

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

(повна назва)

Кафедра прикладної математики

(повна назва)

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

Пояснювальна записка

рівень вищої освіти другий (магістерський)

Комп'ютерне моделювання нестационарних режимів по ділянці
трубопроводу великого діаметру з застосуванням модифікованого
методу Ньютона

(тема)

Виконав:

здобувач 2 року навчання, групи САУМ-23-1
Дашківський Р.Б.

(прізвище, ініціали)

Спеціальність 124 Системний аналіз

(код і повна назва спеціальності)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Системний аналіз і управління

(повна назва освітньої програми)

Керівник проф. Гусарова І.Г.

(посада, прізвище, ініціали)

Допускається до захисту

Зав. кафедри ПМ

(підпис)

Сидоров М.В.

(прізвище, ініціали)

2025 р.

Харківський національний університет радіоелектроніки

Факультет інформаційно-аналітичних технологій та менеджменту

Кафедра прикладної математики

Рівень вищої освіти другий (магістерський)

Спеціальність 124 Системний аналіз

(код і повна назва)

Тип програми освітньо-професійна

(освітньо-професійна або освітньо-наукова)

Освітня програма Системний аналіз і управління

(повна назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ:

Зав. кафедри ПМ _____

(підпис)

“ 25 ” листопада 2024 р.

ЗАВДАННЯ
НА КВАЛІФІКАЦІЙНУ РОБОТУ

здобувачеві Дашківському Роману Борисовичу
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема роботи Комп'ютерне моделювання нестационарних режимів по ділянці
трубопроводу великого діаметру з застосуванням модифікованого методу
Ньютона

затверджена наказом по університету від 22 листопада 2024 р. № 1228 Ст

2. Термін подання здобувачем роботи до екзаменаційної комісії 6 січня 2025 р.

3. Вихідні дані до роботи початково-крайова задача нестационарного режиму по
ділянці трубопроводу великого діаметру

4. Перелік питань, що потрібно опрацювати в роботі _____

1. Системний аналіз предметної області

2. Вибір і обґрунтування методу розв'язання

3. Програмна реалізація

4. Результати обчислювального експерименту

5. Аналіз можливих застосувань

5. Перелік графічного матеріалу із зазначенням креслеників, схем, плакатів, комп'ютерних ілюстрацій _____

1. Актуальність теми роботи _____

2. Постановка задачі _____

3. Системний аналіз предметної області _____

4. Метод чисельного аналізу _____

5. Результати обчислювального експерименту _____

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН

№	Назва етапів роботи	Терміни виконання етапів роботи	Примітка
1	Підбір та вивчення технічної літератури за темою роботи	25 листопада – 1 грудня 2024 р.	виконано
2	Вибір та обґрунтування методу	2 – 8 грудня 2024 р.	виконано
3	Розробка алгоритму і програми	9 – 22 грудня 2024 р.	виконано
4	Проведення аналітичних досліджень та розрахунків	23 – 29 грудня 2024 р.	виконано
5	Робота над текстом пояснювальної записки	30 грудня 2024 р. – 9 січня 2025 р.	виконано
6	Представлення роботи на рецензію в ЕК	10 січня 2025 р.	виконано

Дата видачі завдання 25 листопада 2024 р.

Здобувач _____
(підпис)

Керівник роботи _____ проф. Гусарова І.Г.
(підпис) (посада, прізвище, ініціали)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка: 76 с., 26 табл., 14 рис., 1 дод., 11 джерел.

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ, СИСТЕМА ГІПЕРБОЛІЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ, ЧАСТИННІ ПОХІДНІ, МОДИФІКОВАНИЙ МЕТОД НЬЮТОНА, МЕТОД СКІНЧЕННИХ РІЗНИЦЬ, ЕФЕКТ ДЖОУЛЯ-ТОМСОНА.

Об'єкт дослідження – нестационарний неізотермічний режим течії газу (НСНІ РТГ) по ділянці газогону (ДГГ) великого діаметру (ВД).

Мета роботи – проведення системного аналізу проблеми моделювання НСНІ РТГ по ДГГ, побудова математичної моделі об'єкту дослідження, розробка програмного продукту для розв'язання початково-крайової задачі, аналіз отриманих результатів.

Методи дослідження – методи системного аналізу, метод скінченних та модифікований метод Ньютона для розв'язання системи нелінійних рівнянь.

У межах кваліфікаційної роботи проведено системний аналіз проблеми моделювання НСНІ РТГ по ДГГ ВД. Побудовано математичну модель, яка включає в себе основні параметри газового потоку, такі як тиск, температура та витрата, та враховує вплив ефекту Джоуля-Томсона.

Розв'язання нелінійної системи алгебраїчних скінченно-різницевих рівнянь здійснювалося за допомогою модифікованого методу Ньютона. Реалізовано програмний продукт, у якому реалізовано розроблений алгоритм. Проведено чисельні експерименти, які підтвердили ефективність запропонованого підходу до моделювання НСНІ РТГ.

Отримані результати можуть бути використані для оптимізації роботи ГТС, зокрема для аналізу та прогнозування нестационарних режимів у позаштатних ситуаціях.

ABSTRACT

Introductory note: 76 pages, 26 tables, 14 figures, 1 appendix, 11 sources.

MATHEMATICAL MODEL, SYSTEM OF HYPERBOLIC DIFFERENTIAL EQUATIONS, PARTIAL DERIVATIVES, MODIFIED NEWTON'S METHOD, FINITE DIFFERENCE METHOD, JOULE-THOMSON EFFECT.

Object of research – non-stationary non-isothermal gas flow regime through a section of a large-diameter gas pipeline.

Purpose of work – to conduct a systematic analysis of the problem of modeling the non-stationary non-isothermal gas flow regime through a section of a large-diameter gas pipeline, develop a mathematical model of the object under study, create a software product for solving the initial-boundary value problem, and analyze the obtained results.

Methods of research – methods of system analysis, the finite difference method and modified Newton's method for solving a system of nonlinear equations.

As part of the qualification work, a system analysis of the problem of modeling non-stationary non-isothermal gas flow in a large-diameter gas pipeline was conducted. A mathematical model was developed, incorporating key parameters of the gas flow, such as pressure, temperature, and flow rate, while accounting for the Joule-Thomson effect.

The solution of the nonlinear system of algebraic finite difference equations was achieved using the modified Newton's method. A software product implementing the developed algorithm was created. Numerical experiments were conducted, confirming the efficiency of the proposed approach for modeling non-stationary non-isothermal gas flow.

The obtained results can be utilized to optimize the operation of gas transmission systems, particularly for analyzing and predicting non-stationary regimes in emergency situations.

ЗМІСТ

	С.
Перелік скорочень, умовних познач, одиниць і термінів	7
Вступ	8
1 Системний аналіз предметної області та постановка задач дослідження	11
1.1 Системний аналіз задачі комп'ютерного моделювання течій газу	11
1.2 Аналіз сценаріїв вирішення задачі комп'ютерного моделювання течій газу	14
1.3 Змістовна та формальна постановка задачі	15
1.4 Постановка задач дослідження	17
2 Математична модель та алгоритм розв'язання системи рівнянь	19
2.1 Математична модель нестационарних неізотермічних режимів течії газу по лінійній ділянці газогону	19
2.2 Застосування модифікованого методу Ньютона при моделюванні нестационарних режимів по ділянці газогону великого діаметру	24
2.3 Алгоритм моделювання нестационарних режимів по ділянці газогону великого діаметру зі застосуванням модифікованого методу Ньютона ..	30
Висновки за розділом 2	31
3 Програмна реалізація	32
3.1 Система комп'ютерної алгебри Mathematica 14.1	32
3.2 Опис програми	32
Висновки за розділом 3	33
4 Результати обчислювального експерименту та їх аналіз	34
Висновки за розділом 4	50
Висновки	51
Перелік джерел посилання	52
Додаток А Лістинг програми	54

ПЕРЕЛІК СКОРОЧЕНЬ, УМОВНИХ ПОЗНАК, ОДИНИЦЬ І ТЕРМІНІВ

НСНІ РТГ – нестационарний неізотермічний режим течії газу;

ДГГ – ділянка газогону;

ВД – великий діаметр;

ЛСР – лінійна система рівнянь;

РТГ – режим течії газу;

ЧШ – часовий шар;

ГТС – газотранспортна система.

ВСТУП

Актуальність теми. Сучасна газотранспортна система України зазнала суттєвих змін у зв'язку зі стратегічним рішенням про відмову транзиту газу з Росії до Європи. Це створило нові виклики й водночас перспективи для розвитку енергетичного сектору. Одним із потенційних напрямів є транспортування газу, видобутого в Україні, до європейських країн, що може сприяти зміцненню енергетичної безпеки як самої України, так і її партнерів.

У цих умовах транспортування газу через магістральні трубопроводи великої протяжності потребує не лише високої надійності та ефективності, а й адаптації до змін у попиті, особливостей географії та інфраструктурних обмежень. Одночасно з цим, збільшення обсягів транспортування газу для внутрішніх споживачів, необхідність мінімізації втрат енергії та актуальність зниження шкідливого впливу на навколишнє середовище ставлять нові виклики перед газотранспортною галуззю.

Нестабільність режимів транспортування природного газу при підключенні нових великих споживачів, пов'язана зі змінами в тиску, температурі та витраті, потребує створення математичних моделей, які дозволяють точно описувати та прогнозувати ці процеси. Математичне моделювання нестационарного неізотермічного режиму течії газу по ділянці трубопроводу великого діаметру є важливим інструментом для підвищення ефективності транспортування, особливо в умовах позаштатних ситуацій.

Швидкий розвиток обчислювальної техніки та чисельних методів відкриває нові можливості для створення точніших математичних моделей і розробки алгоритмів для розв'язання складних задач моделювання. Використання модифікованого методу Ньютона для чисельного розв'язання систем нелінійних рівнянь, що описують транспорт газу, дозволяє підвищити швидкодію та точність розрахунків.

В рамках даної роботи для побудови моделі буде використано такі параметри лінійної ДГГ ГТС:

- фізичні параметри газу (тиск, температура, відносна густина, питома теплоємність, тощо);
- фізичні характеристики трубопроводу (довжина ділянки, внутрішній діаметр, товщина стінок, коефіцієнт шорсткості);
- умови навколишнього середовища (температура ґрунту, коефіцієнт теплопередачі труби).

Окрім цього задаються наступні початкові умови процесу моделювання:

- комерційна витрата на ділянці газогону в початковий момент;
- тиск на вході ділянки газогону;
- температура газу на вході ділянки газогону;
- тривалість симуляції для аналізу перехідних процесів;
- крок часу;
- точність розрахунку.

Поставлена задача полягає в моделюванні стану потоку газу в різних точках трубопроводу та точках в часі. Важливим аспектом є облік теплових втрат, які залежать від параметрів теплопередачі та зовнішніх умов.

Для вирішення цієї задачі застосовано метод скінченних різниць та модифікований метод Ньютона для розв'язання нелінійних різницевих рівнянь. Ці методи забезпечують швидку збіжність та підвищену точність у порівнянні з класичними чисельними методами.

Актуальність теми обумовлена необхідністю вдосконалення математичних моделей і розробки ефективних програмних продуктів для оптимізації роботи газотранспортної системи України. Результати роботи можуть знайти практичне застосування у підвищенні надійності транспортування газу, мінімізації втрат енергії та забезпеченні екологічної безпеки.

Мета і завдання кваліфікаційної роботи. Метою кваліфікаційної роботи є розробка програмного додатку для моделювання нестационарних режимів течії газу по ділянці газогону великого діаметру із використанням модифікованого методу Ньютона. Для досягнення поставленої мети під час виконання кваліфікаційної роботи потрібно виконати наступні завдання:

– провести огляд і аналіз сучасного стану задачі «Комп’ютерне моделювання нестационарних режимів по ділянці трубопроводу великого діаметру з застосуванням модифікованого методу Ньютона»;

– обрати математичну модель нестационарного режиму по ділянці газогону великого діаметру;

– застосувати чисельний метод скінченних різниць для розв’язання початково-крайової задачі моделювання нестационарного режиму по ділянці газогону (ДГГ) великого діаметру (ВД) та застосувати модифікований метод Ньютона на етапі розв’язання системи нелінійних рівнянь;

– розробити алгоритм моделювання нестационарного режиму зі застосуванням модифікованого методу Ньютона;

– розробити програмний додаток для комп’ютерного моделювання нестационарних режимів для визначення параметрів течії потоку газу по ДГГ ВД;

– провести аналіз отриманих результатів щодо доцільності використання методу модифікованого методу Ньютона.

Об’єктом дослідження є нестационарний режим течії газового потоку в ділянці газогону великого діаметру.

Предметом дослідження є математична модель, чисельний метод для розв’язання рівнянь математичної моделі, який використовує модифікований метод Ньютона при розв’язанні системи нелінійних рівнянь.

Методи дослідження. У роботі використовуються методи системного аналізу, чисельного розв’язання початково-крайової задачі для системи гіперболічних диференціальних рівнянь в частинних похідних та модифікований метод Ньютона для розв’язання системи нелінійних рівнянь.

Публікації. Результати, отримані у роботі, було представлено на VII Міжнародній науково-практичній конференції «Education and science of today: intersectoral issues and development of sciences» (м. Кембридж, 18 жовтня 2024 р.) [1].

1 СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ПРЕДМЕТНОЇ ОБЛАСТІ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1 Системний аналіз задачі комп'ютерного моделювання течій газу

Розглянемо принципи системного підходу. Системний підхід визначається як напрямок наукових досліджень, які проводяться з позиції цілісності системи і для розв'язання проблем системи. Основне завдання системного підходу – це забезпечення ефективності взаємодії системи із зовнішнім середовищем або під-систем у рамках системи, що розглядається [2].

У межах системного підходу досліджуються питання взаємодії та всі шляхи можливої взаємодії і лише ті питання, які суттєві для дослідження цієї взаємодії. Системний підхід дає можливість відмовитись від повного вивчення певного об'єкта, а досліджувати його лише тією мірою, якою це суттєво для вирішення певної проблеми.

Системний підхід виконує функції об'єднувального характеру, особливо там, де не спрацьовують такі засоби наукового пошуку, як спостереження або експеримент, і дозволяє знайти зв'язок об'єктів і процесів, які здаються не пов'язаними одні з одними.

Системний підхід ґрунтується на таких принципах:

- а) єдності – вивчення системи як єдиного цілого і як сукупності частин;
- б) розвитку – врахування мінливості системи, її здатності до розвитку, накопиченню інформації з урахуванням змін у зовнішньому середовищі;
- в) глобальної мети – відповідальності за вибір глобальної мети;
- г) функціональності – спільного вивчення структури системи і функцій із пріоритетом функцій над структурою;
- д) ієрархії – врахування співвідпорядкування і ранжування частин;
- е) невизначеності – врахування ймовірнісного настання подій.

Системний підхід формує правильне уявлення про процес управління, що дозволяє застосовувати спеціальні методи. Системний підхід сприяє усуненню

зайвої ускладненості і допомагає зрозуміти суть складних проблем та приймати рішення на основі чіткого уявлення про зовнішнє середовище. При цьому важливо структурувати завдання і окреслити межі системи. Також важливо враховувати, що системи, які вивчаються, є частиною більш великих систем, наприклад, підприємство є частиною галузі чи суспільства в цілому. Крім того, ці системи постійно змінюються: вони створюються, діють, реорганізуються і навіть ліквідуються.

Системний аналіз – це сукупність методів і засобів розв’язання різних проблем, які виникають в усіх сферах цілеспрямованої діяльності суспільства, на основі системного підходу. При цьому використовуються наявні методи їх розв’язання, розроблені в рамках інших наук. Системний аналіз відіграє роль каркаса, який об’єднує всі необхідні методи, знання і дії для вирішення проблеми.

Методика системного аналізу розробляється для того, щоб організувати процес прийняття рішень у складних проблемних ситуаціях. При цьому виділяються етапи прийняття рішень і пропонуються підходи до їх виконання.

Досліджувана система – це моделювання та аналіз нестационарних режимів течії газу через ДГГ ВД з використанням модифікованого методу Ньютона. Основною метою системи є розробка математичної моделі для ефективного прогнозування поведінки газу та трубопроводу під час перехідних процесів, що дозволить оптимізувати подачу газу споживачам та забезпечити надійність його доставки в умовах змінних навантажень або аварійних ситуацій.

Методологічна основа цієї системи базується на створенні математичної моделі, що включає гіперболічні диференціальні рівняння у частинних похідних, з урахуванням початкових і граничних умов. Для розв’язання задачі використовується рівномірна скінченно-різницева сітка, яка дозволяє отримувати дані про змінні параметри потоку в різних точках ДГГ ВД. Модифікований метод Ньютона забезпечує точність розв’язання нелінійних рівнянь, які виникають у процесі розрахунків.

Макрофункція моделі полягає у забезпеченні стабільного і безперебійно-

го транспортування газу до кінцевих споживачів, незважаючи на змінні режими роботи та можливі перехідні процеси. Такий підхід дозволяє моделі адаптуватися до змінних умов, зберігаючи точність та оперативність реагування на зміни параметрів потоку.

Розглянемо цю систему як «сіру скриню», що означає наявність знань про вхідні та вихідні параметри, а також про окремі внутрішні процеси, які впливають на перехідний режим течії газу. Модель враховує вплив зовнішнього середовища, що важливо для точності прогнозів у реальних умовах. На вхід подаються дані про стаціонарний режим газу та граничні умови, а результатом моделювання є аналіз поведінки газу в динамічних умовах (рис. 1.1).

Основним виходом системи є результати моделювання, що дозволяють досліднику аналізувати та коригувати параметри для забезпечення стабільності роботи ДГГ ВД.

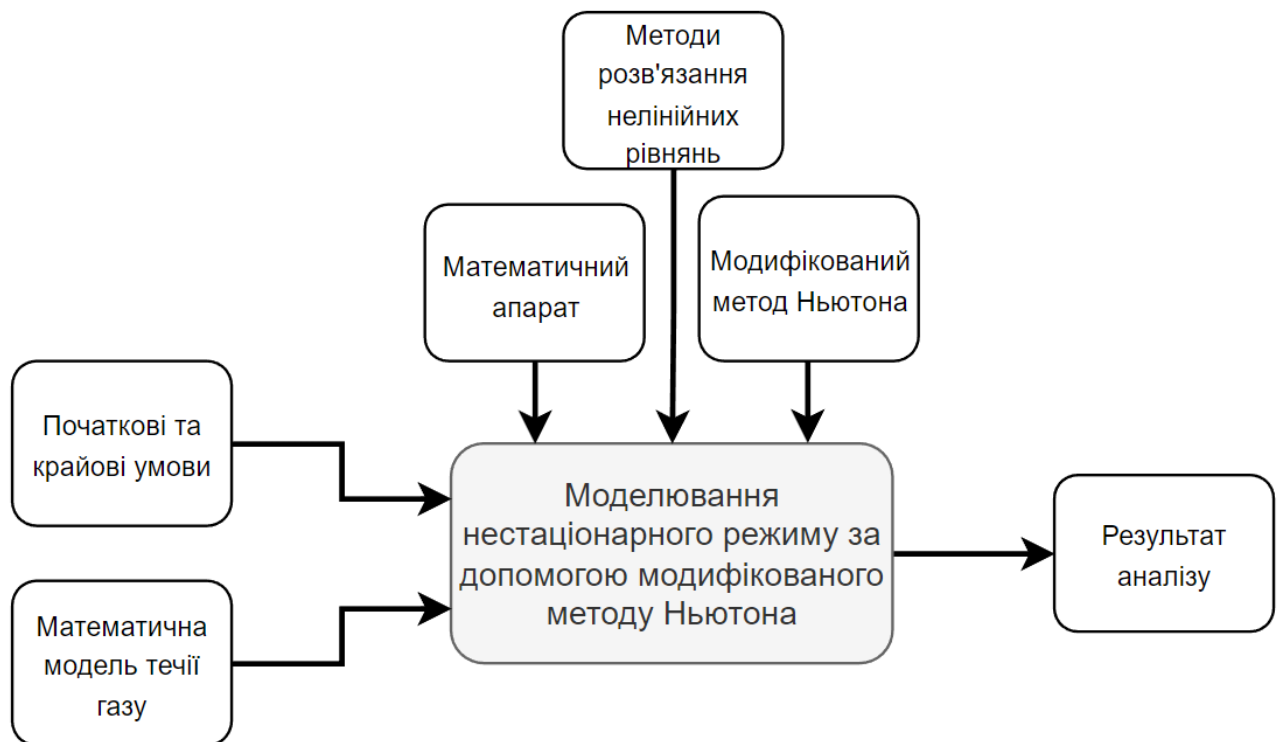


Рисунок 1.1 – «Сіра скриня» моделі досліджуваної системи

Інструменти комп'ютерного моделювання течій газу є важливими при проектуванні та від час експлуатації великих газотранспортних систем. Це до

зволяє значно заощадити тривалість розрахунків та зменшити час реагування в позаштатних ситуаціях. Вони дозволяють прогнозувати поведінку газових потоків у складних динамічних умовах, враховуючи фізичні ефекти, такі як теплообмін, зміна тиску та температури, а також ефект Джоуля-Томпсона. Завдання розробки інструменту для моделювання включає кілька ключових етапів: визначення параметрів моделі, вибір математичних методів для розв'язку систем рівнянь, що описують процеси, а також безпосередньо програмна реалізація розроблених методу та алгоритму для проведення обчислювальних експериментів.

1.2 Аналіз сценаріїв вирішення задачі комп'ютерного моделювання течій газу

При моделюванні нестационарних неізотермічних режимів течії газу по ДГГ використовується кілька підходів, кожен із яких відображає специфіку математичного опису фізичних процесів. У загальному випадку математична модель НСНІ РТГ для ДГГ представляється взаємопов'язаною системою рівнянь, що описують режими течії газу по трубопроводу. Серед основних математичних підходів можна виділити такі варіанти.

1. Системи диференціальних рівнянь у часткових похідних. Ці системи описують основні процеси, що відбуваються в трубопроводі, такі як збереження маси, енергії та імпульсу газу. Цей підхід є найбільш поширеним і застосовується для опису динамічних процесів у газопроводах у нестационарному режимі.

2. Інтегральні рівняння. Деякі моделі базуються на використанні інтегральних рівнянь для опису перехідних процесів. Цей підхід використовується рідше, однак дозволяє описати взаємодію між ділянками трубопроводу, зокрема у випадку складних умов.

3. Системи алгебраїчних рівнянь. У деяких випадках для узгодження па-

раметрів потоку газу між різними ділянками трубопроводу використовуються алгебраїчні рівняння. Вони дозволяють описати зв'язок між параметрами газового потоку, зокрема на стиках трубопроводів або на виході з компресорних станцій.

4. Змішані системи диференціальних і алгебраїчних рівнянь. Цей підхід поєднує диференціальні та алгебраїчні рівняння для моделювання умов узгодження параметрів газового потоку в точках з'єднання ділянок трубопроводу. Такі моделі дозволяють забезпечити точне відображення фізичних процесів у складних системах газопостачання.

Аналіз цих підходів демонструє, що кожен із них має свої переваги та недоліки залежно від особливостей газопровідної системи та мети моделювання. Для вирішення задачі моделювання перехідних режимів у рамках цього дослідження доцільно використовувати підхід на основі систем диференціальних рівнянь у часткових похідних, оскільки він найбільш точно відображає динаміку процесів у трубопроводі та дозволяє врахувати всі ключові фактори, такі як теплообмін, зміна тиску та температури газу. Для розв'язання цієї системи рівнянь застосовується модифікований метод Ньютона, що дозволяє забезпечити швидку збіжність і високу точність розрахунків, навіть при наявності нелінійних залежностей у моделях теплових і динамічних процесів.

1.3 Змістовна та формальна постановка задачі

Змістовна постановка задачі. Представимо ДГГ ГТС, на якій розглядається процес транспортування газу, у вигляді двох вузлів – вхідного та вихідного – та лінійної ділянки, що являє собою циліндричну трубу постійного діаметра із жорсткими стінками та сполучує ці вузли (рис. 1.2). Відбувається аварійна або нештатна ситуація, що призводить до різкої зміни параметрів течії газового потоку (температури та/або комерційної втрати та/або тиску) у вхідному та вихідному вузлах. Необхідно розробити програмний додаток, який дозволить знахо-

дити параметри течії газового потоку за найменший час для запобігання непередбачених наслідків.

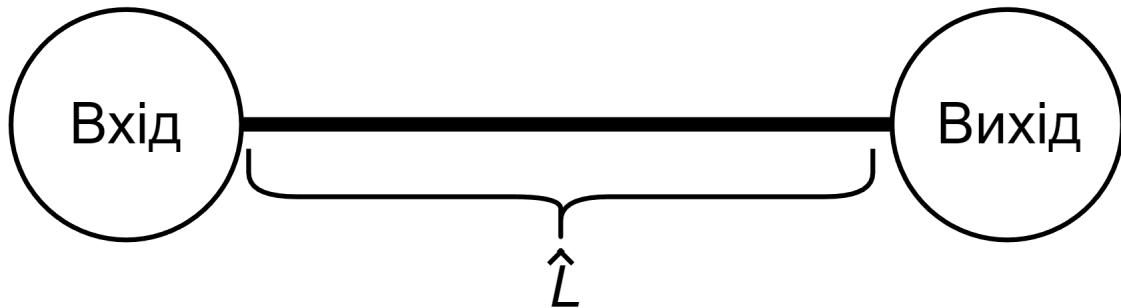


Рисунок 1.2 – Лінійна ділянка газогону

Формальна постановка задачі. Будемо розглядати ДГГ фіксованої довжини \hat{L} та постійного діаметру \hat{D} . Різка зміна параметрів течії газового потоку у вхідному та вихідному вузлах призводить до того, що режими течії стають нестационарними та неізотермічними.

Перш за все необхідно зазначити крайові умови для вхідного та вихідного вузлів ДГГ:

$$\begin{cases} P(0,t) = P_{ex}(t), \\ G(0,t) = G_{ex}(t), \\ T(0,t) = T_{ex}(t), \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} P(\hat{L},t) = P_{вих}(t), \\ G(\hat{L},t) = G_{вих}(t), \end{cases} \quad (1.2)$$

де G – масова витрата газу;

$P_{ex}(t)$, $G_{ex}(t)$, $T_{ex}(t)$, $P_{вих}(t)$, $G_{вих}(t)$ – задані функції.

В такому випадку початковий розподіл параметрів потоку газу буде виглядати наступним чином:

$$\begin{cases} W(x, 0) = W_{ex}(x), \\ P(x, 0) = P_{ex}(x), \\ T(x, 0) = T_{ex}(x), \\ x \in (0, \hat{L}), \end{cases} \quad (1.3)$$

де $W_{ex}(x)$, $P_{ex}(x)$, $T_{ex}(x)$ – задані функції.

Для коректного моделювання динамічних процесів на цій ділянці передбачається розбивка на певну кількість проміжних точок, на яких здійснюватимуться розрахунки параметрів потоку на кожному часовому кроці.

Формальна задача полягає у визначенні основних параметрів потоку (тиск, температура, масова витрата газу) на всіх проміжних точках розбиття. Це дозволяє враховувати динаміку процесів на кожній з таких точок трубопроводу в залежності від часу.

Процес моделювання описується системою диференціальних рівнянь у часткових похідних, що базуються на законах збереження маси, енергії та імпульсу. Ці рівняння описують зміну параметрів потоку вздовж лінійної ділянки в залежності від часу. Задача вирішується чисельно для заданої кількості точок розбиття по довжині ділянки та визначеного часового кроку.

1.4 Постановка задач дослідження

Об'єктом дослідження є нестационарний режим течії газового потоку в ділянці газогону великого діаметру.

Предметом дослідження є математична модель, чисельний метод для розв'язання рівнянь математичної моделі, який використовує модифікований метод Ньютона при розв'язанні системи нелінійних рівнянь.

Метою кваліфікаційної роботи є розробка програмного додатку для моделювання нестационарних режимів течії газу по ділянці газогону великого діаметру із використанням модифікованого методу Ньютона. Для досягнення поставленої мети необхідно виконати наступні завдання:

- провести огляд і аналіз сучасного стану задачі «Комп’ютерне моделювання нестационарних режимів по ділянці трубопроводу великого діаметру з застосуванням модифікованого методу Ньютона»;
- обрати математичну модель нестационарного режиму по ДГГ ВД;
- застосувати чисельний метод скінченних-різниць для розв’язання початково-крайової задачі моделювання нестационарного режиму по ДГГ ВД та застосувати модифікований метод Ньютона на етапі розв’язання системи нелінійних рівнянь;
- розробити алгоритм моделювання нестационарного режиму з застосуванням модифікованого методу Ньютона;
- розробити програмний додаток для комп’ютерного моделювання нестационарних режимів для визначення параметрів течії газового потоку по ДГГ ВД з відомими початковими та крайовими умовами;
- провести аналіз отриманих результатів щодо доцільності використання методу модифікованого методу Ньютона.

2 МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТА АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

2.1 Математична модель нестационарних неізотермічних режимів течії газу по лінійній ділянці газогону

Тому, що режими течії розглядаються на ДГГ великого діаметру, передує слід приділити увагу коефіцієнту Джоуля-Томсона, який визначається як межа співвідношення між зміною температури та зміною тиску газу:

$$D_{DT} = \lim_{\Delta P \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta T}{\Delta P} \right)_J = \left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_J. \quad (2.1)$$

Для газів за помірних умов можна прийняти рівняння газового стану:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P} \right)_H = \frac{T}{C_p} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P - \frac{V}{C_p}, \quad (2.2)$$

де C_p – теплоємність при постійному тиску;

V – питомий об'єм.

Для газів за помірних умов також можна прийняти рівняння газового стану:

$$\frac{P}{\rho} = zRT, \quad (2.3)$$

де z – теплоємність при постійному тиску;

ρ – щільність газу.

Використовуючи наведені вище співвідношення, виразимо коефіцієнт Джоуля-Томсона через параметри температури, тиску та стисливості, які легше

виміряти та застосувати на практиці

$$D_{ДГГ} = \frac{RT^2 \partial z}{PC_p \partial T}. \quad (2.4)$$

Формула для температури T_x в координаті x від початку ДГГ враховує вплив кількох факторів: початкову температуру, зміну температури через теплопередачу, а також ефект Джоуля-Томсона, та має вигляд

$$T_x = T_{гр} + (T_{вх} - T_{гр})e^{-\hat{\theta}x} - (1 - e^{-\hat{\theta}x}) \frac{P_{вх}^2 - P_x^2}{2\hat{\theta}x\bar{P}} D_{ДГГ}, \quad (2.5)$$

де T_x – температура газу в координаті x ;

$T_{гр}$ – температура ґрунту (середовище навколо трубопроводу);

$T_{вх}$ – початкова температура газу на вході ДГГ;

$\hat{\theta}$ – коефіцієнт теплопередачі між газом і навколишнім середовищем;

$P_{вх}$ – початкова тиск газу на вході ДГГ;

P_x – тиск газу в координаті x ;

\bar{P} – середній тиск газу вздовж ДГГ;

$D_{ДГГ}$ – коефіцієнт Джоуля-Томсона.

Виходячи із формули (2.5) можемо сформулювати формулу для розрахунку середнього значення температури по всій довжині ДГГ:

$$\bar{T} = T_{гр} + (T_{вх} - T_{гр}) \left(\frac{1 - e^{-\hat{\theta}\hat{L}}}{\hat{\theta}\hat{L}} \right) - \left(1 - \frac{1 - e^{-\hat{\theta}\hat{L}}}{\hat{\theta}\hat{L}} \right) \frac{P_{вх}^2 - P_{вих}^2}{2\hat{\theta}x\bar{P}} D_{ДГГ},$$

де \hat{L} – довжина ДГГ.

Для загального випадка НСНІ РТГ в такій ДГГ описуються системою ди-

ференційних рівнянь у часткових похідних, яка має наступний вигляд [3]:

$$\frac{\partial(\rho V)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(P + (1 + \beta_K) \rho V^2 \right) = -\rho \left(\frac{\lambda |V| V}{2\hat{D}} + g \frac{dh}{dx} \right), \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho V) = 0, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho V \left(E + \frac{P}{\rho} \right) \right) = \frac{4K}{\hat{D}} (T_{tp} - T) - \rho V g \frac{dh}{dx}, \quad (2.8)$$

де $\rho(x,t)$, $V(x,t)$, $T(x,t)$, $P(x,t)$ – густина, швидкість, температура та тиск газу;

x, t – просторова та часова координати;

λ – коефіцієнт гідравлічного опору;

\hat{D} – діаметр труби;

K – коефіцієнт теплопередачі від труби до ґрунту;

T_{tp} – температура ґрунту;

h – глибина залягання труби;

β_K – поправка Коріоліса на нерівномірний розподіл швидкостей в перетині;

g – прискорення вільного падіння;

E – повна енергія одиниці маси.

Щоб спростити рівняння для НСНІ РТГ, будемо нехтувати кінетичною енергією через низькі швидкості потоку та поправкою Коріоліса, оскільки швидкість потоку рівномірно розподілена по перетину. Однак, врахуємо ефект Джоуля-Томсона в рівнянні, оскільки розглядаємо труби великого діаметра.

Додамо до початкової системи рівнянь (2.6) – (2.8) рівняння стану (2.3), враховуючи припущення, представимо її в такому вигляді [3]:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \left(1 - T \hat{S} \hat{\alpha} \frac{W^2}{P^2} \right) \frac{\partial P}{\partial t} + T \hat{S} \hat{\alpha} \frac{W \partial W}{P \partial x} + \frac{\hat{\alpha} \lambda T \hat{S} |W| W}{2\hat{D}} + \frac{P g dh}{T \hat{S} \hat{\alpha} dx} = 0, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + T\hat{S}\dot{\alpha}\frac{\partial W}{\partial x} = 0, \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + \left(\frac{\dot{\gamma}\dot{\alpha}\hat{S}}{T - \dot{\gamma}PD_{DT}} \right) \left(\frac{WT^2}{P} \right) \frac{\partial T}{\partial x} + \dot{\alpha} \left(\frac{T^2\hat{S}}{P} \right) \left(\frac{\dot{\gamma}T}{T - \dot{\gamma}PD_{DT}} - 1 \right) \frac{\partial W}{\partial x} - \\ - \left(\frac{\dot{\gamma}\dot{\alpha}\hat{S}D_{DT}}{T - \dot{\gamma}PD_{DT}} \right) \left(\frac{T^2W}{P} \right) \frac{\partial P}{\partial x} + (\dot{\gamma} - 1) \left(\frac{4K}{\hat{D}} \right) \left(\frac{T^2(T - T_p)}{P(T - \dot{\gamma}PD_{DT})} \right) + \\ + \left(\frac{g(\dot{\gamma} - 1)}{T - \dot{\gamma}PD_{DT}} \right) \left(\frac{WT^2}{P} \right) \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad (2.11) \end{aligned}$$

де $\dot{\alpha} = \frac{zgR}{\hat{S}}$;

$$\dot{\gamma} = \frac{C_P}{C_P - zgR};$$

\hat{S} – площа поперечного перерізу труби;

\hat{D} – діаметр труби;

C_P – теплоємність при постійному тиску.

Для зручності аналізу систему рівнянь (2.9) – (2.11) можна записати в матричній формі, що дозволить компактно представити залежності між змінними.

У випадку, коли в рівнянні енергії (2.11) при адіабатичному дроселюванні газу враховується ефект Джоуля-Томсона, система рівнянь (2.9) – (2.11) набуває вигляду,

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \hat{B}(x, t, \chi) \frac{\partial \chi}{\partial x} = \hat{\Phi}(x, t, \chi), \quad (2.12)$$

де $\chi(x, t) = (W(x, t), P(x, t), T(x, t))$;

$$\hat{B}(x, t, \chi) = \begin{bmatrix} \frac{2\dot{\alpha}\hat{S}}{P}WT & 1 - \frac{\dot{\alpha}\hat{S}}{P^2}W^2T & 0 \\ \dot{\alpha}\hat{S}T & 0 & 0 \\ \left(\frac{T\dot{\gamma}}{T - \dot{\gamma}PD_{дт}} - 1\right)\frac{\dot{\alpha}\hat{S}T^2}{P} & -\frac{\dot{\alpha}\dot{\gamma}\hat{S}D_{дт}}{T - \dot{\gamma}PD_{дт}}\frac{W^2T}{P} & \frac{\dot{\alpha}\dot{\gamma}\hat{S}}{T - \dot{\gamma}PD_{дт}}\frac{W^2T}{P} \end{bmatrix};$$

$$\hat{\Phi}(x, t, \chi) = \begin{bmatrix} \frac{-\lambda\dot{\alpha}T\hat{S}}{2\hat{D}P}|W|W - \frac{gP}{\dot{\alpha}\hat{S}T}\frac{dh}{dx} \\ -(\dot{\gamma}-1)\frac{4K}{\hat{D}}\frac{T(T-T_p)}{P} - g(\dot{\gamma}-1)\frac{TW}{P}\frac{dh}{dx} \end{bmatrix}.$$

Щоб обрати відповідний метод розв'язання цієї системи рівнянь, спершу потрібно визначити її тип. Для цього обчислюємо корені рівняння, застосовуючи таку формулу:

$$\det(I - \vartheta\hat{B}) = 0,$$

де I – одинична матриця.

У результаті отримуємо:

$$(I - \vartheta\hat{B}) = \begin{bmatrix} 1 - \vartheta\frac{2\dot{\alpha}\hat{S}}{P}WT & -\vartheta + \frac{\vartheta\dot{\alpha}\hat{S}}{P^2}W^2T & 0 \\ -\vartheta\dot{\alpha}\hat{S}T & 1 & 0 \\ -\left(\frac{\vartheta T\dot{\gamma}}{T - \dot{\gamma}PD_{дт}} - \vartheta\right)\frac{\dot{\alpha}\hat{S}T^2}{P} & \vartheta + \vartheta\frac{\dot{\alpha}\dot{\gamma}\hat{S}D_{дт}}{T - \dot{\gamma}PD_{дт}}\frac{W^2T}{P} & 1 - \frac{\vartheta\dot{\alpha}\dot{\gamma}\hat{S}}{T - \dot{\gamma}PD_{дт}}\frac{W^2T}{P} \end{bmatrix}.$$

Для знаходження значень ϑ розв'яжемо наступне рівняння:

$$\left(1 - \frac{\vartheta\dot{\alpha}\dot{\gamma}\hat{S}}{T - \dot{\gamma}PD_{дт}}\frac{W^2T}{P}\right)\left(1 - \vartheta\frac{2\dot{\alpha}\hat{S}}{P}WT + \vartheta^2\left(-1 + \frac{\dot{\alpha}\hat{S}}{P^2}W^2T\right)(\dot{\alpha}\hat{S}T)\right) = 0. \quad (2.14)$$

Як бачимо, задане рівняння (2.14) має три дійсні кореня, тому система рівнянь (2.12) являється гіперболічною. З цього робимо висновок, що математична модель НСНІ РТГ описується квазілінійною системою диференціальних рівнянь гіперболічного типу.

2.2 Застосування модифікованого методу Ньютона при моделюванні нестационарних режимів по ділянці газогону великого діаметру

Для чисельного розв'язання системи (2.12) з початковим розподілом (1.3) та крайовими умовами (1.1) – (1.2) застосовуємо метод скінченних різниць [3 – 9] з неявною скінченно-різницевою схемою, яка забезпечує другий порядок точності щодо просторової змінної і перший порядок щодо часової. З цією метою ділимо відрізок $[0, \hat{L}]$ на n рівних частин довжиною Δx , отримуючи $(n + 1)$ -у точку розбиття x_i де $i = 0, \dots, n$.

Похідні в рівнянні (2.15) замінюємо скінченно-різницевиими співвідношеннями:

$$\left. \frac{\partial \chi}{\partial x} \right|_i^k = \begin{cases} \frac{\chi_1^k - \chi_0^k}{\Delta x}, i = 0, \\ \frac{\chi_{i+1}^k - \chi_{i-1}^k}{2\Delta x}, i = \overline{1, n-1}, \\ \frac{\chi_n^k - \chi_{n-1}^k}{\Delta x}, i = n, \end{cases} \quad (2.15)$$

$$\left. \frac{\partial \chi}{\partial t} \right|_i^k = \frac{\chi_i^k - \chi_i^{k-1}}{\Delta t}, i = \overline{0, n}. \quad (2.16)$$

Зобразимо шаблони для апроксимації похідних на вході в ДГГ, на проміжній точці та на виході ДГГ на рисунках 2.1, 2.2 та 2.3 відповідно.

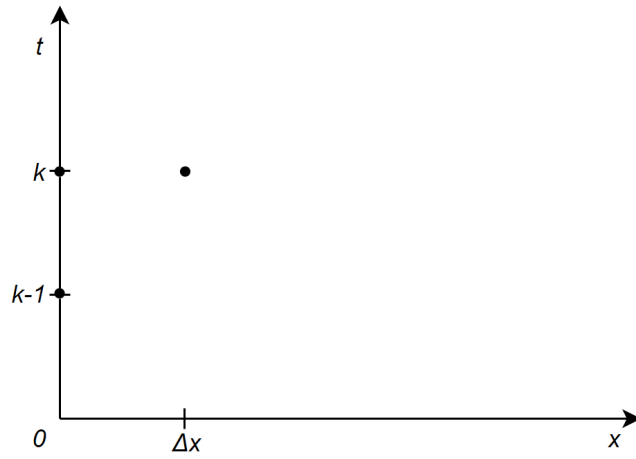


Рисунок 2.1 – Шаблон апроксимації похідних на вході ДГГ ($i = 0$)

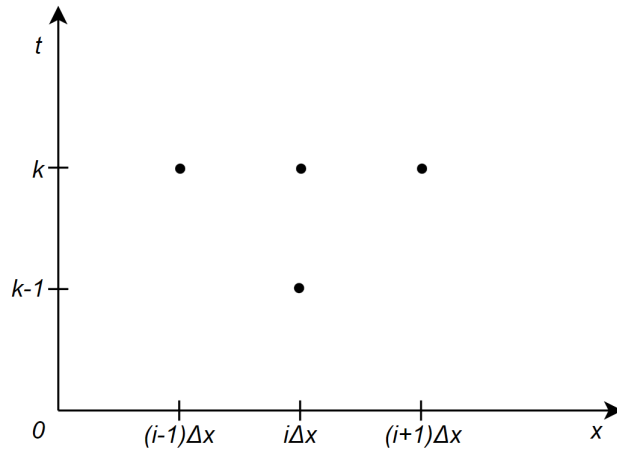


Рисунок 2.2 – Шаблон апроксимації похідних на довільній проміжній точці
ДГГ ($i = \overline{1, n-1}$)

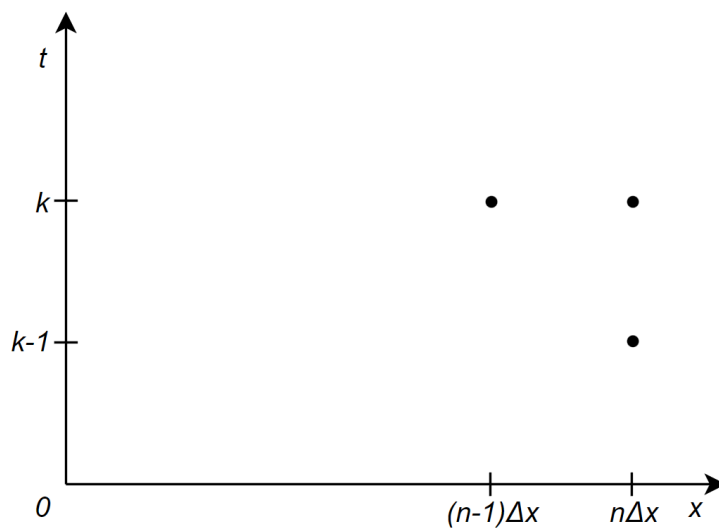


Рисунок 2.3 – Шаблон апроксимації похідних на виході ДГГ ($i = n$)

Це дозволяє отримати систему скінченно-різницевих рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{\Delta x} \widehat{B}_0^k \chi_0^k + \frac{1}{\Delta t} \chi_0^k + \frac{1}{\Delta x} \widehat{B}_0^k \chi_1^k = \widehat{\Phi}_0 + \frac{1}{\Delta t} \chi_0^{k-1}, i=0, \\ -\frac{1}{2\Delta x} \widehat{B}_i^k \chi_i^k + \frac{1}{\Delta t} \chi_i^k + \frac{1}{2\Delta x} \widehat{B}_i^k \chi_{i+1}^k = \widehat{\Phi}_i + \frac{1}{\Delta t} \chi_i^{k-1}, i=\overline{1, n-1}, \\ -\frac{1}{\Delta x} \widehat{B}_n^k \chi_{n-1}^k + \frac{1}{\Delta t} \chi_n^k + \frac{1}{\Delta x} \widehat{B}_n^k \chi_n^k = \widehat{\Phi}_n + \frac{1}{\Delta t} \chi_n^{k-1}, i=n. \end{array} \right. \quad (2.24)$$

Для розв'язання системи рівнянь, представленій у вигляді (2.24) отримуємо вектор розв'язку:

$$\begin{aligned} \chi^k &= (\chi_0^k, \chi_1^k, \dots, \chi_i^k, \dots, \chi_n^k) = \\ &= (W_0^k, P_0^k, T_0^k, W_1^k, P_1^k, T_1^k, \dots, W_i^k, P_i^k, T_i^k, \dots, W_n^k, P_n^k, T_n^k). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Щоб знайти значення для цього вектору, застосовуємо модифікований метод Ньютона для роботи з нелінійними системами. На s -й ітерації для k -го шару часу утворюється система лінійних рівнянь, яку можна представити у загальному вигляді [1, 8]:

$$J^{k,s} \partial \chi^{k,s+1} = \psi^{k,s}, \text{ при } s = 0, \dots, m, \quad (2.26)$$

$$A^{k,s} \partial \chi^{k,s+1} = \psi^{k,s}, \text{ при } s = m+1, m+2, \dots \quad (2.27)$$

де $J^{k,s} = \left[\frac{\partial \psi^k}{\partial \chi^k} \right]_{\chi^{k,s}}$ є матрицею Якобі на розв'язку $\chi^{k,s}$;

$\partial \chi^{k,s+1}$ – вектор поправок для невідомих на s -й ітерації;

$A^{k,s}$ – допоміжна матриця, яка на кожному кроці, починаючи з $(m+1)$ -го, перераховується за формулою: $A^{k,s+1} = A^{k,s}$;

$\psi^{k,s}$ – вектор нев'язок.

На початкових ітераціях матриця Якобі обчислюється кожного разу, але,

починаючи з певної ітерації, вона залишається сталою, що значно спрощує обчислення. Для нашого випадку в формулах (2.26), (2.27) обираємо параметр m таким, що $m = 0$.

Вектор нев'язок $\psi^{k,s}$ притому розраховується для кожної ітерації.

У граничних точках $i = 0$ та $i = n$ для k -го шару часу та s -ї ітерації він виглядає так:

$$\psi_i^{k,s} = \begin{cases} \chi_0^{k,s} \left(\frac{1}{\Delta t} - \frac{\widehat{B}_0^{k,s}}{\Delta x} \right) + \frac{\widehat{B}_0^{k,s}}{\Delta x} \chi_1^{k,s} - \widehat{\Phi}_0^{k,s} - \frac{\chi_0^{k-1,s}}{\Delta t}, i = 0, \\ -\frac{\widehat{B}_i^{k,s}}{2\Delta x} \chi_{i-1}^{k,s} + \frac{\chi_i^{k,s}}{\Delta t} + \frac{\widehat{B}_i^{k,s}}{2\Delta x} \chi_{i+1}^{k,s} - \widehat{\Phi}_i^{k,s} - \frac{\chi_i^{k-1,s}}{\Delta t}, i = \overline{1, n-1}, \\ \chi_n^{k,s} \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{\widehat{B}_n^{k,s}}{\Delta x} \right) - \frac{\widehat{B}_n^{k,s}}{\Delta x} \chi_{n-1}^{k,s} - \widehat{\Phi}_n^{k,s} - \frac{\chi_n^{k-1,s}}{\Delta t}, i = n. \end{cases} \quad (2.28)$$

Матриця Якобі має таку структуру:

$$J^{k,s} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_0^{k,s}}{\partial \chi_0^{k,s}} & \frac{\widehat{B}_0^{k,s}}{\Delta x} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -\frac{\widehat{B}_1^{k,s}}{2\Delta x} & \frac{\partial \psi_1^{k,s}}{\partial \chi_1^{k,s}} & \frac{\widehat{B}_1^{k,s}}{2\Delta x} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & -\frac{\widehat{B}_i^{k,s}}{2\Delta x} & \frac{\partial \psi_i^{k,s}}{\partial \chi_i^{k,s}} & \frac{\widehat{B}_i^{k,s}}{2\Delta x} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{\widehat{B}_{n-1}^{k,s}}{2\Delta x} & \frac{\partial \psi_{n-1}^{k,s}}{\partial \chi_{n-1}^{k,s}} & \frac{\widehat{B}_{n-1}^{k,s}}{2\Delta x} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -\frac{\widehat{B}_n^{k,s}}{\Delta x} & \frac{\partial \psi_n^{k,s}}{\partial \chi_n^{k,s}} \end{bmatrix}.$$

Відповідно до системи (2.12) та формули (2.28) розрахуємо компоненти вектору нев'язок $\Psi_0^{k,s}$:

$$\Psi_{0,1} = \frac{1}{\Delta t}(W_0 - W_0^{k-1}) + \frac{1}{\Delta x} \left((P_1 - P_0) \left(1 - \frac{\dot{\alpha} \hat{S} T_0 W_0^2}{P_0^2} \right) + (W_1 - W_0) \frac{2\dot{\alpha} \hat{S} T_0 W_0}{P_0} \right) +$$

$$+ \frac{\lambda \alpha \hat{S} T_0 W_0 |W_0|}{2\hat{D}P_0} + \frac{gP_0}{\alpha \hat{S} T_0} \frac{dh}{dx},$$

$$\Psi_{0,2} = \frac{1}{\Delta t}(P_0 - P_0^{k-1}) + \frac{\dot{\alpha} \hat{S} T_0}{\Delta x}(W_1 - W_0),$$

$$\Psi_{0,3} = \frac{\dot{\alpha} \hat{S} T_0^2}{\Delta x} \left(\frac{W_0 \dot{\gamma}}{T_0 - D_{\text{дт}} P_0 \dot{\gamma}} \left(\frac{T_1 - T_0 - D_{\text{дт}} P_1}{P_0} + D_{\text{дт}} \right) + \frac{W_0 - W_1}{P_0} \left(1 - \frac{T_0 \dot{\gamma}}{T_0 - D_{\text{дт}} P_0 \dot{\gamma}} \right) \right) +$$

$$+ \frac{1}{\Delta t}(T_0 - T_0^{k-1}) + \frac{4KgT_0^2(T_0 - T_p)(\dot{\gamma} - 1)}{P_0(T_0 - D_{\text{дт}} P_0 \dot{\gamma}) \hat{D}} + \frac{gT_0^2 W_0 (\dot{\gamma} - 1)}{P_0(T_0 - D_{\text{дт}} P_0 \dot{\gamma})} \frac{dh}{dx}.$$

Аналогічним чином розрахуємо компоненти векторів нев'язок для $i = \overline{1, n-1}$ та $i = n$:

$$\Psi_{i,1} = \frac{1}{\Delta t}(W_i - W_i^{k-1}) + \frac{1}{2\Delta x} \left((P_{i+1} - P_{i-1}) \left(1 - \frac{\dot{\alpha} \hat{S} T_i W_i^2}{P_i^2} \right) + (W_{i+1} - W_{i-1}) \frac{2\dot{\alpha} \hat{S} T_i W_i}{P_i} \right) +$$

$$+ \frac{\lambda \alpha \hat{S} T_i W_i |W_i|}{2\hat{D}P_i} + \frac{gP_i}{\alpha \hat{S} T_i} \frac{dh}{dx},$$

$$\Psi_{i,2} = \frac{1}{\Delta t}(P_i - P_i^{k-1}) + \frac{\dot{\alpha} \hat{S} T_i}{2\Delta x}(W_{i+1} - W_{i-1}),$$

$$\Psi_{i,3} = \frac{\dot{\alpha} \hat{S} T_i^2}{2\Delta x} \left(\frac{\dot{\gamma} W_i}{P_i(T_i - D_{\text{дт}} P_i \dot{\gamma})} \left(\frac{T_{i+1} - T_{i-1} - D_{\text{дт}}(P_{i-1} - P_{i+1})}{P_0} \right) + \frac{W_{i-1} - W_{i+1}}{P_i} \left(1 - \frac{T_0 \dot{\gamma}}{T_0 - D_{\text{дт}} P_0 \dot{\gamma}} \right) \right) +$$

$$+ \frac{1}{\Delta t}(T_i - T_i^{k-1}) + \frac{4KgT_i^2(T_i - T_p)(\dot{\gamma} - 1)}{P_i(T_i - D_{\text{дт}} P_i \dot{\gamma}) \hat{D}} + \frac{gT_i^2 W_i (\dot{\gamma} - 1)}{P_i(T_i - D_{\text{дт}} P_i \dot{\gamma})} \frac{dh}{dx},$$

$$\Psi_{n,1} = \frac{1}{\Delta t}(W_n - W_n^{k-1}) + \frac{1}{\Delta x} \left((P_n - P_{n-1}) \left(1 - \frac{\dot{\alpha} \hat{S} T_n W_n^2}{P_n^2} \right) + (W_n - W_{n-1}) \frac{2\dot{\alpha} \hat{S} T_n W_n}{P_n} \right) +$$

$$+ \frac{\lambda \alpha \hat{S} T_n W_n |W_n|}{2\hat{D} P_n} + \frac{g P_n}{\alpha \hat{S} T_n} \frac{dh}{dx},$$

$$\Psi_{n,2} = \frac{1}{\Delta t}(P_n - P_n^{k-1}) + \frac{\dot{\alpha} \hat{S} T_n}{\Delta x}(W_n - W_{n-1}),$$

$$\Psi_{n,3} = \frac{\dot{\alpha} \hat{S} T_n^2}{\Delta x} \left(\frac{W_n \dot{\gamma}}{T_n - D_{\text{ДТ}} P_n \dot{\gamma}} \left(\frac{T_n - T_{n-1} + D_{\text{ДТ}} P_{n-1}}{P_n} - D_{\text{ДТ}} \right) + \frac{W_n - W_{n-1}}{P_n} \left(1 - \frac{T_n \dot{\gamma}}{T_n - D_{\text{ДТ}} P_n \dot{\gamma}} \right) \right) +$$

$$+ \frac{1}{\Delta t}(T_n - T_n^{k-1}) + \frac{4K g T_n^2 (T_n - T_p)(\dot{\gamma} - 1)}{P_n (T_n - D_{\text{ДТ}} P_n \dot{\gamma}) \hat{D}} + \frac{g T_n^2 W_n (\dot{\gamma} - 1)}{P_n (T_n - D_{\text{ДТ}} P_n \dot{\gamma})} \frac{dh}{dx}.$$

Після цього можемо розрахувати елементи матриці Якобі для початкової точки $i = 0$:

$$\frac{d\Psi_{0,1}}{dW_0} = \frac{1}{P_0^2 \Delta x \Delta t} \left(P_0^2 \Delta x - 2\dot{\alpha} P_1 \hat{S} T_0 W_0 \Delta t + 2\dot{\alpha} P_0 \hat{S} T_0 (W_1 - W_0) \Delta t + \frac{\dot{\alpha} \lambda P_0 \hat{S} T_0 |W_0| \Delta x \Delta t}{\hat{D}} \right),$$

$$\frac{d\Psi_{0,1}}{dP_0} = \frac{1}{P_0^3 \hat{S} T_0 \Delta x} \left(\dot{\alpha} \hat{S} T_0 (-P_0^3 + 2\dot{\alpha} P_1 \hat{S} T_0 W_0^2 + \dot{\alpha} P_0 \hat{S} T_0 W_0 (W_0 - 2W_1)) - \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda \dot{\alpha}^2 P_0 \hat{S}^2 T_0^2 W_0 |W_0| \Delta x}{2\hat{D}} + g P_0^3 \Delta x \frac{dh}{dx} \right),$$

$$\frac{d\Psi_{0,1}}{dT_0} = \frac{1}{\dot{\alpha} P_0^2 T_0^2 \hat{S} \Delta x} \left(-\dot{\alpha}^2 \hat{S}^2 T_0^2 W_0 (P_0 W_0 + P_1 W_0 - 2P_0 W_1) + \frac{\dot{\alpha}^2 \lambda P_0 \hat{S}^2 T_0^2 W_0 |W_0| \Delta x}{2\hat{D}} - g P_0^3 \Delta x \frac{dh}{dx} \right),$$

$$\frac{d\Psi_{0,2}}{dW_0} = \frac{-\dot{\alpha} \hat{S} T_0}{\Delta x},$$

$$\frac{d\Psi_{0,2}}{dP_0} = \frac{1}{\Delta t},$$

$$\frac{d\Psi_{0,2}}{dT_0} = \frac{\dot{\alpha} \hat{S} (W_1 - W_0)}{\Delta x},$$

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_{0,3}}{dW_0} &= \frac{1}{P_0(\dot{\gamma}D_{\text{дт}}P_0 - T_0)\Delta x} \left(T_0^2 \left(\dot{\alpha}\hat{S}(-T_0 + \dot{\gamma}D_{\text{дт}}P_1 + 2\dot{\gamma}T_0 - \dot{\gamma}T_1) - g(\dot{\gamma}-1)\frac{dh}{dx} \right) \right), \\ \frac{d\psi_{0,3}}{dP_0} &= \frac{1}{P_0^2(T_0 - \dot{\gamma}D_{\text{дт}}P_0)^2\hat{D}\Delta x} \left(T_0^2 \left(\dot{\alpha}\hat{S}\hat{D}(\dot{\gamma}^2D_{\text{дт}}P_0(-2D_{\text{дт}}P_1W_0 + 2T_1W_0 + D_{\text{дт}}P_0W_1) + \right. \right. \\ &+ T_0^2(W_1 - \dot{\gamma}W_1 + W_0(2\dot{\gamma}-1)) + \dot{\gamma}T_0(-T_1W_0 + D_{\text{дт}}(P_1W_0 + 2P_0(W_0 + W_1(\dot{\gamma}-1) - 2\dot{\gamma}W_0)))) - \\ &\left. \left. - 4K(T_0 - T_{\text{тп}})(\dot{\gamma}-1)(T_0 - 2\dot{\gamma}D_{\text{дт}}P_0)\Delta x + \hat{D}gW_0(\dot{\gamma}-1)(2\dot{\gamma}D_{\text{дт}}P_0 - T_0)\frac{dh}{dx} \right) \right), \\ \frac{d\psi_{0,3}}{dT_0} &= \frac{1}{P_0\hat{D}(T_0 - \dot{\gamma}D_{\text{дт}}P_0)^2\Delta x\Delta t} \left(4KT_0(\dot{\gamma}-1)(2T_0^2 + 2\dot{\gamma}D_{\text{дт}}P_0T_{\text{тп}} - T_0(T_{\text{тп}} + 3\dot{\gamma}D_{\text{дт}}P_0))\Delta x\Delta t + \right. \\ &+ \hat{D}(D_{\text{дт}}^2P_0^3\dot{\gamma}^2\Delta x) + \dot{\alpha}\hat{S}T_0^2(\dot{\gamma}W_0(T_1 - D_{\text{дт}}P_1) + 2T_0(W_0 + W_1(\dot{\gamma}-1) - 2\dot{\gamma}W_0))\Delta t - \\ &- 2\dot{\gamma}D_{\text{дт}}P_0^2T_0(\Delta x + \dot{\alpha}\dot{\gamma}D_{\text{дт}}\hat{S}W_1\Delta t) + P_0T(2\dot{\alpha}\dot{\gamma}^2D_{\text{дт}}\hat{S}W_0(D_{\text{дт}}P_1 - T_1)\Delta t + T_0(\Delta x + \\ &\left. + \dot{\alpha}\dot{\gamma}D_{\text{дт}}\hat{S}(-3W_0 + 4W_1 + 6\dot{\gamma}W_0 - 3\dot{\gamma}W_1)\Delta t) \right) + \hat{D}gT_0W_0(\dot{\gamma}-1)(T_0 - 2\dot{\gamma}D_{\text{дт}}P_0)\Delta x\Delta t\frac{dh}{dx} \Big). \end{aligned}$$

Всі інші елементи матриці Якобі (для проміжних та кінцевої точок) знаходяться аналогічно.

2.3 Алгоритм моделювання нестационарних режимів по ділянці газогону великого діаметру зі застосуванням модифікованого методу Ньютона

Алгоритм розрахунку НСНІ РТГ для k -го часового шару:

- а) розрахунок вектору початкових значень параметрів $\chi^{k,s}$, $s = 0$;
- б) розрахунок значення вектору нев'язок $\psi^{k,s}$;
- в) розрахунок елементів матриці Якобі $J^{k,s}$;
- г) знаходження вектору поправок, розв'язуючи відповідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь;
- д) обчислити нові значення невідомих параметрів газового потоку на s -й

ітерації за формулою

$$\chi_i^{k,s+1} = \chi_i^{k,s} - \delta\chi_i^{k,s+1}, i = 0, \dots, n;$$

е) перевірити збіжність результатів: якщо $\|\psi_i^{k,s+1}\| \leq \varepsilon$, де ε – задана точність, то алгоритм завершується; якщо точність не досягнута, $s = s + 1$ та перейти до пункту «б»;

є) завершити розрахунок для поточного часового шару.

Висновки за розділом 2

У розділі обрано математичну модель НСНІ РТГ по ДГГ ВД. Модель базується на квазілінійній системі гіперболічних диференціальних рівнянь у часткових похідних, які враховують основні фізичні процеси: теплообмін, зміну тиску, ефект Джоуля-Томсона. Для чисельного розв’язання рівнянь моделі обрано метод скінченних різниць із використанням неявної схеми та модифікованого методу Ньютона, що забезпечує задану точність розрахунків.

Впровадження модифікованого методу Ньютона дозволяє ефективно розв’язувати нелінійні системи рівнянь із забезпеченням швидкої збіжності. Також розроблено покроковий алгоритм розрахунку, який враховує динамічні процеси у проміжних точках ДГГ, забезпечуючи адаптивність моделі до змінних крайових умов.

Отримані результати створюють основу для практичної реалізації моделі у вигляді програмного продукту, що дозволяє прогнозувати поведінку потоку газу та оптимізувати роботу ГТС в умовах перехідних режимів.

3 ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

3.1 Система комп'ютерної алгебри Mathematica 14.1

Wolfram Mathematica – це сучасна обчислювальна система, яка охоплює широкий спектр технічних обчислень, включаючи нейронні мережі, машинне навчання, обробку зображень, геометрію, наукові дані та візуалізацію. Вона використовується в багатьох технічних, наукових, математичних та комп'ютерних галузях. Mathematica забезпечує динамічний зв'язок між осередками документів у стилі електронних таблиць при вирішенні багатьох символічних завдань, що вигідно відрізняє її від інших систем [10].

Версія Mathematica 14.1 на сьогоднішній день є останньою стабільною версією. Вона пропонує нові інструменти для роботи з нейронними мережами та великими мовними моделями (LLM), а також розширені можливості для обробки зображень та відео. Зокрема, функції `LLMPromptGenerator` та `SemanticSearch` дозволяють додавати контекстно-залежні повідомлення до LLM-запитів та здійснювати пошук у текстових корпусах за семантичною схожістю відповідно [11].

Завдяки своїм потужним можливостям та універсальності, Mathematica 14.1 є оптимальним вибором для проведення теоретичного та чисельного аналізу, зокрема для розрахунку нестационарних неізотермічних режимів течії газу по ДГГ ВД.

3.2 Опис програми

Реалізація програми для моделювання ННРТГ по ділянці газогону виконана в середовищі Mathematica 14.1. Програма складається з трьох основних етапів.

Першим етапом є задання початкових параметрів системи, а саме:

- технічні параметри газогону: довжина ділянки, внутрішній діаметр, товщина стінок, коефіцієнт ефективності;
- фізичні властивості газу: коефіцієнт стисливості, коефіцієнт теплопередачі, відносна щільність, питома теплоємність;
- крайові умови: тиск і температура газу на початку ділянки та комерційна витрата газу, та температура ґрунту.

Наступним етапом є розрахунок за допомогою алгоритму моделювання. Алгоритм моделювання реалізує метод скінченних різниць із використанням неявної схеми. На кожному часовому кроці на кожній внутрішній ітерації модифікованого методу Ньютона здійснюється розрахунок елементів векторів нев'язок. Розрахунок елементів матриці Якобі здійснюється на нульовій внутрішній ітерації. На кожній внутрішній ітерації знаходиться розв'язок ЛСР. Використання модифікованого методу Ньютона для розв'язання системи нелінійних рівнянь забезпечує швидку збіжність навіть при високих нелінійностях.

Фінальним етапом програми є вивід результатів. Програмний продукт виводить масиви даних, що містять параметри газового потоку (масова витрата, тиск, температура газу) у заданих точках розбиття на кожному часовому шарі моделювання. Також він генерує графіки для кожного із параметрів по довжині ДГГ для кожного окремого часового шару, що дозволяє наочно оцінити їх динаміку уздовж ділянки і в часі.

Висновки за розділом 3

У розділі представлено реалізацію програми для комп'ютерного моделювання нестационарних режимів течії газу за допомогою Mathematica 14.1. Програма забезпечує задання початкових параметрів, розрахунок із використанням методу скінченних різниць та модифікованого методу Ньютона, а також вивід результатів у вигляді масивів даних і графіків. Це дозволяє наочно аналізувати динаміку параметрів газового потоку уздовж ділянки та в часі.

4 РЕЗУЛЬТАТИ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ТА ЇХ АНАЛІЗ

Розглянемо задачу підключення великого споживача газу до ДГГ. Для розрахунку параметрів течії газу по ДГГ ВД був реалізований алгоритм. Лістинг програми наведений у додатку А.

В рамках експерименту пропонуються наступні початкові вхідні параметри системи:

- довжина ДГГ $\hat{L} = 75$ км;
- внутрішній діаметр труби $\hat{D} = 1400$ мм;
- товщина стінок труби $\delta = 10$ мм;
- коефіцієнт теплопередачі від труби до ґрунту $K = 1.4 \frac{\text{ккал}}{\text{м}^3 \cdot \text{год} \cdot \text{К}}$;
- температура ґрунту $T_{gr} = 11^\circ\text{C}$;
- коефіцієнтом ефективності ділянки $Ef = 0.95$;
- питома теплоємність газу $C_p = 0.655952 \frac{\text{ккал}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$;
- питома теплоємність газу $C_p = 0.655952 \frac{\text{ккал}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$;
- відносна густина газу по повітрю $\Delta = 0.604707$;
- коефіцієнт стисливості газу $Z = 0.9$;
- кількість точок розбиття ділянки $n = 6, 12, 24$;
- загальний час моделювання $time = 13$ годин;
- крок розбиття за часом $\tau = 300$ секунд.

Також задамо необхідну точність розрахунку $\varepsilon = 10^{-6}$. Після цього необхідно задати параметри газу на початку ділянки:

- температура газу $T_{ex} = 39.1^\circ\text{C}$;
- тиск газу $P_{ex} = 70.1$ атм.;

– комерційна витрата газу $q = 85.45 \cdot 10^6 \frac{M^3}{\text{доб.}}$.

Крайові умови та перехідний РТГ при підключенні великого споживача газу по ДГГ заданий наступним чином:

$$P(0,t) = 70.1 \text{ атм.},$$

$$T(0,t) = 39.1^\circ \text{C},$$

$$G(L,t) = \begin{cases} 85.45 \text{ млн.м}^3/\text{доб.}, & 0 \leq t < 175 \text{ хв}, \\ 105.45 \text{ млн.м}^3/\text{доб.}, & 175 \leq t \leq 780 \text{ хв}. \end{cases}$$

Розглянемо результати розрахунку для різної кількості розбиття ділянки $n = 6, 12, 24$. Зважаючи на це, будемо розглядати параметри газового потоку в таких точках ділянки, які розташовані на однаковій відстані від початку ДГГ. При $n = 6$ це 0-а, 3-тя, 5-та та 6-та точки розбиття, при $n = 12$ це 0-а, 6-та, 10-та та 12-та точки, при $n = 24$ це 0-а, 12-та, 20-та та 24-та точки розбиття. Важливо також зазначити, що згідно із умовами вище перехідний процес відбувається починаючи з 35-го часового шару, що відповідає 175 хвилині при $\tau = 5$ хв.

Значенням масової витрати газу на часових шарах $k = 1, 34, 35, 36, 38, 68, 105, 156$ представлені в таблицях 4.1 – 4.8 та на рисунках 4.1 – 4.4.

Таблиця 4.1 – Комерційна витрата газу ($\text{млн м}^3 / \text{доб.}$) на однаковій відстані від початку ДГГ при різних n на 1-му часовому шарі

Відстань від початку ДГГ (км)	$n = 6$	$n = 12$	$n = 24$
0	86.9276528	86.7815091	86.740711
37.5	86.5967601	86.5679822	86.5624966
62.5	86.1593001	86.0513206	86.0532905
75	85.45	85.45	85.45

Таблиця 4.2 – Комерційна витрата газу ($\text{млн м}^3 / \text{доб.}$) на однаковій відстані від початку ДГГ при різних n на 34-му ЧШ

Відстань від початку ДГГ (км)	$n = 6$	$n = 12$	$n = 24$
0	85.4525132	85.4518868	85.4517322
37.5	85.4521129	85.4514261	85.451298
62.5	85.4509226	85.45058	85.4505275
75	85.45	85.45	85.45

Таблиця 4.3 – Комерційна витрата газу ($\text{млн м}^3 / \text{доб.}$) на однаковій відстані від початку ДГГ при різних кількостях точок розбиття n на 35-му часовому шарі

Відстань від початку ДГГ (км)	$n = 6$	$n = 12$	$n = 24$
0	87.1938264	86.9713892	86.910705
37.5	88.9468116	89.2820321	89.1919819
62.5	95.2434721	96.6680065	96.5680474
75	105.45	105.45	105.45

Таблиця 4.4 – Комерційна витрата газу ($\text{млн м}^3 / \text{доб.}$) на однаковій відстані від початку ДГГ при різних кількостях точок розбиття n на 36-му часовому шарі

Відстань від початку ДГГ (км)	$n = 6$	$n = 12$	$n = 24$
0	89.6847099	89.3912144	89.3109223
37.5	92.2027448	92.6521471	92.5930158
62.5	99.0831059	99.9148397	99.9122628
75	105.45	105.45	105.45

Таблиця 4.5 – Комерційна витрата газу ($\text{млн м}^3 / \text{доб.}$) на однаковій відстані від початку на 38-му часовому шарі

Відстань від початку ДГГ (км)	$n = 6$	$n = 12$	$n = 24$
0	94.3105259	94.1046379	94.0512574
37.5	96.5939332	96.9636666	96.9387997
62.5	101.798895	102.107132	102.104183
75	105.45	105.45	105.45

Таблиця 4.6 – Комерційна витрата газу ($\text{млн м}^3 / \text{доб.}$) на однаковій відстані від початку ДГГ при різних кількостях розбиття на 68-му часовому шарі

Відстань від початку ДГГ (км)	$n = 6$	$n = 12$	$n = 24$
0	105.357491	105.358967	105.359321
37.5	105.372757	105.381518	105.381901
62.5	105.417773	105.422388	105.422602
75	105.45	105.45	105.45

Таблиця 4.7 – Комерційна витрата газу ($\text{млн м}^3 / \text{доб.}$) на однаковій відстані від початку ДГГ при різних кількостях розбиття на 105-му часовому шарі

Відстань від початку ДГГ (км)	$n = 6$	$n = 12$	$n = 24$
0	105.449978	105.449785	105.449737
37.5	105.450044	105.449842	105.449804
62.5	105.450052	105.449939	105.449922
75	105.45	105.45	105.45

Таблиця 4.8 – Комерційна витрата газу ($\text{млн м}^3 / \text{доб.}$) на однаковій відстані від початку ДГГ при різних n на 156-му ЧШ

Відстань від початку ДГГ (км)	$n = 6$	$n = 12$	$n = 24$
0	105.45	105.45	105.45
37.5	105.45	105.45	105.45
62.5	105.45	105.45	105.45
75	105.45	105.45	105.45

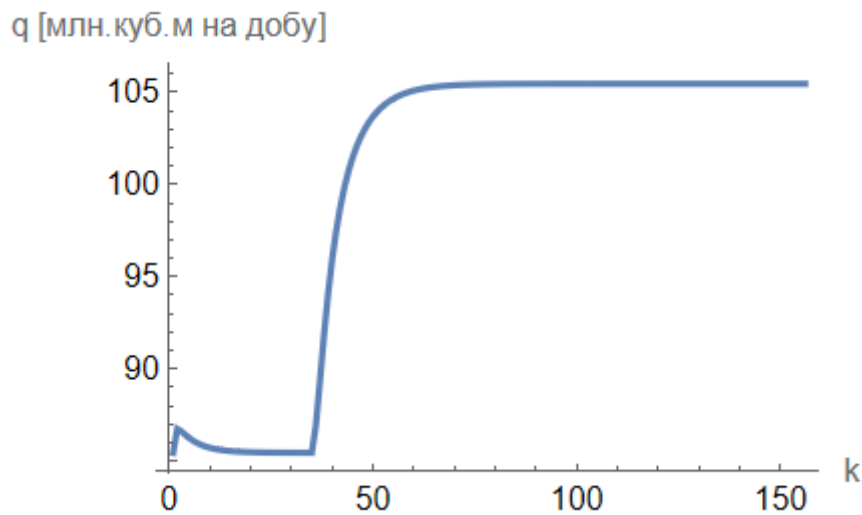


Рисунок 4.1 – Комерційна витрата газу в 0-й точці розбиття при $n = 24$

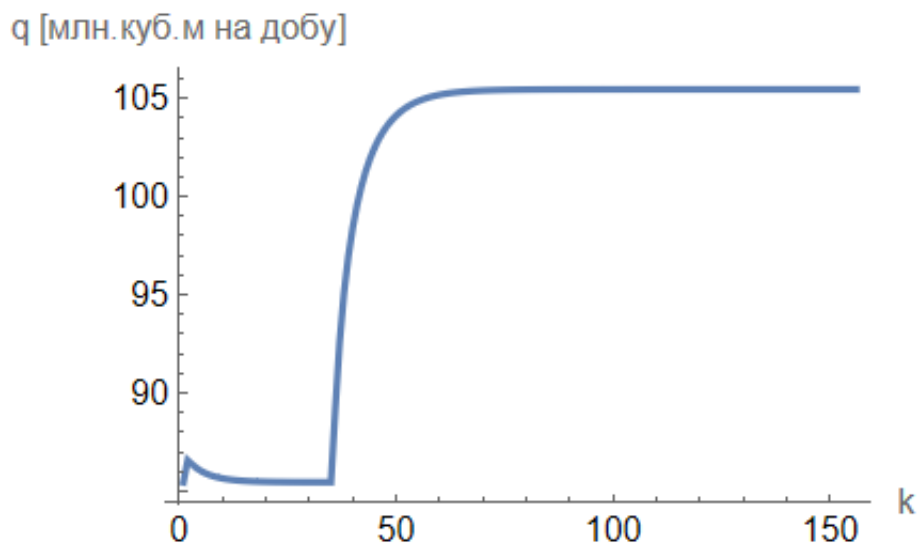


Рисунок 4.2 – Комерційна витрата газу в 12-й точці розбиття при $n = 24$

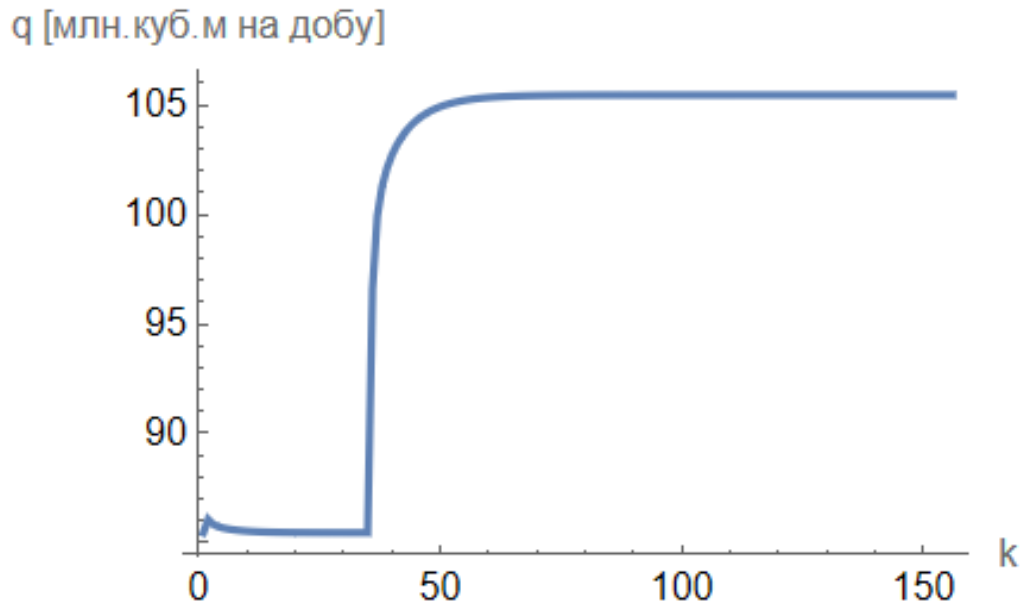


Рисунок 4.3 – Комерційна витрата газу в 20-й точці розбиття при $n = 24$

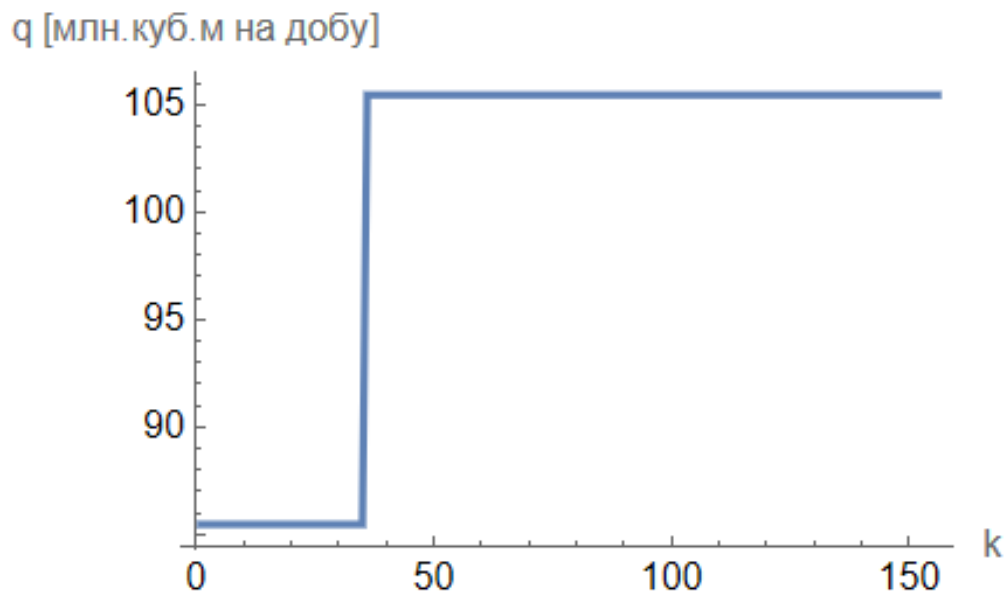


Рисунок 4.4 – Комерційна витрата газу в 24-й точці розбиття при $n = 24$

Значення тиску на аналогічних часових шарах при різній кількості розбиття ДГГ представлені в таблицях 4.9 – 4.16.

Графіки параметру тиску газу відображені на рисунках 4.5 – 4.8.

Значення температури на аналогічних часових шарах при різній кількості розбиття ДГГ представлені в таблицях 4.17 – 4.24.

Графіки параметру температури газу відображені на рисунках 4.8 – 4.12.

Таблиця 4.9 – Тиск газу (*атм.*) на однаковій відстані від початку ДГГ при різних кількостях розбиття на 1-му часовому шарі

Відстань від початку ДГГ (км)	$n = 6$	$n = 12$	$n = 24$
0	70.1	70.1	70.1
37.5	63.987321	63.9803204	63.9806255
62.5	59.6628719	59.6552766	59.6569503
75	57.4085623	57.4206836	57.4244323

Таблиця 4.10 – Тиск газу (*атм.*) на однаковій відстані від початку ДГГ при різних кількостях розбиття на 34-му часовому шарі

Відстань від початку ДГГ (км)	$n = 6$	$n = 12$	$n = 24$
0	70.1	70.1	70.1
37.5	64.1896285	64.1686452	64.1678125
62.5	59.9774274	59.9551081	59.9535504
75	57.7603653	57.7524019	57.7503982

Таблиця 4.11 – Тиск газу (*атм.*) на однаковій відстані від початку ДГГ при різних кількостях розбиття на 35-му часовому шарі

Відстань від початку ДГГ (км)	$n = 6$	$n = 12$	$n = 24$
0	70.1	70.1	70.1
37.5	63.8297075	63.8472595	63.8415556
62.5	58.846541	58.8979172	58.8672431
75	56.0244261	55.7948874	55.7205445

Таблиця 4.12 – Тиск газу (*атм.*) на однаковій відстані від початку ДГГ при різних кількостях розбиття на 36-му часовому шарі

Відстань від початку ДГГ (км)	$n = 6$	$n = 12$	$n = 24$
0	70.1	70.1	70.1
37.5	63.4144628	63.4325847	63.4216006
62.5	58.020406	58.0427112	58.0108394
75	54.9460379	54.7597303	54.7147552

Таблиця 4.13 – Тиск газу (*атм.*) на однаковій відстані від початку ДГГ при різних кількостях розбиття на 38-му часовому шарі

Відстань від початку ДГГ (км)	$n = 6$	$n = 12$	$n = 24$
0	70.1	70.1	70.1
37.5	62.705386	62.7014231	62.6874042
62.5	56.8475923	56.8352943	56.8088578
75	53.5466542	53.4127434	53.3803951

Таблиця 4.14 – Тиск газу (*атм.*) на однаковій відстані від початку ДГГ при різних кількостях розбиття на 68-му часовому шарі

Відстань від початку ДГГ (км)	$n = 6$	$n = 12$	$n = 24$
0	70.1	70.1	70.1
37.5	60.9175443	60.8617539	60.8584285
62.5	54.0177318	53.9528363	53.9458719
75	50.2199657	50.1815299	50.1718218

Таблиця 4.15 – Тиск газу (*атм.*) на однаковій відстані від початку ДГГ при різних кількостях розбиття на 105-му часовому шарі

Відстань від початку ДГГ (км)	$n = 6$	$n = 12$	$n = 24$
0	70.1	70.1	70.1
37.5	60.9017445	60.8459375	60.842721
62.5	53.9921932	53.9273052	53.9204277
75	50.1899709	50.1519388	50.1422802

Таблиця 4.16 – Тиск газу (*атм.*) на однаковій відстані від початку ДГГ при різних кількостях розбиття на 156-му часовому шарі

Відстань від початку ДГГ (км)	$n = 6$	$n = 12$	$n = 24$
0	70.1	70.1	70.1
37.5	60.9017508	60.845904	60.8426763
62.5	53.9922018	53.9272537	53.9203559
75	50.1900166	50.1518819	50.1421976

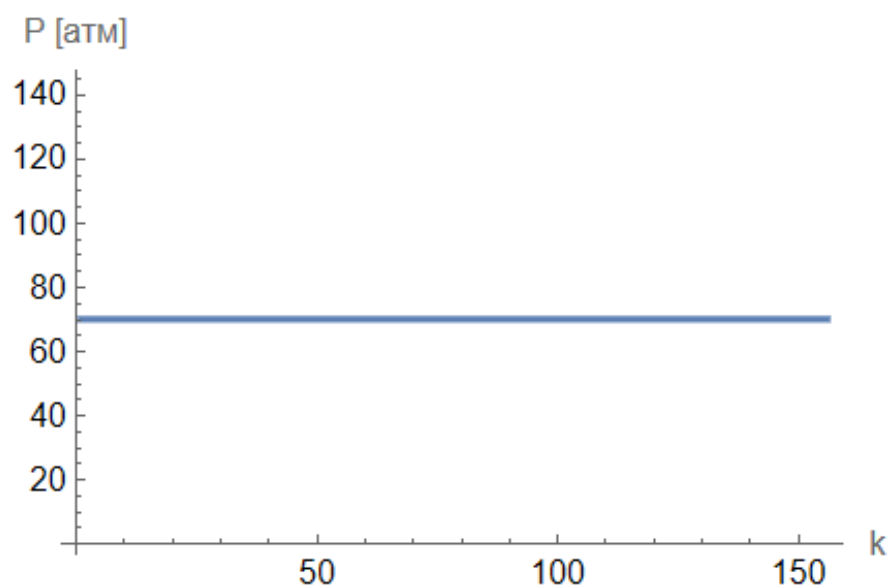


Рисунок 4.5 – Тиск газу в 0-й точці розбиття при $n = 24$

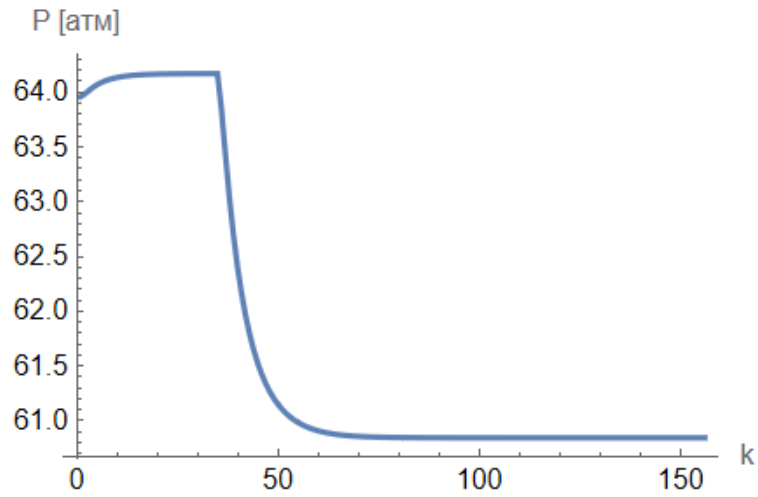


Рисунок 4.6 – Тиск газу в 12-й точці розбиття при $n = 24$

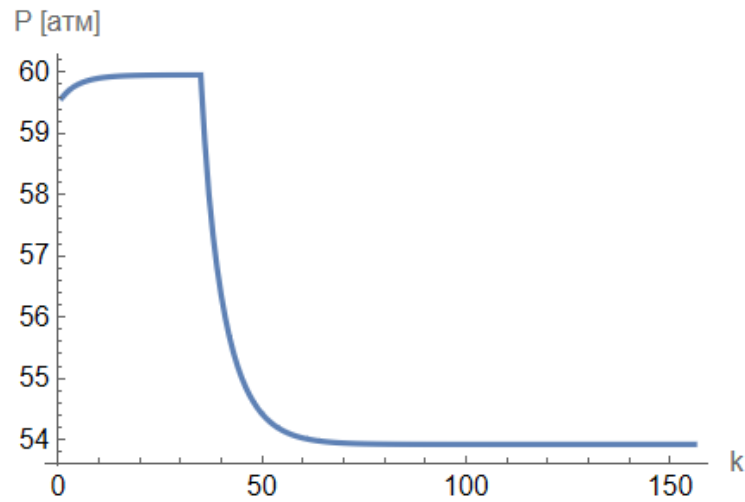


Рисунок 4.7 – Тиск газу в 20-й точці розбиття при $n = 24$

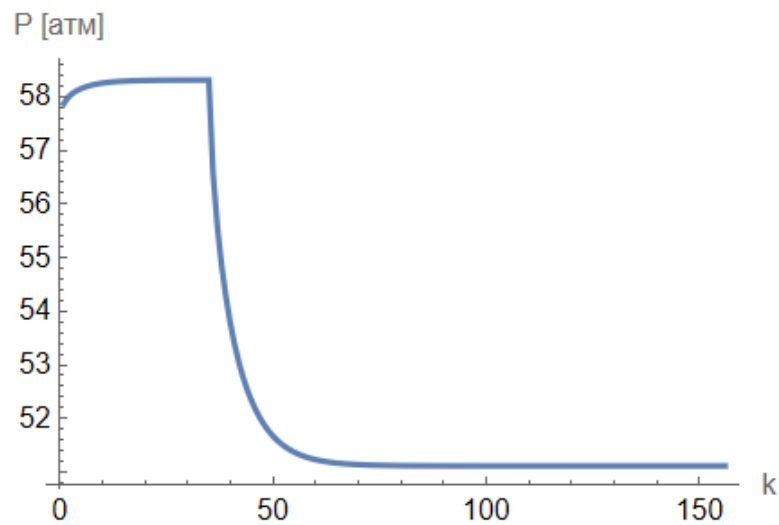


Рисунок 4.8 – Тиск газу в 24-й точці розбиття при $n = 24$

Таблиця 4.17 – Температура газу ($^{\circ}\text{C}$) на однаковій відстані від початку ДГГ при різних кількостях розбиття на 1-му часовому шарі

Відстань від початку ДГГ (км)	$n = 6$	$n = 12$	$n = 24$
0	39.1	39.1	39.1
37.5	33.1918946	33.1810662	33.1814716
62.5	29.6548448	29.6454275	29.647555
75	28.025256	28.0304672	28.0301593

Таблиця 4.18 – Температура газу ($^{\circ}\text{C}$) на однаковій відстані від початку ДГГ при різних кількостях розбиття на 34-му часовому шарі

Відстань від початку ДГГ (км)	$n = 6$	$n = 12$	$n = 24$
0	39.1	39.1	39.1
37.5	33.2878274	33.3060596	33.3042678
62.5	29.7464805	29.763279	29.7591333
75	28.0935928	28.0732598	28.0684079

Таблиця 4.19 – Температура газу ($^{\circ}\text{C}$) на однаковій відстані від початку ДГГ при різних кількостях розбиття на 35-му часовому шарі

Відстань від початку ДГГ (км)	$n = 6$	$n = 12$	$n = 24$
0	39.1	39.1	39.1
37.5	32.8189264	32.904105	32.893048
62.5	28.2611563	28.3946195	28.3484089
75	25.6986861	25.4544078	25.398125

Таблиця 4.20 – Температура газу ($^{\circ}\text{C}$) на однаковій відстані від початку ДГГ при різних кількостях розбиття на 36-му часовому шарі

Відстань від початку ДГГ (км)	$n = 6$	$n = 12$	$n = 24$
0	39.1	39.1	39.1
37.5	32.3352959	32.4329335	32.4127377
62.5	27.3490128	27.403797	27.3661719
75	24.4564801	24.3510057	24.3437134

Таблиця 4.21 – Температура газу ($^{\circ}\text{C}$) на однаковій відстані від початку ДГГ при різних кількостях розбиття на 38-му часовому шарі

Відстань від початку ДГГ (км)	$n = 6$	$n = 12$	$n = 24$
0	39.1	39.1	39.1
37.5	32.3352959	32.4329335	31.7570519
62.5	26.3520145	26.278488	26.2674413
75	23.2817528	23.2681435	23.2516361

Таблиця 4.22 – Температура газу ($^{\circ}\text{C}$) на однаковій відстані від початку ДГГ при різних кількостях розбиття на 68-му часовому шарі

Відстань від початку ДГГ (км)	$n = 6$	$n = 12$	$n = 24$
0	39.1	39.1	39.1
37.5	31.7017877	31.7802215	32.6305319
62.5	28.3910195	28.3725757	28.3639622
75	26.2399725	26.2060462	26.1971898

Таблиця 4.23 – Температура газу ($^{\circ}\text{C}$) на однаковій відстані від початку ДГГ при різних кількостях розбиття на 105-му часовому шарі

Відстань від початку ДГГ (км)	$n = 6$	$n = 12$	$n = 24$
0	39.1	39.1	39.1
37.5	32.6360103	32.6481992	32.6464683
62.5	28.4255436	28.435158	28.4316941
75	26.3361797	26.3174882	26.31279

Таблиця 4.24 – Температура газу ($^{\circ}\text{C}$) на однаковій відстані від початку ДГГ на 156-му часовому шарі

Відстань від початку ДГГ (км)	$n = 6$	$n = 12$	$n = 24$
0	39.1	39.1	39.1
37.5	32.6355345	32.6481511	32.6464941
62.5	28.4250942	28.4350889	28.4318368
75	26.3346921	26.3174134	26.3130402

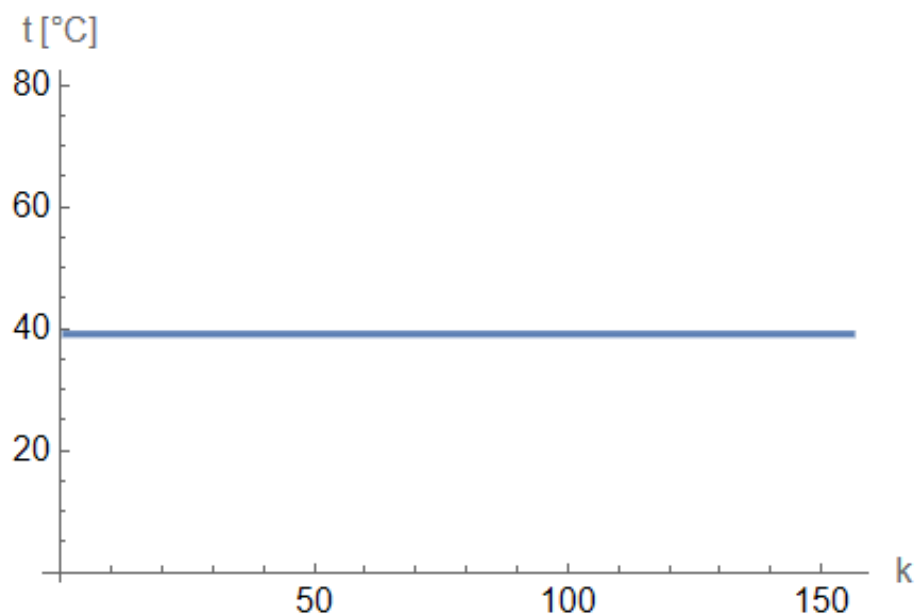


Рисунок 4.9 – Температура газу в 0-й точці розбиття при $n = 24$

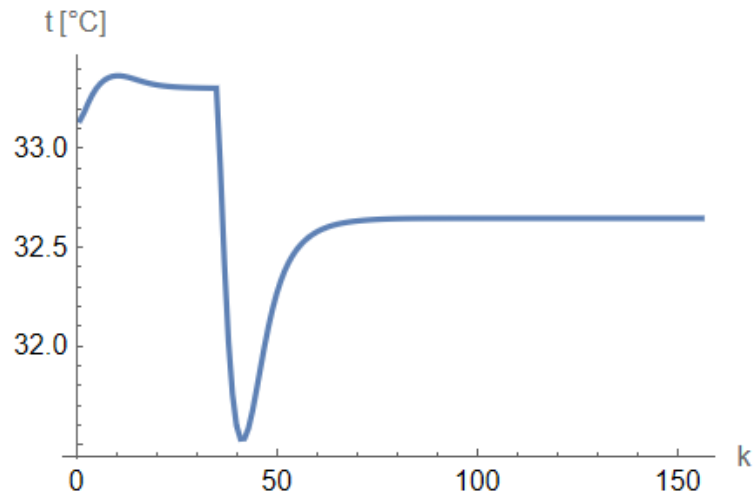


Рисунок 4.10 – Температура газу в 12-й точці розбиття при $n = 24$

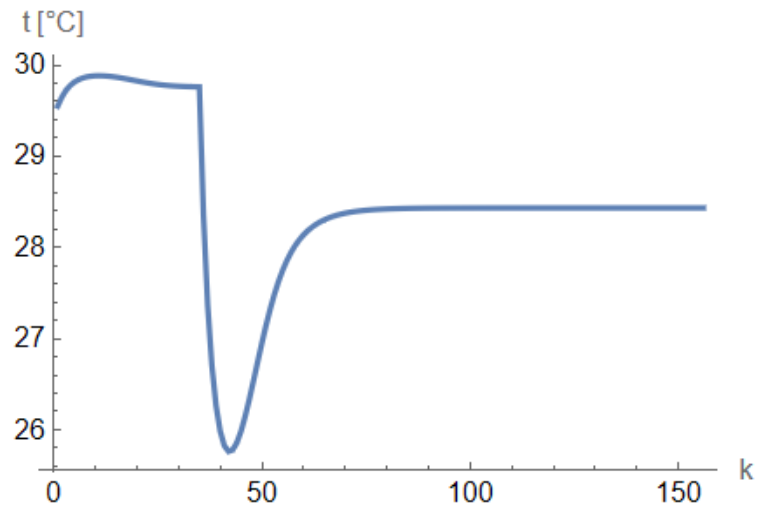


Рисунок 4.11 – Температура газу в 20-й точці розбиття при $n = 24$

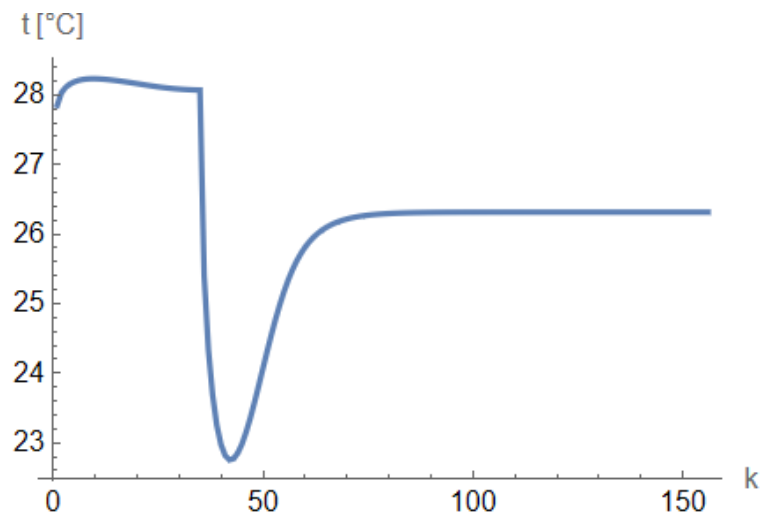


Рисунок 4.12 – Температура газу в 24-й точці розбиття при $n = 24$

Порівняймо кількість ітерацій на кожному часовому шарі при різній кількості точок розбиття ДГГ. Результат порівняння зображений в таблиці 4.25.

Таблиця 4.25 – Залежність кількості ітерацій на кожному часовому шарі від кількості точок розбиття

Кількість точок розбиття n	Номер часового шару	Кількість ітерацій
6	1	4
	2-4	3
	5-28	2
	29-34	1
	35-37	6
	38-39	5
	40-45	4
	46-58	3
	59-77	2
	78-156	1
12	1	4
	2-4	3
	5-28	2
	29-34	1
	35	6
	36	7
	37	6
	38-39	5
	40-46	4
	47-59	3
	60-79	2
	80-156	1

Кінець таблиці 4.25

Кількість точок розбиття n	Номер часового шару	Кількість ітерацій
24	1	4
	2-4	3
	5-28	2
	29-34	1
	35-36	8
	37	6
	38-39	5
	40-46	4
	47-60	3
	61-80	2
	80-156	1

Порівняймо час розрахунку для різної кількості точок розбиття. Результат порівняння зображений на таблиці 4.26.

Таблиця 4.26 – Час розрахунку для різної кількості точок розбиття

Кількість точок розбиття n	Час виконання програми (секунд)
6	16.11
12	36.238
24	105.278

Як бачимо, зі збільшенням кількості точок розбиття час розрахунку збільшується. Зокрема, при розбитті на 24 точки час розрахунку збільшується до 105.278 секунд, що в 6.5 разів більше, ніж для 6 точок розбиття, але при цьому забезпечується точніша апроксимація параметрів газового потоку. Відомо, що при збільшенні кількості точок розбиття збільшується і точність розрахунків.

Аналіз таблиць 4.1 – 4.24 показує, що при $n = 12$ точках розбиття отри-

мано результати, які можуть задовольнити, як по точності отриманих невідомих параметрів потоку газу, так і по часу, витраченого на їх розрахунок. Можна вважати, що перехідний процес завершується на 97-му часовому шарі.

Аналіз графіків, які показують зміну комерційної витрати, тиску і температури за часом, дають можливість зробити висновок про однаковий характер поведінки цих параметрів при різній кількості точок розбиття, тому достатньо було показати ці графіки при $n = 24$ на рисунках 4.1 – 4.12.

Висновки за розділом 4

У розділі представлено результати обчислювального експерименту, спрямованого на моделювання НСНІ РТГ по ДГГ ВД. Показано, що збільшення кількості точок розбиття покращує точність розрахунків, проте призводить до збільшення часу виконання програми. Але можна обрати таку кількість точок розбиття конкретної ДГГ, яка задовольнить, наприклад, по часу розрахунку, забезпечуючи при цьому достатню точність параметрів газового потоку.

Результати аналізу підтверджують адекватність математичної моделі, яка враховує ефект Джоуля-Томсона, для ДГГ ВД та ефективність запропонованих модифікованого методу Ньютона та відповідного алгоритму.

Побудовані графіки комерційної витрати, тиску та температури дозволяють візуально оцінити динаміку параметрів газового потоку залежно від часу та відстані.

Експериментальні дані вказують на необхідність балансу між точністю розрахунків та витратами обчислювальних ресурсів, що є важливим при практичному застосуванні моделі для оптимізації роботи ГТС.

ВИСНОВКИ

В результаті виконання кваліфікаційної роботи було обрано математичну модель нестационарного режиму течії газу по ділянці газогону великого діаметру, яка враховує ефект Джоуля-Томсона. Вона базується на системі гіперболічних диференціальних рівнянь у часткових похідних. Для чисельного розв'язання рівнянь моделі використано метод скінченних різниць із неявною схемою та модифікований метод Ньютона, який забезпечує швидку збіжність для нелінійних систем.

Розроблений програмний продукт у середовищі Mathematica 14.1 дозволяє задавати параметри системи, виконувати розрахунки, виводити чисельні результати у вигляді таблиць та будувати графіки динаміки параметрів газового потоку. У ході обчислювального експерименту продемонстровано вплив кількості точок розбиття на точність розрахунків і час виконання програми.

Результати чисельного аналізу підтверджують адекватність обраної математичної моделі, яка враховує ефект Джоуля-Томсона, для ДГГ ВД та ефективність запропонованого модифікованого методу Ньютона.

Практична цінність розробленого продукту полягає у можливості прогнозування поведінки газотранспортної системи за змінних умов роботи, що може бути застосовано для оптимізації транспортування газу, зниження енергетичних витрат, підвищення надійності роботи системи та мінімізації ризиків аварій.

Результати кваліфікаційної роботи можуть бути впроваджені в енергетичних компаніях для автоматизації моніторингу та управління газотранспортними системами. Подальші дослідження доцільно спрямувати на порівняння використаного методу з іншими чисельними підходами, розробку оптимізаційних алгоритмів для зменшення обчислювальних витрат та адаптацію моделі для моделювання більш складних систем газопостачання.

ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

1. Гусарова І. Г., Дашківський Р. Б. Застосування модифікованого методу Ньютона при моделюванні перехідних режимів по ділянці газогону великого діаметру. *Education and science of today: intersectoral issues and development of sciences: Collection of scientific papers «ΛΟΓΟΣ» with Proceedings of the VII International Scientific and Practical Conference, Cambridge, October 18, 2024. Cambridge-Vinnitsia : P.C. Publishing House & UKRLOGOS Group LLC, 2024. P.197–199.*
2. Шамровський О. Д. Системний аналіз: математичні методи та застосування : навч. пос. Львів : «Магнолія 2006», 2010. 275 с.
3. Husarova I. H., Tevyashev A. D. & Tevyasheva O. A. Mathematical modeling of non-stationary gas flow modes along a linear section of a gas transmission system. *Mathematical Modeling and Computing*. 2022. Vol. 9, No. 2. P. 416–430.
4. Фельдман Л. П., Петренко А. І., Дмитрієва О. А. Чисельні методи в інформатиці. Київ : Видавнича група «ВНУ», 2006. 480 с.
5. Гусарова І. Г., Меліневський Д. В. Чисельне моделювання перехідних режимів течії газу з використанням різних скінченно-різницевих сіток. *Системи обробки інформації*. 2017. № 2. С. 29–33.
6. Chen Z. Finite Elements Methods and Their Applications. Leipzig : Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005. 410 с.
7. Гусарова І. Г., Соловійов О. М. Застосування методу Бройдена при комп'ютерному моделюванні перехідних режимів течії газу. *Системи обробки інформації*. 2019. № 2. С. 33–39.
8. Глущенко Б. С. Застосування модифікованого методу Ньютона при моделюванні нестационарних режимів течії газу. *22-й Міжнародний молодіжний форум «Радіoeлектроніка та молодь у XXI столітті»: зб. матеріалів форуму (м. Харків, 17-19 квітня 2018 р.)*. Т. 7. Харків : ХНУРЕ, 2018. С. 70–71.
9. Гусарова І. Г., Глущенко Б. С. Чисельне моделювання нестационарних режимів течії газу із застосуванням модифікованого методу Ньютона. *Матері-*

али Міжнародної науково-практичної конференції «Інформаційні технології та системи»: тези доповідей, 10-11 квітня 2019 р. Харків : ХНЕУ імені Семена Кузнеця, 2019. С.5.

10. Wikipedia, Wolfram Mathematica URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Wolfram_Mathematica (дата звернення: 26.12.2024).

11. Wolfram Mathematica Official Site, Summary of New and Improved Features in 14.1 URL: <https://reference.wolfram.com/language/guide/SummaryOfNewFeaturesIn141.html> (дата звернення: 26.12.2024).