УДК. 681.3

Е. Е. ГЕТМАНОВА, канд. физ.-мат. наук, Д. Б. КОСТАРЕВ

РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ ПРИ ВОЗБУЖДЕНИИ НОРМАЛЬНЫХ МОД В СИСТЕМЕ СВЯЗАННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Изучение условий возбуждения нормальных мод в системе связанных линейных осцилляторов с различными парциальными (собственными) частотами представляет интерес, поскольку подобные системы рассматриваются в механике (колебания связанных маятников [1]), электродинамике (связанные колебательные контуры и сочлененные волноводы [2]) и других разделах физики. В работе [3] рассмотрены колебания в бесконечных цепочках однородных и периодически чередующихся элементов. Однако особенности возбуждения нормальных мод в системе с конечным числом осцилляторов при различных собственных (парциальных) частотах последних изучены недостаточно подробно, хотя представляют несомненный интерес, например, в механике при рассмотрении колебаний, возникающих в вале с насаженными на него дисками, а также в радиотехнике при создании фильтров, состоящих из конечного числа связанных колебательных контуров. В данной работе путем численного анализа показан эффект увеличения частоты нормальной моды колебания и, соответственно, амплитуды колебания в одном из резонаторов при определенном порядке соединения их с различными парциальными частотами.

Рассмотрим систему из связанных осцилляторов (рис. 1, а), закрепленных на легкой струне, на одинаковом расстоянии друг от друга и совершающих продольные колебания. Электрическим аналогом этой цепи является цепочка LC-контуров (рис.1б). Показанные колебательные цепи являются фильтрами низких частот. Изучим, как изменяются частоты нормальных мод и амплитуды колебаний при изменении парциальных частот осцилляторов. Парциальной (собственной), в соответствии со [2] принято называть частоту, которую имеет каждый резонатор при отсутствии связи с другими.

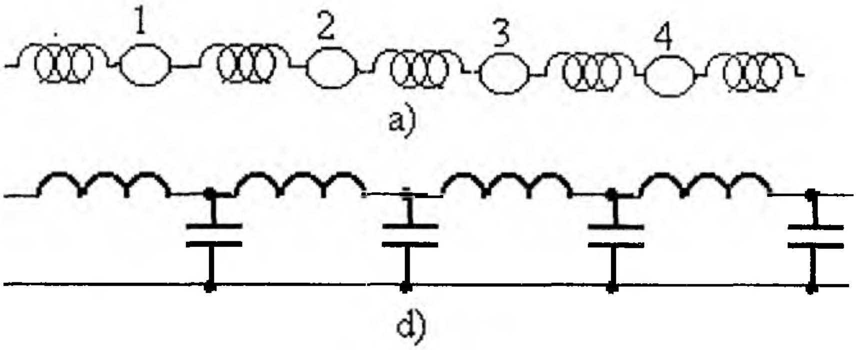


Рис.1 – Система связанных осцилляторов

Уравнения движения для рассматриваемой цепочки (рис.1а) имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = -\omega_{01}^2 x_1 - \omega_{01}^2 (x_1 - x_2) \\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = -\omega_{02}^2 (x_2 - x_1) - \omega_{03}^2 (x_2 - x_3) \\ \vdots \\ \dfrac{d^2x_n}{dt^2} = -\omega_{0n}^2 x_n - \omega_{0n}^2 (x_n - x_{n-1}) \end{cases}, \qquad (1)$$

где ω_{0i} – парциальные частоты каждого осциллятора.

Дисперсионное уравнение можно получить, подставив решения $x_i = X_i \exp(-j\omega t)$, $(j = 1...n)$ в систему уравнений (1). В результате чего получаем

$$\begin{vmatrix} (-x+2) & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & (-x\delta+2) & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & (-x\beta+2) & -1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & (-x\gamma+2) & -1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & (-x\varsigma+2) \end{vmatrix} = 0, \qquad (2)$$

где $\delta = \frac{\omega_{01}^2}{\omega_{02}^2}$, $\beta = \frac{\omega_{01}^2}{\omega_{03}^2}$, $\gamma = \frac{\omega_{01}^2}{\omega_{04}^2}, \ldots \zeta = \frac{\omega_{01}^2}{\omega_{0n}^2}$ – "расстройки" парциальных частот резонаторов, входящих в систему.

Из системы уравнений (2) следует, что при соединении четвертого, пятого и так далее осцилляторов в колебательную цепь характеристическое уравнение определяется следующим соотношением:

$$(-x\rho+2))f_{i-1} - f_{i-2} = 0\ ,$$

где $\rho = \frac{\omega_{01}^2}{\omega_{0i}^2}$ – "расстройка" парциальной частоты, присоединенного резонатора (при соединении четвертого резонатора $\rho = \gamma$ и так далее), f_{i-1}, f_{i-2} – дисперсионные уравнения без одного и двух последовательно присоединенных осцилляторов.

В соответствии со [2], колебания каждого из осцилляторов записываются так::

$$\begin{cases} x_1(t) = C_1\cos(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 k_1 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) + C_3 p_1 \cos(\omega_3 t + \alpha_3) + \cdots + C_n q_1 \cos(\omega_n t + \alpha_n) \\ \vdots \\ x_n(t) = C_1\cos(\omega_1 t + \alpha_1) + C_2 k_n \cos(\omega_2 t + \alpha_2) + C_3 p_n \cos(\omega_3 t + \alpha_3) + \cdots + C_n q_n \cos(\omega_n t + \alpha_n) \end{cases}$$

где величины $k_1,\ldots, k_n$, $p_1,\ldots, p_n$, $q_1,\ldots, q_n$ называются коэффициентами распределения [2], $\omega_1,\ldots\omega_n$ – частоты нормальных колебаний, определяемые из дисперсионного уравнения. Если один из коэффициентов $C_1,\ldots C_n$, которые определяются из начальных условий $\left(x_1(0),\ldots x_n(0), \dot{x}_1(0),\ldots \dot{x}_n(0)\right)$, не равен нулю (при остальных нулевых), то система совершает колебания с одним периодом, так называемые нормальные колебания. Если положить начальные скорости каждого из осцилляторов нулевыми ($\dot{x}_1(0) = 0, \ldots, \dot{x}_n(0) = 0$), то $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ и начальные смещения осцилляторов будут определять амплитуду колебаний осцилляторов.

Численный анализ показал, что эффект резкого увеличения частоты нормальной моды при увеличении парциальной частоты односторонне закрепленного резонатора проявляется при любом количестве связанных осцилляторов. В связи с этим без потери общности продемонстрируем указанный эффект на примере четырех связанных осцилляторов и рассмотрим изменение частоты нормальной моды и амплитуд колебаний осцилляторов при изменении парциальной частоты осциллятора, интегрированного в колебательную систему и односторонне закрепленного.

Зададим начальное смещение для первого колебания в каждой моде $x_{01} = 1$. Тогда начальные смещения остальных колебаний для всех мод определяются условиями:

для первой моды $x_{02} = x_{01}$, $x_{03} = x_{01}$, $x_{04} = x_{01}$,

для второй моды $x_{02} = \frac{k_2}{k_1}x_{01}$, $x_{03} = \frac{k_3}{k_1}x_{01}$, $x_{04} = \frac{k_4}{k_1}x_{01}$,

для третьей моды $x_{02} = \frac{p_2}{p_1}x_{01}$, $x_{03} = \frac{p_3}{p_1}x_{01}$, $x_{04} = \frac{p_4}{p_1}x_{01}$, для четвертой моды $x_{02} = \frac{q_2}{q_1} x_{01}$, $x_{03} = \frac{q_3}{q_1} x_{01}$, $x_{04} = \frac{q_4}{q_1} x_{01}$.

Дисперсионное уравнение после преобразований имеет вид

$$\delta\beta\gamma x^4 - 2x^3[\delta(\beta+\gamma)+\beta\gamma+\delta\beta\gamma] + x^2[4\delta(\beta+\gamma)+3\beta\gamma+3\delta+4\beta+3\gamma] - 2x(3\delta+2\gamma+3\beta+2)+5=0, \quad (3)$$

где $\delta = \frac{\omega_{01}^2}{\omega_{02}^2}$, $\beta = \frac{\omega_{01}^2}{\omega_{03}^2}$, $\gamma = \frac{\omega_{01}^2}{\omega_{04}^2}$ – "расстройки" парциальных частот, $\omega_{01}, \omega_{02}, \omega_{03}, \omega_{04}$ – собственные (парциальные) частоты осцилляторов, входящих в систему. Корни уравнения (3) $x_{1,2,3,4} = \left(\frac{\omega_{1,2,3,4}}{\omega_{01}}\right)^2$ определяют квадраты отношения нормальных частот к парциальной частоте первого осциллятора.

Коэффициенты распределений, определяются соотношениями

$$k_i = -x_i + 2, \quad p_i = (-\delta x_i + 2)k_i - 1,$$
$$q_i = (-x_i\beta + 2)p_i - k_i, \quad i = 1,2,3,4.$$

Парциальные частоты осцилляторов будем менять посредством изменения их массы. Графики зависимости квадрата отношения частоты нормальных мод к парциальной частоте первого осциллятора в зависимости от "расстройки" парциальных частот (отношения масс δ) первого и второго осцилляторов приведены на рис. 2 (номера кривых рисунков соответствуют номерам осцилляторов). Как следует из графиков в диапазоне изменения $0{,}1 \le \delta < 1$ (масса второго осциллятора меньше), частоты всех нормальных мод выше соответствующих частот нормальных при $\delta = 1$, в диапазоне изменения $1 < \delta \le 2$ – ниже.

Если масса второго осциллятора изменяется в пределах $0{,}1 \le \delta \le 1$, то происходит существенное изменение частоты четвертой нормальной моды. Если изменение массы второго осциллятора происходит в пределах $1 < \delta \le 2$, то наибольшее изменение претерпевает частота третьей нормальной моды.

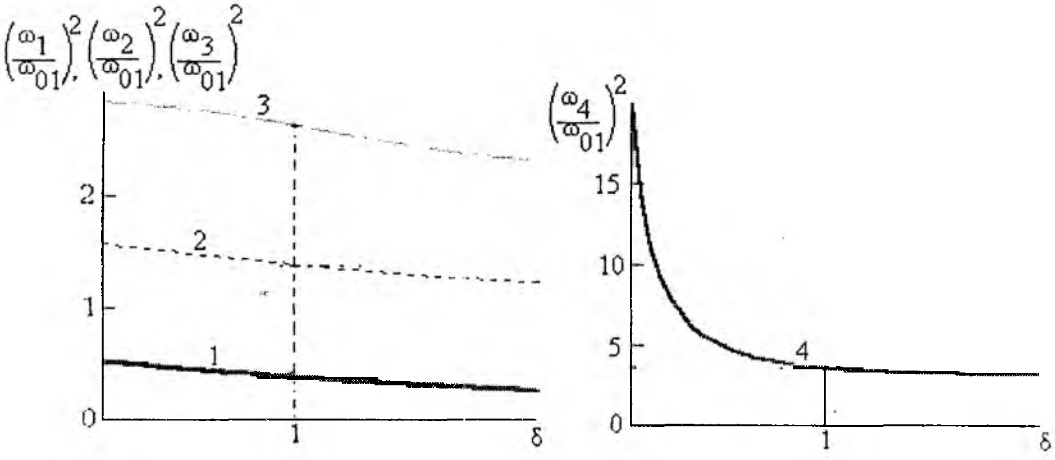
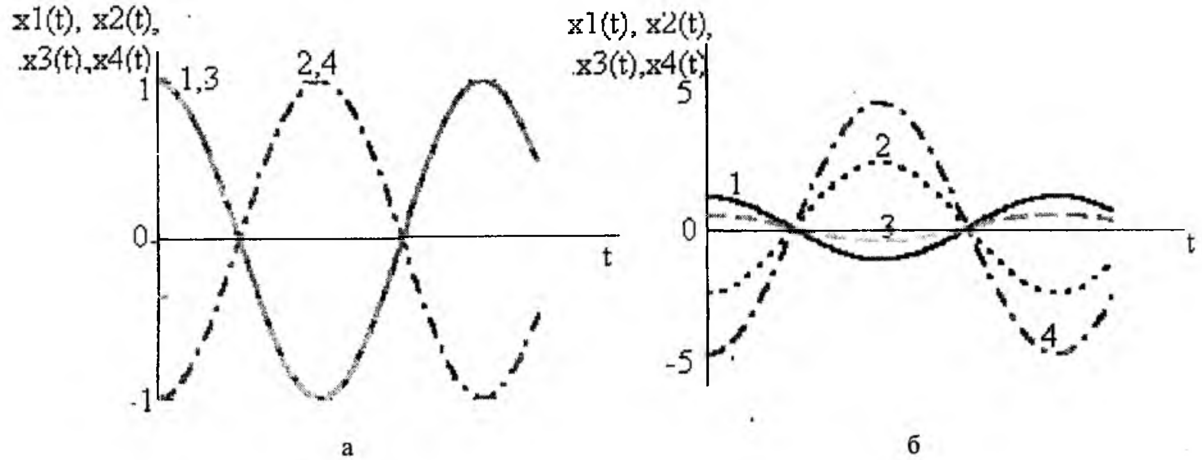


Рис. 2 – Изменение отношения частоты нормальных мод к парциальной частоты первого осциллятора в зависимости от "расстройки" парциальных частот первого и второго осцилляторов.

Увеличение массы второго осциллятора (уменьшение его собственной парциальной частоты) увеличивает его инертность, а следовательно, амплитуду (начальное смещение). Поскольку связь между осцилляторами линейная, то увеличение амплитуды второго осциллятора уменьшает амплитуду третьего и увеличивает амплитуду четвертого, если он в противофазе с третьим, по сравнению со случаем $\delta = \beta = \gamma = 1$ (рис. 3).

Кривая 1 показывает изменение $\left(\frac{\omega_1}{\omega_{01}}\right)^2$, кривая 2 – $\left(\frac{\omega_2}{\omega_{01}}\right)^2$, кривая 3 – $\left(\frac{\omega_3}{\omega_{01}}\right)^2$, кривая 4 – $\left(\frac{\omega_4}{\omega_{01}}\right)^2$.



а б

Рис. 3 – Относительные смещения осцилляторов при возбуждении четвертой нормальной моды при

а) $\delta = \beta = \gamma = 1$, б) $\delta = 2, \beta = \gamma = 1$.

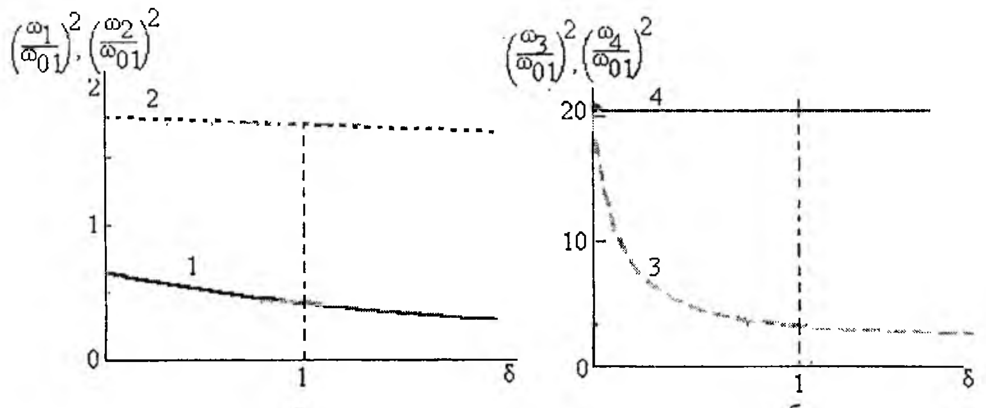
Уменьшение массы второго осциллятора (увеличение его парциальной частоты), приводит к тому, что для возбуждения любой моды необходимо уменьшить начальное смещение (амплитуду) второго осциллятора. Соответственно, смещение третьего осциллятора будет увеличиваться.

Рассмотрим условия возбуждения нормальных мод при изменении парциальной частоты (массы) четвертого односторонне жесткозакрепленного осциллятора. Как следует из графиков (рис. 4), уменьшение массы крайнего осциллятора существенным образом увеличивает частоту четвертой моды: она практически совпадает с собственной (парциальной) частотой колебаний указанного легкого осциллятора, постоянна во всем диапазоне изменения δ и может быть приближенно определена из условия

$$\left(\frac{\omega_4}{\omega_{01}}\right)^2 \approx \frac{2}{\gamma}.$$

Частота третьей моды существенным образом меняется в диапазоне $0{,}1 \le \delta < 1$.

Поскольку данный осциллятор односторонне жестко закреплен, то он в большей степени, чем нежесткозакрепленные, сохраняет индивидуальные свойства, присущие ему как изолированному осциллятору. В результате при увеличении собственной (парциальной) частоты, которая вызывает уменьшение периода колебаний, "подстройка" данного осциллятора под колебания других осуществляется через увеличение начального смещения, т. е. амплитуду колебаний легкого односторонне жесткозакрепленного осциллятора, что и показано на рис. 5 на примере возбуждения третьей и четвертой нормальной моды колебаний. Уменьшение парциальной частоты (увеличение массы) четвертого односторонне закрепленного осциллятора уменьшает частоту четвертой моды, а также и начальное смещение данного осциллятора по сравнению со случаем $\delta = \beta = \gamma = 1$.



а б

Рис. 4 – Изменение отношения частоты нормальных мод к парциальной частоте первого осциллятора в зависимости от "расстройки" парциальных частот первого и второго осцилляторов.

Кривая 1 показывает изменение $\left(\frac{\omega_1}{\omega_{01}}\right)^2$, кривая 2 – $\left(\frac{\omega_2}{\omega_{01}}\right)^2$, кривая 3 – $\left(\frac{\omega_3}{\omega_{01}}\right)^2$, кривая 4 – $\left(\frac{\omega_4}{\omega_{01}}\right)^2$.

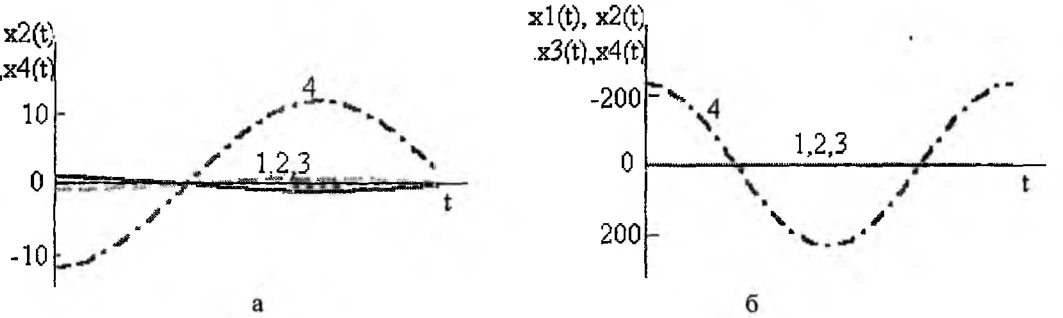


Рис. 5 – Относительные смещения осцилляторов при возбуждении:
а) третьей и б) четвертой нормальных мод $\delta = \beta = 1, \gamma = 0{,}1$.

Проведенное исследование показало, что изменение парциальных частот осцилляторов, включенных в систему, оказывает более сильное воздействие на частоты высших мод, чем на частоты низших.

Увеличение парциальной частоты односторонне жесткозакрепленных осцилляторов (в случае меньших парциальных частот остальных осцилляторов) устанавливает в системе частоту высшей нормальной моды, равной собственной (парциальной) частоте данного осциллятора. При этом величина начального смещения односторонне жестко закрепленного осциллятора на высших модах значительно превышает смещение остальных осцилляторов.

Уменьшение (увеличение) парциальной частоты нежесткозакрепленного осциллятора увеличивает (уменьшает) его начальное смещение и соответствующим образом корректирует начальные смещения остальных осцилляторов.

Таким образом, нежесткозакрепленный осциллятор в большей степени интегрируется в систему, в то время как односторонне жесткозакрепленный сохраняет свои индивидуальные свойства.

Список литературы: [1] *Магнус К.* Колебания. – М.: Мир, 1982. – 303 с. [2] *Мандельштам Л.И.* Лекции по теории колебаний. – М.: Наука, 1972. – 470 с. [3] *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. – М.: Наука, 1979. – 320с.

Харьковский государственный технический университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 27.04.2000