К ВОПРОСУ ОБ АЛГОРИТМАХ ЭКВИВАЛЕНТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СЕТЕЙ

А. А. Волков, В. М. Михайленко

Харьков

Пусть топология сети задана некоторым графом G в пространстве (V, θ), образованным множеством V дуг $v_i \in V$ и множеством θ циклов (контурных подмножеств дуг) графа. Для каждой дуги задано также целое число $q_i^{(\omega)}(v_i)$ (оно может быть и отрицательным), которое назовем избытком в i-ой ветви.

Возникает задача: исключая некоторые наперед заданные пути в графе, определить состояние сети и ее потоки, совместимые с избытками в ветвях. Состояние сети в этом случае определяется, согласно [3], уравнениями для ветвей сети и системой матричных уравнений, полученных из топологии сети. В статье рассматривается разработка алгоритмов эквивалентного преобразования сетей для получения матричных уравнений, исчерпывающе определяющих топологию таких сетей. Исключение ветвей сети равносильно постановке в этих ветвях сопротивлений потоку $r_i = \infty$, что практически приводит к получению $q_i = 0$ (q_i — поток в i-ой ветви). Такое исключение ветви (ветвей) сети эквивалентно исключению k-го узла сети, инцидентного k-ой ветви и, безусловно, приводит к упрощению сети.

Предположим, что число v_i дуг графа равно m, а число вершин $n+1$.

Алгоритм 1

Пронумеруем все вершины и первые n дуг данного графа следующим образом. Обозначим начальную вершину (вершину входа общего потока) через x_1, а инцидентную ей дугу через v_1, удалив x_1 и v_1; снова найдем вершину x_2 и инцидентное ей ребро v_2 и т. д. При этом образуется дерево графа, содержащее все его n пронумерованных дуг. Оставшиеся $s = m - n$ непронумерованных дуг будут соответствовать ветвям антидерева графа, т. е. базису его независимых циклов. Принимаем направление независимых циклов графа, т. е. циклов, содержащих только одну дугу антидерева графа (по одной на каждый цикл). Контуры $\theta_k (k = 1, \ldots, m-n)$ и дуги $v_i (i = 1, \ldots, m)$ антидерева графа будем нумеровать таким образом, чтобы их индексы определялись зависимостью

$$k = i - n; \ (i \geqslant n + 1 \geqslant m).$$

Эта нумерация циклов и дуг сильно связного графа дает возможность представить матрицу инциденций для дуг v_i и циклов θ_k графа в виде упорядоченной матрицы $B = \| B_1, B_2 \|$ независимых циклов графа

содержащей единичную подматрицу $B_2 = E^{m-n}$ и прямоугольную матрицу $B_1 = \| b_{ik} \|$, $(i = 1, \ldots, s;\ k = 1, \ldots, n)$, которая исчерпывающе определяет топологию сети до ее преобразования.

Проведем сечение через вершину входа общего потока x_1 и конечную вершину x_k (вершину выхода общего потока), отличную от x_{n+1}. Это позволяет разбить сеть на две части — внешнюю и внутреннюю. Здесь рассматривается случай, когда общей частью внешней и внутренней частей сети является путь из дуг последовательности, входящих в дерево сети. Зададим возможно исключаемые ветви подграфа, соответствующего внешней части сети, некоторым подмножеством индексов дуг $|I_j|$, $j \in I_j$, $j = m - n - k_2, \ldots, m - n - k_2 - k_1$ и подмножеством $|I_l|$, $l \in I_l$, $l = m - n, \ldots, m - n - k_1$ — исключаемые ветви подграфа, соответствующие внутренней части сети, где k_2 и k_1 — соответственно количество исключаемых ветвей во внешней и внутренней частях сети.

Возможны три варианта исключения ветвей сети:

а) ветви исключаются из числа k_2;

б) » » » » k_1;

в) » » » » k_2 и k_1.

Следует заметить, что в любом из этих вариантов исключение ветви эквивалентно в частном случае исключению узла, но так как каждое дерево имеет по меньшей мере две вершины [1], то в общем случае оно эквивалентно исключению двух узлов.

Алгоритм II

Вариант 1.

а) При исключении I_l-ой ветви I_p ветвей сохраняют свои индексы; $p = 1, 2, \ldots, l + 1 - n - z_1$, где z_1 — количество исключаемых узлов.

б) Ветви от $l + 1 - n - z_1 + 1$ до $m - 2z_1$, если исключаемому узлу инцидентны не более трех дуг, нумеруем следующим образом:

I_{l+1}-ая ветвь получает индекс l; $I_{(l+2)}$-ая — $l + 1$ и т. д.

Направление ветви, которая компенсирует исключаемый путь, определяется методом, подтверждаемым нижеследующими математическими выкладками.

Как показано в [2], в линейном графе, изоморфном некоторой системе однородных линейных уравнений, всякой переменной q_r сопоставлен узел, а узлы соединены направленными ветвями, каждая из которых связана передачей ветви t_{rp} таким образом, что выполняется условие

$$q_r = \sum_p t_{rp} q_r, \tag{1}$$

где t_{rp} — передача ветви (в общем случае коэффициент системы линейных уравнений), направленной от узла r к узлу p.

Очевидно, что исключение узла (узлов) в линейном графе соответствует линейным преобразованиям в системе линейных уравнений. При этом любой узел может быть исключен вместе со всеми инцидентными в нем ветвями при замещении пути, образованного исключенными ветвями, новой ветвью с передачей, равной передаче исключаемого пути.

Исключим узел x_r, соответствующий переменной q_r. По формуле (1) находим

$$q_r = \frac{1}{1 - t_{rr}} (t_{1r} q_1 + t_{2r} q_2 + \ldots + t_{pr} q_r + \ldots + t_{sr} q_s), \tag{1a}$$

где q_s — число переменных.

Подставив (1а) для q_r в (1) для q_p, получим

$$q_p = t_{1p}q_1 + t_{2p}q_2 + \ldots + \frac{t_{rp}}{1-t_{rr}}(t_{1r}q_1 + t_{2r}q_r + \ldots + t_{pr}q_p + \ldots$$

$$\ldots + t_{sr}q_s) + \ldots + t_{pp}q_p + \ldots + t_{sp}q_s = t_{1p}q_1 + t_{2p}q_2 + \ldots$$

$$\ldots + \left(\frac{t_{1r}t_{2p}}{1-t_{rr}}q_1 + \frac{t_{2r}t_{rp}}{1-t_{rr}}q_2 + \ldots + \frac{t_{pr}t_{rp}}{1-t_{rr}} + \ldots + \frac{t_{sr}t_{rp}}{1-t_{rr}}q_s\right) + \ldots$$

$$\ldots + t_{pp}q_p + \ldots + t_{sp}q_s. \qquad (1б)$$

Члены вида $\frac{t_{ir}t_{rp}}{1-t_{rr}}$ $(i = 1, \ldots, s;\ i \neq r)$ представляют в графе вновь появившиеся после исключения ветви с передачей $\frac{t_{ir}t_{rp}}{1-t_{rr}}$. Для сетей, топология которых определяется матрицей B_1, t_{ir} и t_{rp} соответственно равны элементам b_{ir} и b_{rp} матрицы B_1.

Используя [3], легко доказать, что, если $t_{ir}t_{rp} = -1$, компенсируемая ветвь имеет направление ветви с индексом $j+1$, если $t_{ir}t_{rp} = 1$, то — противоположное.

Таким образом, матрицы B^*_{1i}, определяющие топологию преобразованных сетей, получаем вычеркиванием и смещением столбцов и строк матрицы B_1 по правилам, указанным в (1а), (1б) (вариант 1).

Порядок матриц B^*_{1i} $(i = 1, 2, \ldots, k_2 + k_1)$ равен $(n-1)(m-n-1), \ldots, (n-1-k_2-k_1)(m-n-1-k_2-k_1)$ соответственно исключению одной, ..., $(k_2 + k_1)$ ветвей.

Вариант 2. а) Ветви дерева с индексами I_t $(t = 1, 2, \ldots, n)$, за исключением ветвей из числа n (они при нумерации пропускаются), инцидентные исключаемым узлам, сохраняют свою нумерацию.

б) Остальные $(m-n-2z_1)$ до $(m-2z_1)$ нумеруются следующим образом:

$I_{(l+1)}$-ая ветвь получает индекс l; $I_{(l+2)}$-ая — индекс $l+1$ и т. д.;
$I_{(j+1)}$-ая » » » j; $I_{(j+2)}$-ая — индекс $j+1$ и т. д.

Направление компенсируемых ветвей определяем методом, указанным выше.

Условные матрицы B^*_{1i} получаются вычеркиванием и смещением строк и столбцов матрицы B_1 по правилам, указанным в варианте 2 (а, б).

Вариант 3 является комбинацией вариантов 1 и 2. В связи с этим не представляет трудности получение правил (а), (б) для варианта 3, а значит, и матриц B^*_{1i}.

Полученные условные матрицы B^*_{1i} позволяют составить, согласно [3], систему матричных уравнений

$$\bar{q}_1 = -B^*_1\bar{q}_{11};$$
$$\bar{h}_{11} = -B_1\bar{h}_1, \qquad (2)$$

определяющих связь между напорами h_i и потоками q_i в различных ветвях сети.

Здесь

$$\bar{q}_1 = (q_1 \pm q_1^{(u)}, \ldots, q_n \pm q_n^{(u)});\quad \bar{h}_1 = (h_1 \pm h_1^{(u)}, \ldots, h_n \pm h_n^{(u)}) —$$

мерные векторы расходов и напоров в ветвях, соответствующих выбранному дереву графа сети;

$$\bar{q}_{11} = (q_{n+1} \pm q_{n+1}^{(u)}, \ldots, q_m \pm q_m^{(u)});$$

$$\overline{h}_{II} = (h_{n+1} \pm h_{n+1}^{(u)}, \ldots, h_m \pm h_m^{(u)}) —$$

— мерные векторы расходов и напоров в ветвях, соответствующих антидереву графа, имеющего $(n + 1 - z_1)$ вершин.

Алгоритмы I и II позволяют легко переложить на язык ЭВМ задачу автоматического поиска исключаемых ветвей и преобразования сети к исходному для вычислений виду. Это особенно важно при эквивалентном преобразовании сетей, имеющих более 100 ветвей и 50 независимых циклов.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Берж. Теория графов и ее применение. Изд-во иностр. лит-ры, 1962.

2. Э. Хоменко. Об использовании теории линейных графов в решении систем линейных уравнений. Вопросы теоретической кибернетики. Изд-во «Наукова думка», 1965.

3. А. Волков, А. Евдокимов, Р. Волколупова. К вопросу топологического анализа шахтных вентиляционных сетей. «Изв. вузов, Горный журнал», № 1, 1967.