

СИНТЕЗ АЛГОРИТМОВ КРИТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

В.А.Тимофеев

In this paper input signals spaces that are used in critical control systems synthesis are considered and analyzed. The control law structure for ARMAX-plant in spaces $L(m,\delta)$ and $D(m,\delta)$ are proposed.

Введение

Эффективность решения задачи синтеза системы управления реальным объектом в значительной степени зависит от того, насколько полной является информация об исследуемом объекте и об условиях его функционирования. Наличие такой информации существенно упрощает задачу, а ее отсутствие требует применения специальных методов, в частности адаптивных, позволяющих получать некоторые законы управления, корректируемые по мере поступления новых сведений об объекте и окружающей среде. Однако и такие методы требуют определенной информации, например, знание вида закона распределения сигналов и помех и т.д. [1,2]. Если же принятое предположение о виде закона распределения оказывается неверным, то синтезированный закон управления будет далеко не оптимальным.

В этих условиях достаточно эффективными являются алгоритмы критического управления, т.е. управления, обеспечивающего поддержание некоторых характеристик объекта управления V (например, выходного сигнала объекта, ошибки управления и т.д.) внутри априорно задаваемых границ независимо от характера возмущений [3]

$$|V(t, w) \leq E, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

где t - непрерывное или дискретное время; w - внешние сигналы, отражающие влияние окружающей среды; E - заданная пороговая величина.

При рассмотрении критических систем достаточно популярной оказалось представление системы управления $S_D(P, C)$ так, как это показано на рис. 1.

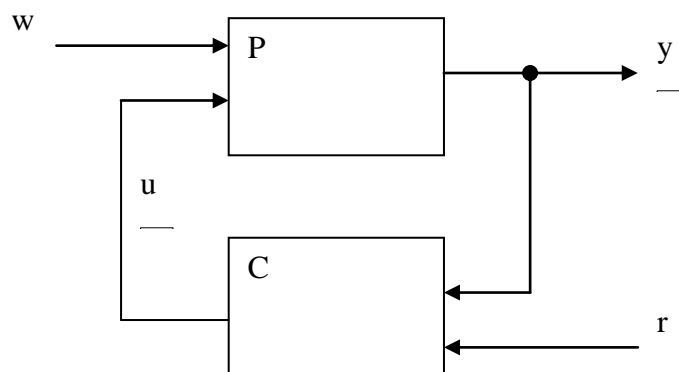


Рис. 1 – Замкнутая система $S_D(P, C)$

Здесь введены следующие обозначения: r – внешний задающий сигнал, w – возмущение, u – управляющий сигнал; y – выход объекта управления; $P:(u, w) \rightarrow y$ – описание объекта; $C:(r, y) \rightarrow u$ – описание закона управления. В дальнейшем внешние входы w и r будем обозначать одним символом w , а выходные сигналы y и ошибку $e = r - y$ будем рассматривать как обобщенный выход системы \mathcal{Y} .

Для синтеза системы критического управления требуется предварительное построение как моделей собственно объекта управления, так и окружающей среды. И если модель объекта может быть описана в терминах “вход – выход”, то влияние окружающей среды может быть учтено с помощью специального описания сигналов, действующих на объект.

Выбор того или иного способа описания внешних сигналов является определяющим при выборе конкретного метода синтеза закона управления. В настоящее время широко применяются пространства $L(m, \delta)$ и $L(N, m_0, \delta_0)$, позволяющие учитывать ограничения на амплитуды входных сигналов, и $D(m, \delta)$ и $D(N, m_0, \delta_0)$, вводящие ограничения на производные этих же сигналов. Здесь N говорит о том, что сигнал w представляет собой сумму N сигналов [4, 5].

Постановка задачи

Пусть управляемый объект P описывается ARMAX-моделью

$$Ay(k) = q^{-d}Bu(k) + Cw(k), \quad (2)$$

где A, B и C - полиномы, имеющие соответственно вид

$$\begin{aligned} A &= 1 + a_1q^{-1} + \dots + b_nq^{-n}, \\ B &= b_0 + b_1q^{-1} + \dots + b_mq^{-m}, \\ C &= 1 + c_1q^{-1} + \dots + c_lq^{-l}, \end{aligned}$$

а $y(k), u(k), w(k)$ – выходной, входной и возмущающий сигналы соответственно в дискретный момент времени k ; $d \geq 1$ – время чистого запаздывания в канале управления; q^{-1} – оператор сдвига назад; n, m и l – порядки полиномов A, B и C соответственно.

Необходимо получить законы управления при условии, что используются различные пространства входных сигналов.

Пространства входных сигналов

Пространство входных сигналов $L(m, \delta)$ образуется временной последовательностью $\omega(k)$ такой, что $\omega(k) = 0$ при $k < 0$, а для $k \geq 0$ и $m \in [1, \infty]$ и $\delta \in (0, \infty)$

$$\|w\|_m \leq \delta. \quad (3)$$

При $m = \infty$ получаем пространство $L(\infty, \delta)$, содержащее элементы ω , произвольно имеющиеся в любой момент времени $t \in \mathbb{N}^+$ в рамках жёстких ограничений $\|\omega\|_\infty \leq \delta$.

Так, например, сигнал $\delta \cdot \sin t \cdot \cos t$ является элементом $L(\infty, \delta)$. Входные сигналы, рассматриваемые в задаче l^1 - оптимизации, также принадлежат $L(\infty, \delta)$ [6, 7]. Реальные стохастические возмущения, действующие на систему, также зачастую могут рассматриваться как элементы $L(\infty, \delta)$, являющимся таким образом пространством ограниченных входных сигналов.

Заметим также, что в частном случае при $m = 2$, пространство входов $L(2, \delta)$ описывает сигналы с ограниченной энергетикой, встречающиеся наиболее часто в задачах H^∞ - оптимизации [8, 9].

В случае, если $m \in [1, \infty)$, а некоторая переменная $\varepsilon \in (0, \infty)$, рассматриваемое пространство является подпространством $L(m+\varepsilon, \delta)$, т.е. $L(m, \delta) \subset L(m+\varepsilon, \delta)$. Несложно видеть, что для всех $w \in L(m, \delta)$ в случае $g = w \|w\|_\infty^{-1}$ следует

$$\|w\|_m = \|w\|_\infty \|g\|_m,$$

при этом

$$\begin{cases} |g_i| \leq 1, i \in \mathbb{N}^+, \\ \|g\|_n \geq 1, n \in [1, \infty). \end{cases}$$

Поскольку $\varepsilon \in (0, \infty)$ и $m \in [1, \infty)$, то

$$\begin{aligned} \|w\|_{m+\varepsilon} &= \|w\|_\infty \|g\|_{m+\varepsilon} = \|w\|_\infty \left(\sum_{i=0}^{\infty} |g_i|^{m+\varepsilon} \right)^{\frac{1}{m+\varepsilon}} \leq \\ &\leq \|w\|_\infty \left(\sum_{i=0}^{\infty} |g_i|^m \right)^{\frac{1}{m+\varepsilon}} \leq \|w\|_\infty \left(\sum_{i=0}^{\infty} |g_i|^m \right)^{\frac{1}{m}} = \|w\|_\infty \|g\|_m. \end{aligned}$$

Следовательно, $\|w\|_{m+\varepsilon} \leq \delta$, откуда следует, что для $m \in [1, \infty)$ и $\varepsilon \in (1, \infty)$, $L(m, \delta) \subseteq L(m+\varepsilon, \delta)$. Чтобы проверить это неравенство, выберем некоторую последовательность $\omega_i^* = 2^{-1/(m+\varepsilon)} \delta$ для $i = 0, 1$ и $\omega_i^* = 0$ в остальных случаях. Тогда $w^* \notin L(m, \delta)$, но $w^* \in L(m+\varepsilon, \delta)$.

Кроме того, для $m \in [1, \infty)$ можно записать $L(m, \delta) \subset L(\infty, \delta)$. Данное свойство следует из определения $L(m, \delta)$, а кроме того, можно показать, что

$$L(1, \delta) \subset L(2, \delta) \subset \dots \subset L(\infty, \delta).$$

Обобщением данного пространства является комплексное пространство

$$L(N, m_0, \delta_0) = \left\{ \sum_{j=1}^N \omega^{(j)} : \omega^{(j)} \in L(m_{0j}, \delta_{0j}), \text{ при } j = 1, 2, \dots, N \right\}.$$

При синтезе цифровых систем управления более эффективным представляется использование дискретных пространств $D(m, \delta)$ и $D(N, m_0, \delta_0)$, позволяющих учитывать не только амплитуды входных сигналов, но и их вариации.

В общем случае входное пространство $D(m, \delta)$ образуется множеством возможных последовательностей ω таких, что

$$\begin{cases} \sup \left\{ \sum_{i=k}^{k+m} |\Delta w(i)| : k \in \mathbb{N} \right\} \leq \delta; \\ |w(k)| < \infty, \text{ для } k \in \mathbb{N} \end{cases}, \quad (4)$$

где $S \in (0, \infty)$, $m \in \mathbb{N}^+$ а $\Delta \omega$ представляет собой изменение (обычно первую разность) входного сигнала

$$\Delta w(k) = w(k) - w(k-1) \Delta.$$

Из (4) следует, что пространство $D(m, \delta)$ вводит ограничения на скорость изменения входных сигналов. Для частного случая $m=0$, пространство $D(0, \delta)$ включает все последовательности с ограниченной первой разностью

$$\sup \{ |\Delta \omega(k) : k \in \mathbb{N} \} \leq \delta$$

и в теории управления обычно называется устойчивым входным пространством. Противоположностью $D(0, \delta)$ является пространство $D(\infty, \delta)$, именуемое переходным и определяемое выражением

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta w(k) = 0.$$

В общем случае пространство $D(m, \delta)$ описывает как устойчивые, так и переходные режимы, при этом если $0 < m < \infty$ и $0 < r \leq m$, то

$$D(m-r, \frac{\delta}{r+1}) \subset D(m, \delta).$$

Несложно видеть, что при $0 < r \leq m$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=k}^{k+m} |\Delta\omega(i)| \leq \sum_{i=k}^{k+m-r} |\Delta\omega(i)| + \sum_{i=k}^{k+m-r} |\Delta\omega(i+1)| + \dots + \sum_{i=k}^{k+m-r} |\Delta\omega(i+r)|. \quad (5)$$

Тогда для всех $w \in D(m-r, \delta(r+1)^{-1})$ имеем

$$\sum_{i=k}^{k+m-r} |\Delta\omega(i)| \leq \frac{\delta}{r+1}, \forall k \in \mathbb{N}, \quad (6)$$

после чего, подставляя (6) в (5), получаем

$$\sum_{i=k}^{t+m} |\Delta\omega(i)| \leq (r+1) \frac{\delta}{r+1} = \delta, \forall t \in \mathbb{N},$$

что означает, что все $w \in (m-r, \delta(r+1)^{-1})$ принадлежат $D(m, \delta)$. т.е.

$$D(m-r, \frac{\delta}{r+1}) \subseteq D(m, \delta).$$

Данные рассуждения приводят к следующим выводам:

$$D(m, \delta) \subset D(m-1, \delta)$$

и

$$D(m-1, \frac{\delta}{2}) \subset D(m, \delta) \subset D(m-1, \delta),$$

показывающим, насколько больше $D(m-1, \delta)$ по сравнению с $D(m, \delta)$.

Обобщением этого пространства является комплексное пространство $D(N, m_0, \delta_0)$, образованное множеством последовательностей

$$\omega = \sum_{j=1}^N \omega(j), \quad (7)$$

удовлетворяющих условию

$$(\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \dots, \omega^{(N)}) \in D(m_{01}, \delta_{01}) \times D(m_{02}, \delta_{02}) \times \dots \times D(m_{0N}, \delta_{0N}).$$

Структуры закона управления

Рассмотрим введенную выше дискретную систему $S_D(P, C)$ и дискретное пространство входов E . Положим $\bar{w} = (r, w)$ и запишем соотношение

$$v(\bar{w}, c): k \rightarrow v(k, \bar{w}, c), k \in \mathbb{N},$$

определяющее зависимость между выходом системы, внешними входами \bar{w} и структурой закона управления C .

Тогда эффективность функционирования такой системы в общем случае определяется критерием

$$J_E(c) = \sup \{ |v(k, w, c)| : k \in \mathbb{N}, w \in E \}$$

или, в первом приближении, максимальным абсолютным значением обобщенного выхода v при всех возможных входах $w \in E$ на временном интервале $c \in \mathbb{N}$.

В критических системах управления главной целью является поддержание достаточно малого уровня выходного сигнала на всём интервале управления, что может быть выражено в форме неравенства

$$J_E(c) \leq \varepsilon_d.$$

где ε_d - положительная величина, определяющая максимально возможное значение $J_E(c)$.

Вместе с тем, как уже отмечалось выше, реальная задача управления описывается множеством критериев, заданных в форме системы неравенств.

Рассмотрим далее систему критического закона управления в пространстве входов $L(m_i, \delta_i)$, обеспечивающего устойчивое поддержание системы неравенств

$$J_L(c, m_i) \leq \varepsilon_i, i = 0, 1, 2, \dots, M,$$

где число M задает количество всех ограничений, которые должны поддерживаться в процессе функционирования системы.

Заметим также, что в задаче с одним критерием $J_L(c, \infty) \leq \varepsilon_1$ и входами, принадлежащими $L(\infty, 1)$, проблема синтеза сводится к минимизации

$$\varepsilon_1 \min \{J_L(c, \infty)\}$$

и эквивалентна задаче Γ^1 - оптимизации.

Положим также что полиномы A и $q^d B$, входящие в (2), являются взаимно простыми. Тогда справедливы следующие равенства

$$\begin{aligned} AF + q^d E &= C, \\ AQ + q^d BP &= C, \end{aligned} \quad (8)$$

где полиномы $F \in R(q, d-1)$ с $f_0 = 1$, $E \in R(q, \bar{n}-1)$, $Q \in R(q, d+\bar{m}-1)$ с $q_0 = 1$, $P \in R(q, \bar{n}-1)$ единственны.

Используя параметризацию, введенную в [12], можно записать структуру закона управления $C: \rightarrow y \rightarrow n$ в виде

$$C = (P + \bar{R}A)(Q - \bar{R}q^{-d}B)^{-1}, \bar{R} \in \bar{A}_1, \quad (9)$$

где P и Q определяются уравнением (8).

Используя (2) и (9) можно определить соотношение между выходным сигналом y и внешним возмущающим сигналом ω в форме

$$y(k) = (Q - \bar{R}q^{-d}B)\omega(k), \quad (10)$$

а также дать оценку значению критерия оптимизации

$$J_L(C, m) = \left\| Q - \bar{R}q^{-d}B \right\|_{\bar{A}_n} \delta, \quad (11)$$

где $n^{-1} + m^{-1} = 1$.

Оценка (11) может быть получена из следующих соображений. Введем полином

$$H = Q - \bar{R}q^{-d}B$$

и запишем очевидное выражение, следующее из (10)

$$y(k) = \sum_{i=0}^k h_i \omega(k-i). \quad (12)$$

С учетом того, что $\omega \in L(m, \delta)$, а $n^{-1} + m^{-1} = 1$ и используя неравенство Холдера [58], можно записать

$$J_L(C, m) \leq \left\| Q - \bar{R}q^{-d}B \right\|_{\bar{A}_n} \delta. \quad (13)$$

Для каждого $k \in N^+$ существует $\omega^* \in L(m, \delta)$, определяемая соотношением

$$\omega^*(k-i) = \begin{cases} \delta |h_i|^{n-1} \|H\|_{\bar{A}_n}^{1-n} \text{sign}(h_i), 0 \leq i \leq k; \\ 0, i \in (-\infty, 0) \vee i \in (k, +\infty) \end{cases}. \quad (14)$$

Подставляя (14) в (12), получаем

$$y^*(k) = \sum_{i=0}^k |h_i|^n \|H\|_{\bar{A}_n}^{1-n} \delta.$$

Поскольку при $k \rightarrow \infty$

$$y(\infty) = \|H\|_{\bar{A}_n} \delta,$$

то

$$J_L(C, m) \geq \|Q - \bar{R}q^{-d}B\|_{\bar{A}_n} \delta. \quad (15)$$

Из (13) и (15) следует справедливость (11).

В самом общем случае полином при управляющих воздействиях B может быть представлен в виде произведения $B_1 \cdot B_2$, где нули B_1 лежат вне единичного круга, а нули B_2 - внутри него. Положив $R = \bar{R}B_1$, можно ввести соотношение

$$Q - \bar{R}q^{-d}B = Q - Rq^{-d}B_2,$$

после чего, используя (8), записать

$$Q = F + Dq^{-d},$$

где $D \in R(q, \bar{m} - 1)$.

Итак, поскольку

$$Q - \bar{R}q^{-d}B = F + (D - RB_2)q^{-d}$$

и

$$\|Q - \bar{R}q^{-d}B\|_{\bar{A}_n} = (\|F\|_{\bar{A}_n}^n + \|D - RB_2\|_{\bar{A}_n}^n)^{\frac{1}{n}},$$

можно заметить, что задача минимизации $\|Q - \bar{R}q^{-d}B\|_{\bar{A}_n}$ может быть сведена к минимизации $\|D - RB_2\|_{\bar{A}_n}$, т.е.

$$\min_{R \in \bar{A}_1} \left\{ \|Q - \bar{R}q^{-d}B\|_{\bar{A}_n} \right\} \ll \min_{R \in \bar{A}_1} \left\{ \|D - RB_2\|_{\bar{A}_n} \right\}.$$

Таким образом, характеристики закона управления определяются свойствами полинома R , т.е. вместо $J_L(C, m_i)$ законно использование $J_L(R, m_i)$. В этом случае задача синтеза закона управления может быть переформулирована следующим образом: при заданных полиномах $D \in R(q, \bar{m} - 1)$, $B_2 \in R(q, r)$ и $d \in \mathbb{N}^+$ найти полином R , обеспечивающий выполнение системы неравенств

$$J_L(R, m_i) \leq \varepsilon_i, i = 0, 1, \dots, M. \quad (16)$$

Обозначим через R^0 полином $R \in \bar{A}_1$, обеспечивающий выполнение (16). Тогда в качестве допустимого закона управления можно использовать

$$C^0 = (PB_1 + R^0A)((Q - R^0q^{-d}B_2)B_1)^{-1}, \quad (17)$$

при этом в общем случае может существовать множество $R \in \bar{A}_1$, удовлетворяющих (16).

Выводы

Таким образом, в настоящей статье рассмотрены и проанализированы пространства входных сигналов, используемые при синтезе критических систем управления. Предложена структура закона управления для ARMAX-объекта в пространствах $L(m, \delta)$, $L(N, m_0, \delta_0)$, $D(m, \delta)$ и $D(N, m_0, \delta_0)$.

Литература: 1. Изерман Р. 2.Цыпкин Я.З. Основы информационной теории идентификации.-М.: 3.БондаренкоМ.Ф., Тимофеев В.А. Синтез супремального алгоритма управления динамическим объектом.Прикладная радиоэлектроника. № 1, 2003. 4.

Liu G.P., Zakian Y. Sup regulators/ Proc. 29th IEEE Conf. on Decision and Control.-Nawaji, USA,1990.-Pp.2145-2146. 5. Liu G.P., Disturbance space and sup regulator in discrete time// Syst. Control Letters.1992.-v.18.-N1.-P.33-38. 6. Vidyasagar M. Further results of the optimal rejection of persistent bounded disturbances// IEEE Trans. on Aut. Control.-1991.-v.36.-P.642-652. 7. Dehlen M.A., Pearson J.B. l'optimal compensators for discrete-time systems/ Proc.Amer. Control Conf.- Seattle, USA, 1987.-P.1964-1968. 8. Zames G. Feedback and optimal sensitivity model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses// IEEE Trans.on Aut. Control.-1981.- v.26.-N2.-P.301-320. 9. Francis B.A. A Course in H^∞ Control Theory// Lect. Notes Control and Inf. Sci.-v.88.-Berlin:Springer-Verlag.1987.-212p. 10. Luenberger D.G. Optimization by Vector Space Methods.-N.Y.: John Wiley&Sons. Inc.,1969.-412p.

Реферат

Синтез алгоритмів критичного керування з урахуванням впливу оточуючого середовища.

В статті розглянуто простори вхідних сигналів, що використовуються при синтезі критичних систем керування. Запропоновано структуру закону керування для ARMAX-об'єкта у просторах $L(m,\delta)$ та $D(m,\delta)$.