\right]$, $\omega_1=\frac{1}{8}\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{16}^2\right)$.

У якості координатних функцій було обрано сплайни Шенберга п'ятого порядку.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ottino J.M. The mixing of fluids / J.M. Ottino // Sci. Amer. – 1989. – Vol. 260.– № 1.– P. 56-67.
2. Ландау Л.Д. Теоретическая физика. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Физматлит, 2003. – 736 с.
3. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В.Л. Рвачев. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с.
4. Михлин С.Г. Численная реализация вариационных методов / С.Г. Михлин. – М.: Наука, 1966. – 432 с.

УДК 539.3

ОСОБЛИВОСТІ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ І НЕЛІНІЙНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ НЕКРУГОВИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

Євген Сторожук , Володимир Максимюк, Іван Чернишенко

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України

stevan@ukr.net; desc@inmech.kiev.ua

Описано особливості розроблених аналітичних, чисельних та аналітично-чисельних підходів до моделювання лінійного і нелінійного деформування циліндричних оболонок некругового поперечного перерізу.

Циліндричні оболонки некругового поперечного перерізу (еліптичного, овального, параболічного, тощо) знаходять широке застосування в сучасній інженерній практиці, наприклад, при проектуванні фюзеляжів літаків і корпусів ракет. Розв'язування крайових задач для некругових циліндричних оболонок пов'язане із значними математичними труднощами, обумовленими зміною кривизни в поперечному напрямку, а також врахуванням нелінійностей і деформацій поперечного зсуву.

Автори доповіді запропонували три підходи до розв'язання лінійних і нелінійних задач статики для циліндричних оболонок некругового поперечного перерізу, при розробці яких були враховані специфіка та особливості даних задач.