УДК 537.87; 621.371

Н. К. САХНЕНКО, А. Г. НЕРУХ, д-р физ.-мат. наук

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОЛЯ ЛИНЕЙНОГО ТОКА ПРИ ПОЯВЛЕНИИ ПЛАЗМЕННОГО ЦИЛИНДРА В ВОЛНОВОДЕ

1. Введение

В последнее время интерес к нестационарным электродинамическим задачам значительно возрос. Это объясняется в первую очередь тем, что круг явлений с зависящими от времени параметрами очень широк. Наряду с развитием электродинамики движущихся сред интенсивное развитие идет и в области исследования взаимодействия электромагнитного поля с нестационарной средой. Используются как дифференциальные, так и интегральные методы для решения задач во временной области. Решение нестационарных задач в дифференциальной постановке для областей со сложной геометрией наталкивается на значительные трудности, связанные в первую очередь с граничными условиями. Интегральные методы позволяют более естественно преодолевать такие трудности. В данной работе на основе интегрального подхода предлагается аналитическое решение задачи о преобразовании временной и пространственной структуры поля при изменении во времени плазменной неоднородности, находящейся в волноводе.

Рассматривается плоскопараллельный волновод с идеально проводящими стенками. Предполагается, что до нулевого момента времени волновод был заполнен диэлектрической средой. В нулевой момент времени в волноводе образуется цилиндрическая неоднородность, заполненная холодной изотропной плазмой. Цилиндр перпендикулярен стенкам волновода и по его оси течет линейный ток с произвольной зависимостью от времени.

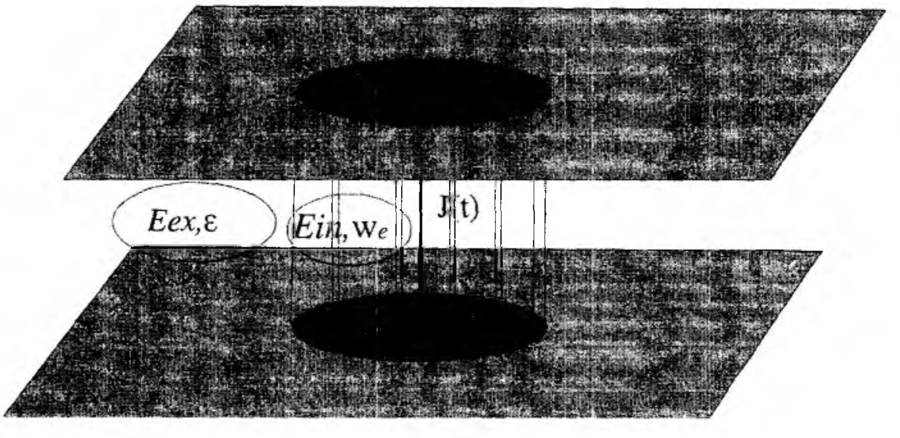

Рис. 1

Данная задача может рассматриваться как модельная для резонатора, ограниченного с торцов полупроводниковыми пластинами с очень высокой проводимостью. Резонатор возбуждается линейным , произвольно зависящим от времени током, который течет по оси резонатора. Ток может быть включен в произвольный момент времени как до появления плазмы, так и после. Схематическая диаграмма рассматриваемого явления представлена на рис. 1.

Аксиальная симметрия задачи определяет ее решение в цилиндрических координатах. Как показано в [1], электромагнитное поле описывается интегральным уравнением, эквивалентным уравнениям Максвелла и содержащим граничные и начальные условия для поля,

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \hat{K}\vec{E}, \tag{1}$$

 ISSN 0485-8972. Радиотехника. 2002. Вып. 129

где $\vec{E}_0$ – первичное поле линейного тока в волноводе, заполненном диэлектриком, $\vec{E}$ – преобразованное появлением плазмы поле, которое предстоит определить. Интегральный оператор

$$\hat{K} = \frac{1}{\varepsilon}\hat{\Phi}^{-1}\int_0^{\infty}dt'\int_0^{\rho_0}\rho' d\rho'\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{b}dz'\hat{G}\cdot\hat{V}_e\hat{\Phi}$$

включает в себя функцию Грина $\hat{G}$ [1], которая удовлетворяет граничным условиям на стенках волновода; оператор среды [2] $\hat{V}_e = \frac{1}{4\pi}(\omega_e^2\int_0^t dt'(t-t') - (\varepsilon - 1))$, который содержит начальные условия и соответствует случаю скачкообразного появления плазмы. Здесь ε – диэлектрическая проницаемость среды, которой был заполнен волновод до нулевого момента времени; ω_e – плазменная частота, которая здесь рассматривается как постоянная величина. При помощи матрицы $\hat{\Phi}$ осуществляется переход к цилиндрическим координатам; ρ_0 – радиус цилиндра, b – расстояние между стенками волновода.

2. Первичное поле линейного тока

Свободный член в (1) соответствует первичному полю, которое создается данным источником в волноводе без плазменного образования [2],

$$\vec{E}_0 = -\frac{4\pi}{c^2}\hat{\Phi}^{-1}\int_{-\infty}^{t}dt'\int_0^{\rho_0}\rho' d\rho'\int_0^{2\pi}d\varphi'\int_0^{b}dz'\hat{G}\cdot\hat{\Phi}\frac{\partial}{\partial t'}\vec{j}, \tag{2}$$

где c – скорость света в вакууме.

Ток возбуждения является линейным, протекает перпендикулярно стенкам волновода и имеет произвольную зависимость от времени:

$$\vec{j} = \vec{e}_z\frac{\delta(\rho)}{\rho}j(t). \tag{3}$$

Если до нулевого момента времени волновод был пустым, то есть $\varepsilon = 1$, то (2) сводится к виду

$$\vec{E}_0 = \frac{2\pi b}{c^2}\int_{-\infty}^{t}dt'\frac{j'(t')\Theta(c(t-t')-\rho)}{\sqrt{c^2(t-t')^2-\rho^2}}\vec{e}_z. \tag{4}$$

Однородность возбуждающего тока по оси z приводит к тому, что такой источник излучает низший тип волны, не зависящий от координаты z.

3. Преобразованное поле линейного тока

Чтобы получить преобразованное поле внутри волновода $\vec{E}_{in}$, необходимо найти решение интегрального уравнения (1). Во временной области это интегральное уравнение Вольтерра, и его решение может быть построено методом резольвенты:

$$\vec{E}_{in} = \vec{E}_0 + \hat{R}\vec{E}_0. \tag{5}$$

Резольвентный оператор $\hat{R}$ должен удовлетворять операторному уравнению

$$\hat{R} - \hat{K}\hat{R} = \hat{K}, \tag{6}$$

где $\hat{K}$ – ядро (1).

Уравнение для резольвенты удобно решать в импульсном представлении [2] (в виде преобразования Фурье-Ханкеля-Лапласа). Это дает возможность получить явное выражение для резольвентного оператора. Если рассматривается первичное поле вида (4), т.е. нет зависимости от z и φ, то резольвентный оператор имеет вид

$$\hat{R} = \hat{R}' + \hat{R}'', \quad \text{где} \tag{7}$$

$$\hat{R}'(t,t',z,z') = -\omega_e^2 \int_0^{\infty} \xi d\xi \frac{J_0(\xi\rho)J_0(\xi\rho')}{\sqrt{c^2\xi^2+\omega_e^2}} \cdot \sin\sqrt{c^2\xi^2+\omega_e^2}(t-t') \cdot \Theta(t-t') \cdot \Theta(\rho_0-\rho)\Theta(\rho_0-\rho');$$

$$\hat{R}''(t,t',z,z') = -\frac{\omega_e^2}{c^2} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dp}{2\pi i} A(p) e^{p(t-t')} I_0(u_0 p) I_0(u_0 p) \cdot \Theta(\rho_0-\rho)\Theta(\rho_0-\rho'), \text{ где}$$

$$A(p) = \frac{u_0 K_1(u_0\rho_0)K_0(v_0\rho_0) - v_0 K_0(u_0\rho_0)K_1(v_0\rho_0)}{u_0 I_1(u_0\rho_0)K_0(v_0\rho_0) + v_0 K_1(v_0\rho_0)I_0(u_0\rho_0)}; \; u_0 = \frac{\sqrt{p^2+\omega_e^2}}{c}; \; v_0 = \frac{p}{c}; \; \mathrm{I}_{0,1}(..), \quad K_{0,1}(..) -$$

модифицированные функции Бесселя.

Слагаемое $\hat{R}'$ учитывает только изменение свойств среды во времени и является резольвентным оператором для безграничной задачи [3]. Этот оператор дает решение задачи о преобразовании поля после нулевого момента времени, когда плазма появляется во всем волноводе. Ограниченность плазменного цилиндра по радиусу, то есть влияние его боковых стенок, учитывается вторым слагаемым $\hat{R}''$. Полученное в результате решения уравнения (1) поле представляет собой поле внутри резонатора. При этом легко показать, что слагаемое $\hat{\mathrm{R}}'$ ответственно за удовлетворение теоремы погашения, которая состоит в том, что из интеграла выделяется слагаемое, равное свободному члену уравнения, то есть первичному полю, но имеющее противоположный знак.

Внешнее поле (вне плазменного резонатора) определяется квадратурной формулой по найденному внутреннему полю:

$$\vec{E}_{ex} = \vec{E}_0 + \hat{K}_{ex}\vec{E}_{in}, \tag{8}$$

где $\hat{K}_{ex}$ – ядро интегрального уравнения (1) при условии, что $\rho > \rho_0$.

4. Электромагнитное поле внутри цилиндра

Пусть источник (3) представляет собой ступенчатый ток

$$\vec{j} = \vec{e}_z \frac{\delta(\rho)}{\rho} \Theta(t - \mathrm{t}_0),$$

где t_0 – время включения источника.

Первичное поле такого тока получается из (4) прямым интегрированием:

$$\vec{E}_0 = \frac{2\pi b}{c^2} \frac{\Theta(c(t-t_0)-\rho)}{\sqrt{c^2(t-t_0)^2-\rho^2}} \Theta(t-t_0)\vec{e}_z. \tag{9}$$

Это монотонно убывающая бегущая цилиндрическая волна. Рассмотрим случай, когда источник включается после возникновения плазмы ($\mathrm{t}_0 > 0$). В безграничном случае, когда плазма заполняет весь волновод, преобразованная волна [3] имеет вид

$$\vec{E} = \vec{e}_z \frac{2\pi b}{c^2} \frac{\cos(\frac{\omega_e}{c}\sqrt{c^2(t-t_0)^2-\rho^2})}{\sqrt{c^2(t-t_0)^2-\rho^2}} \Theta(c(t-t_0)-\rho)\Theta(t-t_0) \tag{10}$$

это бегущая волна, занимающая область $\rho < c(t-t_0)$. Присутствие плазмы придает волне осциллирующий характер, и частота осцилляций совпадает с плазменной частотой ω_e.

Внутреннее поле находим, подставляя в (5) выражение для резольвентного оператора (7) и первичное поле (9), а затем перейдем к преобразованию Лапласа

$$L(\vec{E}_{in}) = \int_0^\infty e^{-pt}\vec{E}_{in}(t)\,dt = \frac{2\pi \mathrm{b}}{\mathrm{c}^2}\vec{e}_z \quad e^{-t_0 p}[A(p)\cdot I_0(\rho u_0) + K_0(\rho u_0)].$$

Положив $\mathrm{p} = \mathrm{i}\omega$, мы получим частотное представление внутреннего поля. График для спектральной плотности представлен на рис. 2. Здесь введен в рассмотрение масштабный множитель w, который имеет размерность частоты. Это дает возможность рассматривать безразмерные величины: $\frac{\omega}{w}$ – безразмерная частота (на графике соответствует горизонтальной оси), $\frac{\omega_e}{w}$ – безразмерная плазменная частота, $\frac{\rho w}{c}$ – безразмерное расстояние. Вертикальная ось на графике соответствует амплитуде, нормированной на величину $\frac{2\pi \mathrm{b}}{\mathrm{c}^2}$. Процесс рассматривается на одинаковом расстоянии от оси цилиндра $\frac{\rho w}{c} = 1$, но при различных значениях радиуса: сплошная линия соответствует случаю, когда радиус цилиндра равен 5, пунктирная – 8. Безразмерная плазменная частота $\frac{\omega_e}{w} = 2[0,1]$.

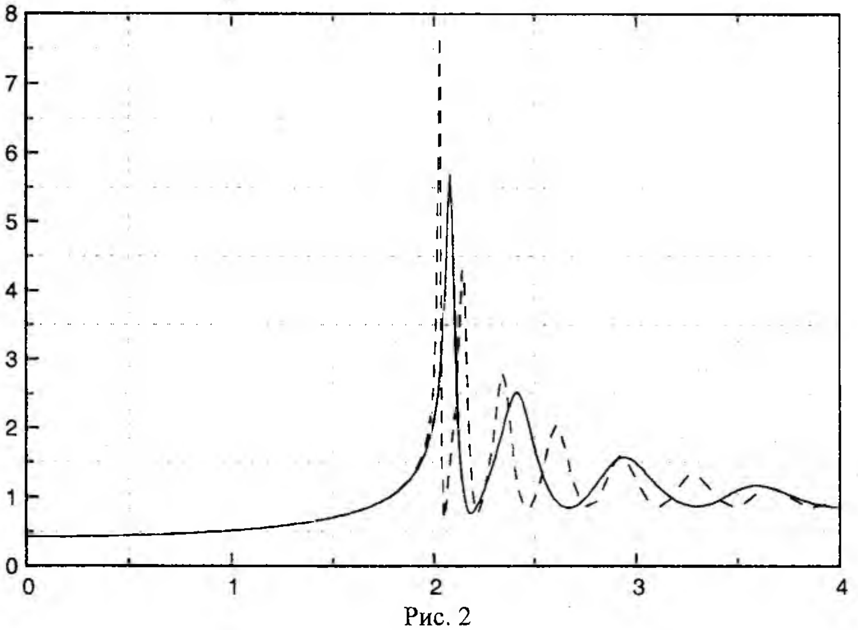

Рис. 2

В безграничном случае преобразованная волна осциллирует с плазменной частотой. В резонаторе же возбуждается целый спектр частот, который определяется параметрами среды и параметрами резонатора.

5. Внешнее поле

Внешнее поле определяется по найденному внутреннему с помощью формулы (8)

$$L(\vec{E}_{ex}) = -\frac{2\pi b}{c^2}\vec{e}_z e^{-t_0 p} K_0(\rho v_0)\times$$

$$\times\Big[A(p)\big(u_0\,\rho_0 I_0(v_0\rho_0)I_1(u_0\rho_0) - v_0\rho_0 I_0(u_0\rho_0)I_1(v_0\rho_0)\big) -$$

$$-u_0\rho_0 I_0(v_0\rho_0)K_1(u_0\rho_0) - v_0\rho_0 K_0(u_0\rho_0)I_1(v_0\rho_0)\Big].$$

Преобразование Лапласа первичного поля (9) определяется формулой

$$L(\vec{E}_0) = -\frac{2\pi b}{c^2}\vec{e}_z e^{-t_0 p} K_0(\rho v_0).$$

Для получения частотного спектра положим $p = i\omega$. На рис. 3 представлен вид графиков в частотном представлении для первичной волны в пустом волноводе (пунктирная линия) и преобразованной волны вне плазменного цилиндра (сплошная линия). Горизонтальная ось соответствует безразмерной частоте, вертикальная – нормированной амплитуде. Очевидно, что эти поля имеют сходную структуру.

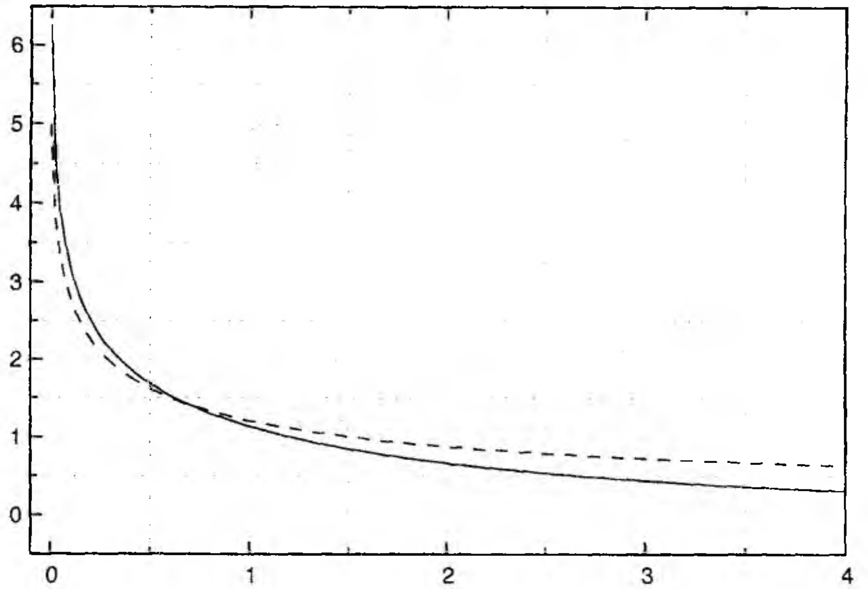

Рис. 3

Выводы

Точные выражения для резольвентного оператора и функции Грина позволяют исследовать изменения пространственной и временной структуры поля, вызванные появлением цилиндрической неоднородности в волноводе. Рассмотренный плазменный цилиндр может рассматриваться как модель цилиндрического резонатора, а предложенный подход может быть использован для исследования излучения из полупроводникового цилиндрического резонатора, в котором появление плазмы приводит к изменению проводимости во времени.

Список литературы: 1. *Сахненко Н.К., Нерух А.Г.* Нестационарное аксиально-симметричное излучение источника в плоском волноводе // Весник харьковского национального университета. Радиофизика и электроника. 2000. № 467. С.144 – 148. 2. *Нерух А.Г., Хижняк Н.А.* Современные проблемы нестационарной макроскопической электродинамики. Харьков: Тест-радио, 1991. 279 с. 3. *Сахненко Н.К., Нерух А.Г.* Нестационарные аксиально-симметричные волны в плоском волноводе // Радиоэлектроника и информатика. 2000. №2 (11). С. 22 – 25

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

Поступила в редколлегию 04.07.2002