

## ВОЗБУЖДЕНИЕ КОНУСА С ПРОДОЛЬНОЙ ЩЕЛЬЮ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ МАГНИТНЫМ РАДИАЛЬНЫМ ДИПОЛЕМ

### Введение

Изучение импульсного возбуждения структур, имеющих угловые размеры, представляет интерес для ученых. Импульсные режимы работы приборов и аппаратуры широко используются в телевидении, радиолокации, радионавигации и космической связи. В силу широкополосности [2] и способности формировать импульсные поля интерес представляют геометрически нерегулярные и щелевые структурам, например, щелевые конусы [1]. Однако в связи с этим возникают трудности, связанные с построением адекватной математической модели физического процесса [4] и при решении соответствующей начально-краевой задачи. Использование существующих численно-аналитических и численных методов решения начально-краевых задач для структур с вершинами и ребрами нередко приводит к неустойчивым решениям, что влечет за собой появление физически противоречивых результатов [3]. Поэтому возникает необходимость проверки полученного решения путем сравнения с экспериментальными данными или решениями, полученными строгими аналитическими методами.

Целью работы является построение математической модели процесса возбуждения точечным импульсным источником конической антенны с продольными щелями и решение соответствующей модельной начально-краевой задачи с помощью строгих аналитических и численно-аналитических методов.

### Общая постановка задачи

Электрический,  $\chi = 1$ , или магнитный,  $\chi = 2$  диполь расположен в точке  $B_0$  и возбуждает одиночный идеально проводящий полубесконечный круговой конус  $\Sigma$  с  $N$  продольными щелями (рис. 1). Уравнение конуса в сферической системе координат  $r, \varphi, \theta$  задается в виде  $\Sigma: \theta = \gamma$ .

Необходимо определить в присутствии конуса и диполя электромагнитное поле  $\vec{E}(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{H}(\vec{r}, t)$ , удовлетворяющие уравнениям Максвелла, краевым условиям обращения в ноль тангенциальной составляющей поля  $E$ , условию причинности и условию ограниченности энергии. Для упрощения решения поставленной задачи используем потенциал Дебая  $v^{(\chi)}$ , через который выражаются составляющие электромагнитного поля [3,5].

Для решения начально-краевой задачи для  $v^{(\chi)}$  используем функцию Грина  $G^{(\chi)}$ , которая удовлетворяет:

1) волновому уравнению

$$\left( \Delta - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G^{(\chi)}(\vec{r}, t) = -\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \delta(t - t_0), \quad \vec{r} \notin \Sigma;$$

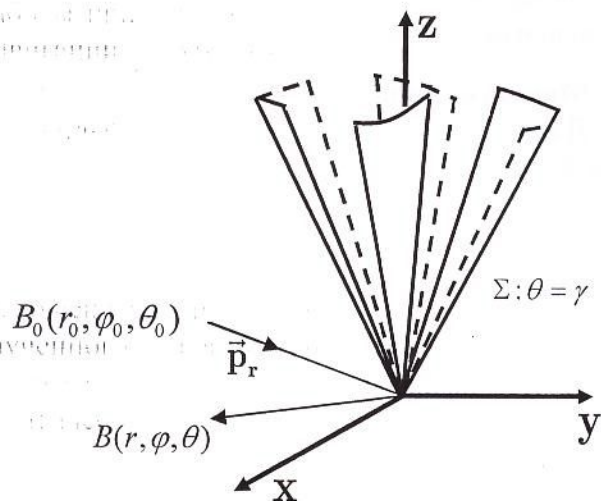


Рис. 1 Конус с продольными щелями

2) начальному условию (условию причинности)

$$G(\chi) = \frac{\partial G(\chi)}{\partial t} = 0, \quad t \leq t_0;$$

3) краевому условию

$$\frac{\partial \chi^{-1}}{\partial \mathbf{n} \chi^{-1}} \left( \frac{\partial G(\chi)}{\partial t} \right) \Big|_{\Sigma} = 0,$$

где  $\mathbf{n}$  – внешняя нормаль;

4) условию ограниченности энергии.

Начально-краевая задача в такой постановке имеет единственное решение.

Ищем функцию  $G$  в виде

$$G = G_0 + G_p,$$

где  $G_0$  – функция Грина в свободном пространстве:

$$G_0(\vec{r}, \vec{r}_0, t, t_0) = \frac{\delta(t - t_0 - R/a)}{4\pi R}, \quad R = |r - r_0|,$$

а  $G_p$  – искомая функция, соответствующая рассеянному конусом полю.

Далее будем рассматривать случай возбуждения конуса с продольной щелью магнитным радиальным диполем, т. е. при  $\chi = 2$  и  $N = 1$ .

#### Метод решения

Для удобства отыскания функции Грина используем интегральное преобразование Мелера-Фока [5]:

$$\hat{F}(\tau) = \int_0^{+\infty} \text{sh } b F(b) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\text{ch } b) db,$$

$$F(b) = \int_0^{+\infty} \tau \text{th } \pi\tau \hat{F}(\tau) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\text{ch } b) d\tau.$$

Здесь

$$\text{ch } b(t) = \frac{t^2 a^2 - r^2 - r_0^2}{2rr_0}.$$

Запишем  $G_0$  в виде интеграла Мелера-Фока:

$$G_0 = \int_0^{+\infty} \tau \text{th } \pi\tau \hat{G}_0(\tau) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\text{ch } b) d\tau,$$

$$\hat{G}_0(r, \theta, \varphi, \tau) = \frac{a}{4\pi r r_0} \eta \left( t - \frac{r+r_0}{c} \right) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} (-1)^m e^{im(\varphi-\varphi_0)} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-m+i\tau)}{\Gamma(\frac{1}{2}+m+i\tau)} F_{m\tau}(\theta, \theta_0),$$

где

$$F_{m\tau}(\theta, \theta_0) = \begin{cases} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cos \theta) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(-\cos \theta_0), & \theta < \theta_0, \\ P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(-\cos \theta) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cos \theta_0), & \theta > \theta_0, \end{cases}$$

$P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\cos \theta)$  – функции Лежандра,  $\Gamma(z)$  – гамма-функция,  $\eta(z)$  – функция Хэвисайда.

Будем искать неизвестную функцию  $G_p$  в виде

$$G_p(b) = \int_0^{+\infty} \tau \operatorname{th} \pi \tau \hat{G}_p(\tau) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^m(\operatorname{ch} b) d\tau,$$

$$\hat{G}_p(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} z_{m\tau} U_{m,i\tau}(\theta, \varphi),$$

где  $z_{m\tau}$  – известный коэффициент,

$$U_{i\tau}(\theta, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n^{(2)} \frac{P_{-1/2+i\tau}^n(\pm \cos \theta)}{\frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+i\tau}^n(\pm \cos \gamma)} e^{in\varphi},$$

$x_n$  – неизвестные коэффициенты, которые находятся с помощью СЛАУ-2, имеющей вид:

$$x_0^{(2)} \left\{ -D_{i\tau} + \ln \frac{1-u_2}{2} \right\} + \sum_{p=1}^{+\infty} x_p^{(2)} \frac{\varepsilon_p^{(2)}}{p} [P_p(u_2) + P_{-p}(u_2)] = \ln \frac{1-u_2}{2}$$

$$\begin{aligned} x_0^{(2)} [P_n(u_2) + P_{-n}(u_2)] + 2 \sum_{p=1}^{+\infty} x_p^{(2)} \varepsilon_p^{(2)} [V_{n-1}^{p-1}(u_2) + V_{-n-1}^{p-1}(u_2)] - 2x_n^{(2)} = \\ = P_n(u_2) + P_{-n}(u_2), \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Здесь

$$D_{i\tau}^{(2)} = \frac{ch\pi\tau}{\pi \sin^2 \gamma (0.25 + \tau^2)^2} \frac{1}{P_{-1/2+i\tau}^{-1}(\cos \gamma) P_{-1/2+i\tau}^{-1}(-\cos \gamma)},$$

$$\frac{1}{|n|} (1 - \varepsilon_n^{(2)}) = \frac{(-1)^{n+1} ch\pi\tau}{\pi \sin^2 \gamma} \frac{\Gamma(1/2 + i\tau + n)}{\Gamma(1/2 + i\tau - n)} \frac{1}{\frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+i\tau}^n(\cos \gamma) \frac{d}{d\gamma} P_{-1/2+i\tau}^n(-\cos \gamma)},$$

$$V_{n-1}^{m-1}(u) = \frac{n}{2(n-m)} [P_{n-1}(u) P_m(u) - P_n(u) P_{m-1}(u)],$$

$$u = \cos \frac{d}{2},$$

где  $d$  – ширина щели конуса.

### Случай идеально проводящего конуса с продольной узкой щелью

Приведем аналитические выражения для случая конуса с продольной узкой щелью, т.е. при  $1-u \ll 1$ . В этом случае функция  $U_{it}(\theta, \varphi)$  будет иметь вид:

$$U_{it} = \frac{1}{\ln \frac{1-u}{2} B_{it} \Phi_{it}^0} \left\{ 2 \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_p}{p} \frac{P_{-\frac{1}{2}+it}(\pm \cos \theta)}{P_{-\frac{1}{2}+it}(\pm \cos \gamma)} + D_{it}^{(2)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{P_{-\frac{1}{2}+it}^{-n}(\pm \cos \theta) \cos n\varphi}{\frac{d}{d\gamma} P_{-\frac{1}{2}+it}^{-n}(\pm \cos \gamma)} \right\} + O \left( \frac{1-u}{\ln \frac{1-u}{2}} \right),$$

где

$$B_{it} = D_{it}^{(2)} - 2 \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_p^{(2)}}{p},$$

$$\Phi_{it}^0 = \frac{1}{D_{it}^{(2)} - 2 \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_p^{(2)}}{p}} - \frac{1}{\ln \frac{1-u}{2}}.$$

### Численное решение

Проведен численный анализ распределения  $H_\theta$  во временной области при фиксированных расстояниях от источника до вершины конуса  $r_0$ , расстоянии от вершины конуса до точки наблюдения  $r$ , угла полураскрыва конуса  $\gamma$ , угла  $\theta$  точки наблюдения при условии, что  $\theta > 2\gamma$  и  $t > (r+r_0)/a$ , где  $a$  – скорость распространения сигнала в среде. При проведении численного эксперимента осуществлен переход от размерной величины  $t$  к безразмерной  $\xi = at/(r+r_0)$ , ( $\xi > 1$ ). В соответствии с формулой для  $H_\theta$  проведен расчет вышеуказанной зависимости при условии, что  $r=1$ ,  $r_0=0.5$ ,  $a=1$ .

На рис. 2 даны кривые зависимости составляющей электрического поля  $H_\theta$  от временного параметра  $\xi$  при различных фиксированных значениях ширины щели, на рис. 3 показана зависимость поля от  $\xi$  в азимутальной плоскости.

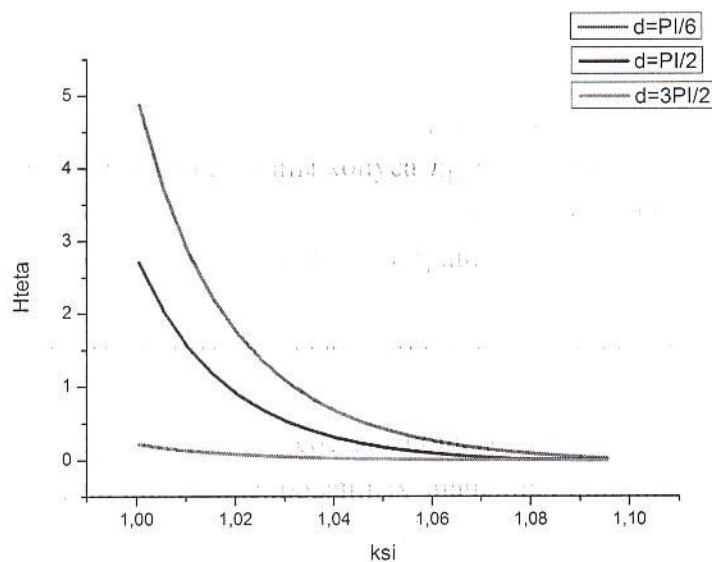


Рис. 2. Зависимость  $H_\theta$  от ширины щели  $d$ .

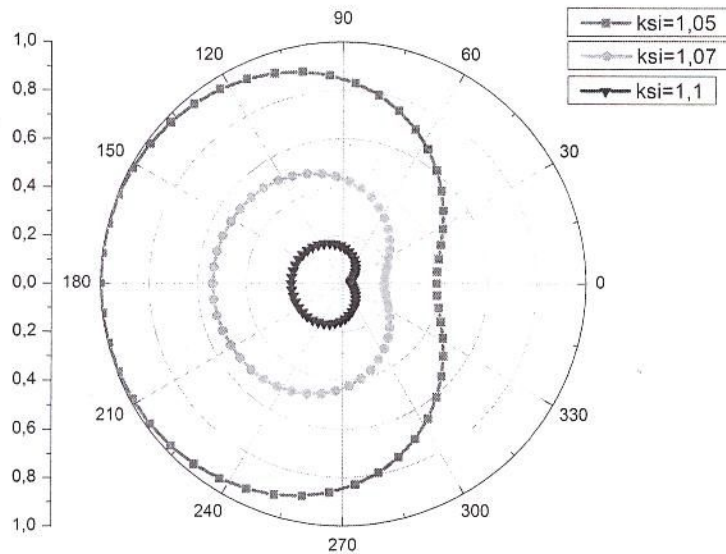


Рис. 3. Зависимость  $H_{\theta}$  от временного параметра  $\xi$  в азимутальной плоскости

Из рис. 2 следует, что с уменьшением поверхности рассеяния (при расширении щели) наблюдается уменьшение поля напротив середины щели. При увеличении времени поле уменьшается (рис. 3).

### Заключение

В работе построена математическая модель процесса возбуждения точечным импульсным источником конической антенны с продольными щелями. Для нахождения строгого аналитического решения использованы аппарат функции Грина и интегральное представление Мелара-Фока. Показано, что решение электродинамической задачи эквивалентно решению системы алгебраических линейных уравнений с вполне непрерывным оператором. Получено аналитическое решение в случае конуса с продольной узкой щелью. Проведен численный анализ одной из составляющих магнитного поля в зависимости от ширины щели и от временного параметра.

**Список литературы:** 1. Cheng S., Wu Z., Hallbjorner P., Hjort K., Rydberg A. Foldable and Stretchable Liquid Metal Planar Inverted Cone Antenna // IEEE Trans. on Antennas and Propagation, vol. 57, №12, 2009. p. 3765-3771. 2. Amert A.K., Whites K.W. Miniaturization of the Biconical Antenna for Ultrawideband Applications // IEEE Trans. on Antennas and Propagation, vol. 57, №12, 2009. p. 3728-3735. 3. Борисов В.В. Электромагнитные поля неустановившихся токов. - СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 1996. - 208с. 4. Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешиников А. Г. Математические модели электродинамики. - М.: Высш. шк., 1991. - 224с. 5. Дорошенко В. А, Кравченко В. Ф. Дифракция электромагнитных волн на незамкнутых конических структурах. / Под ред. В.Ф. Кравченко. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. - 272 с.

Харьковский национальный университет  
радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 00.00.2011