РАДИОТЕХНИКА

УДК 621.317.799

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДЛЯ СВЧ ДИАГНОСТИКИ АНИЗОТРОПНЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВ И ДИЭЛЕКТРИКОВ

СЛИПЧЕНКО Н.И.

Модифицированный метод Трефтца применяется к расчету полой электродинамической системы коаксиального типа, содержащей среду с анизотропной диэлектрической проницаемостью. Предлагаются характеристические уравнения для резонансных частот и добротности резонатора. Исследуется влияние основных геометрических размеров и компонент тензора диэлектрической проницаемости на резонансные свойства системы. Обсуждается возможность применения разработанных математических моделей для диагностики полупроводниковых материалов на СВЧ.

1. Введение

В задачах моделирования СВЧ сенсоров для диагностики полупроводников, как правило, предполагается изотропный характер их электрофизических параметров, в частности, диэлектрической проницаемости и проводимости. Между тем, оценка влияния фактора анизотропии материала представляет значительный интерес. Особую значимость этот вопрос приобретает в связи с необходимостью определения параметров современных материалов дл микро- и наноэлектроники. В связи с этим актуальна задача математического моделирования СВЧ резонансных систем, содержащих анизотропный полупроводник, в частности, легированный полупроводник, помещенный в магнитное поле.

2. Постановка задачи

Физическая модель рассматриваемой электродинамической системы (рис.1) конфигурационно аналогична исследованной в [1]. Резонатор имеет коаксиальную часть I и измерительную камеру II, частично заполненную образцом 1. Магнитное поле направлено вдоль оси.

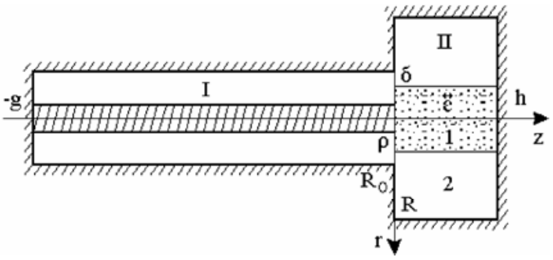

Рис. 1. Коаксиальный резонаторный сенсор

Предполагается, что диэлектрическая проницаемость образца описывается тензором, компоненты которого, в общем, комплексные величины:

$$\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -i\varepsilon_a & 0 \\ i\varepsilon_a & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Рассмотрим аксиально-однородные колебания низшего типа – квази ТЕМ.

3. Определение собственных колебаний резонатора

Решение основано на результатах общей теории цилиндрических волноводов с анизотропным заполнением [2]. Для определения собственных колебаний воспользуемся методом декомпозиции, в соответствии с которым весь объём условно разделим плоскостью z=0 на две ограниченные цилиндрические области. В подобластях 1 и 2 области II можно представить поля в виде кусочно-определенных поперечных векторных функций. В сечении z=0 эти функции имеют вид:

$$\vec{\ell}^{II}_{\perp n} = \vec{r}_0 E_r + \vec{\varphi}_0 E_\varphi =$$
$$= -\vec{r}_0 \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} u_n(r) \\ C_n Z_1^{II}(\chi_n r) \end{cases} + i\vec{\varphi}_0 k_0^2 \mu q \begin{cases} v_n(r) & \text{для } 1 \\ D_n Y_1^{II}(\chi_n r) & \text{для } 2 \end{cases},$$

$$\vec{h}^{II}_{\perp n} = \vec{r}_0 H_r + \vec{\varphi}_0 H_\varphi =$$
$$= -\vec{r}_0 \beta_n^2 q W_n \begin{cases} v_n(r) \\ D_n Y_1^{II}(\chi_n r) \end{cases} + i\vec{\varphi}_0 W_n \begin{cases} \omega_n(r) & \text{для } 1 \\ C_n Z_\perp^{II}(\chi_n r) & \text{для } 2 \end{cases}. \qquad (2)$$

Здесь $u_n(r) = A_n s_{1n} J_1(\gamma_{1n} r) - B_n s_{2n} J_1(\gamma_{2n} r)$;

$$v_n(r) = A_n J_1(\gamma_{1n} r) - B_n J_1(\gamma_{2n} r);$$

$$\omega_n(r) = A_n t_{1n} J_1(\gamma_{1n} r) - B_n t_{2n} J_1(\gamma_{2n} r);$$

$$A_n = t_{2n}[\gamma_{2n} J_0(\gamma_{2n}\delta) Z_1^{II}(\chi_n\delta) - \chi_n \varepsilon_z J_1(\gamma_{2n}\delta) Z_0^{II}(\chi_n\delta)];$$

$$B_n = t_{1n}[\gamma_{1n} J_0(\gamma_{1n}\delta) Z_1^{II}(\chi_n\delta) - \chi_n \varepsilon_z J_1(\gamma_{1n}\delta) Z_0^{II}(\chi_n\delta)];$$

$$C_n = \frac{\omega_n(\delta)}{Z_1^{II}(\chi_n\delta)}; \quad D_n = \frac{v_n(\delta)}{Y_1^{II}(\chi_n\delta)};$$

$$Z_k^{II}(\chi_n r) = N_0(\chi_n R) J_k(\chi_n r) - J_0(\chi_n R) N_k(\chi_n r);$$

$$Y_k^{II}(\chi_n r) = N_1(\chi_n R) J_k(\chi_n r) - J_1(\chi_n R) N_k(\chi_n r);$$

$$k = 0,1;$$

$W_n = \frac{k_0}{\beta_n} \mathrm{ctg}(\beta_n h)$ – импеданс n-й волны анизотропного волновода; $\chi_n^2 = k_0^2 - \beta_n^2$;

$$s_{1,2n}=k_0^2\varepsilon\mu-\beta_n^2-\gamma_{1,2n}^2;\quad t_{1,2n}=k_0^2\varepsilon_\perp\mu-\beta^2-\gamma_{1,2n}^2;$$

$$\varepsilon_\perp=\varepsilon-\frac{\varepsilon_a^2}{\varepsilon};\quad q=\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon};$$

$$\gamma_{1,2n}^2=\pm\sqrt{\frac{1}{4}\left[k_0^2\mu(\varepsilon_z-\varepsilon_\perp)-\beta_n^2(\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon}-1)\right]^2+k_0^2\beta_n^2\varepsilon_z\mu q^2}+$$

$$+\frac{1}{2}\left[k_0^2\mu(\varepsilon_z+\varepsilon_\perp)-\beta_n^2(1+\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon})\right],$$

где β_n – постоянная распространения n-й волны, определяемая из дисперсионного уравнения, возникающего при реализации условий для компонент E и H на границе между подобластями 1 и 2 области II:

$$\det\begin{vmatrix} J_1(\gamma_1\delta) & J_1(\gamma_2\delta) & 0 & Y_1^{II}(\chi\delta)\\ \gamma_1 J_0(\gamma_1\delta) & \gamma_2 J_0(\gamma_2\delta) & 0 & \mu\chi\, Y_0^{II}(\chi\delta)\\ t_1 J_1(\gamma_1\delta) & t_2 J_1(\gamma_2\delta) & Z_1^{II}(\chi\delta) & 0\\ t_1\gamma_1 J_0(\gamma_1\delta) & t_2\gamma_2 J_0(\gamma_2\delta) & \varepsilon_z\chi\, Z_1^{II}(\chi\delta) & 0 \end{vmatrix}=0\,. \quad (3)$$

Возникающее из (3) множество значений $\{\beta_n^2\}$ определяет множество частных решений $\{\vec{\ell}_{\perp n}^{II}\}$, $\{\vec{h}_{\perp n}^{II}\}$ уравнений Максвелла, удовлетворяющих всем граничным условиям в области II. Опуская относительно несложный, но весьма громоздкий вывод соотношения ортогональности, представим его результат для частных решений $\{\vec{\ell}_{\perp n}\}$, $\{\vec{h}_{\perp n}\}$, являющихся функциями только координаты r:

$$\int_0^R[\vec{\ell}_{\perp k}\times\vec{\tilde{h}}_{\perp n}]r\,dr=-\delta_{kn}N_n, \quad (4)$$

где $N_n=W_nM_n$,

$$M_n=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\delta u_n(r)\,\omega_n(r)\,r\,dr+C_n^2\int_\delta^R Z_1^{II2}(\chi_n r)\,r\,dr+$$

$$+\beta_n^2k_0^2\mu q^2\left[\int_0^\delta v_n^2(r)\,r\,dr+\mu D_n^2\int_\delta^R Y_1^{II2}(\chi_n r)\,r\,dr\right]. \quad (5)$$

Условимся в дальнейшем считать функции $\vec{\ell}_{\perp n}^{II}$, $\vec{h}_{\perp n}^{II}$ нормированными путем деления их на $\sqrt{|M_n|}$ и в правой части (4) вместо M_n введем $S_n=M_n/|M_n|$.

В работе [3] обосновано представление неизвестного поперечного поля в резонансной системе в области II рядом Фурье в базисе Трефтца $\{\vec{\ell}_{\perp n}^{II},\vec{h}_{\perp n}^{II}\}$, которое в сечении z=0 имеет вид:

$$\left.\begin{aligned}\vec{E}_\perp^{II}&=\sum_{n=1}^\infty R_n\vec{\ell}_{\perp n}^{II},\\ \vec{H}_\perp^{II}&=\sum_{n=1}^\infty R_n\vec{h}_{\perp n}^{II}.\end{aligned}\right\}. \quad (6)$$

В области I аналогичное базисное пространство возникает как совокупность E – и H – частных решений уравнений Максвелла при соответствующих граничных условиях. Привлечение H – решений в области I вызвано необходимостью обеспечения полноты системы частных решений, посредством которых и представляется искомое решение в области I. В сечении z=0 указанные функции имеют вид:

$$\text{E-решения:}\quad \left.\begin{aligned}\vec{\ell}_{\perp En}^{I}&=\vec{r}_0Z_1^I(\chi_{En}r),\\ \vec{h}_{\perp En}^{I}&=i\vec{\varphi}_0W_{En}^I\,Z_1(\chi_{En}r);\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

$$\text{H-решения:}\quad \left.\begin{aligned}\vec{\ell}_{\perp Hn}^{I}&=i\vec{\varphi}_0Y_1^I(\chi_{Hn}r),\\ \vec{h}_{\perp Hn}^{I}&=\vec{r}_0W_{Hn}^I\,Y_1^I(\chi_{Hn}r);\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

где $n=1,2,..$; $Z_1^I(\chi_{En}r)=\dfrac{B_I(r)}{\sqrt{M_{En}}}$; $Y_1^I(\chi_{Hn}r)=\dfrac{B_H(r)}{\sqrt{M_{Hn}}}$;

$$B_E(r)=N_0(\chi_{En}R_0)J_1(\chi_{En}r)-J_0(\chi_{En}R_0)N_1(\chi_{En}r);$$
$$B_H(r)=N_1(\chi_{Hn}R_0)J_1(\chi_{Hn}r)-J_1(\chi_{Hn}R_0)N_1(\chi_{Hn}r);$$

$$W_{En}^I=\frac{k_0}{\beta_{En}}\mathrm{ctg}(\beta_{En}g);\quad W_{Hn}^I=\frac{\beta_{Hn}}{k_0}\mathrm{ctg}(\beta_{Hn}g);$$

$$\beta_{E,Hn}^2=k_0^2-\chi_{E,Hn}^2;\quad M_{En}=\int_\rho^{R_0}B_E^2(r)rdr;$$

$$M_{Hn}=\int_\rho^{R_0}B_H^2(r)rdr.$$

Множества $\{\chi_{En}\}$, $\{\chi_{Hn}\}$ порождаются уравнениями $Z_0^I(\chi_{En}\rho)=0$, $Y_1^I(\chi_{Hn}\rho)=0$ соответственно, и полностью определяют соответствующие базисные функции. Среди возможных частных E-решений имеется еще одно, упоминавшееся ранее, с собственным значением $\chi_{E0}=0$:

$$\left.\begin{aligned}\vec{\ell}_{\perp E0}^{I}&=\vec{r}_0\frac{1}{\sqrt{M_{E0}}}\frac{1}{r},\\ \vec{h}_{\perp E0}^{I}&=i\vec{\varphi}_0\frac{W_{E0}^I}{\sqrt{M_{E0}}}\frac{1}{r},\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

где $M_{E0}=\ln\dfrac{R_0}{\rho}$, $W_{E0}^I=\mathrm{ctg}(k_0g)$.

Также имеет место соотношение ортогональности между различными элементами функционального пространства для обоих типов решений [4]:

$$\int\limits_{\rho}^{R_0}[\vec{\ell}^{\,I}_{\perp EHkn}\times\vec{h}^{I}_{\perp EHkn}]\,r dr = i\delta_{EHkn}\begin{cases}W^{I}_{En},\ n=0,1,2,...\\ W^{I}_{Hn},\ n=1,2,...\end{cases}. \qquad (10)$$

С учетом изложенного выше правомерно представление полей резонансной системы в области I для сечения z=0 в виде векторных рядов Фурье:

$$\left.\begin{aligned}\vec{E}^{I}_{\perp} &= \sum_{m=0}^{\infty}F_m\vec{\ell}^{\,I}_{\perp Em}+\sum_{n=1}^{\infty}T_n\vec{\ell}^{\,I}_{\perp Hn},\\ \vec{H}^{I}_{\perp} &= \sum_{m=0}^{\infty}F_m\vec{h}^{I}_{\perp Hm}+\sum_{n=1}^{\infty}T_n\vec{h}^{I}_{\perp Hn}.\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Представленные в (6) и (11) выражения для полей резонатора в соответствующих его частях должны описывать единое поле во всем объеме, тождественно совпадая на общем множестве точек в плоскости z=0, и удовлетворять граничному условию: $\vec{E}^{II}_{\perp}=0$ на отрезках $[0,\rho]$, и $[R_0,R]$. Для реализации этого требования полагаем, что существует непрерывная функция $\vec{\xi}(r)=\vec{E}^{II}_{\perp}(r,0)$, обладающая свойством:

$$\vec{\xi}(r)=\begin{cases}0 \quad \text{на } r\in[0,\rho]\cup[R_0,R],\\ E^{I}_{\perp}(r,0) \quad \text{на } r\in(\rho,R_0).\end{cases} \qquad (12)$$

Поскольку $\vec{E}^{II}_{\perp}(r,0)$ представлено рядом Фурье (6), то, спроецировав его на нормированный базис $\tilde{\vec{h}}_{\perp n}$ и воспользовавшись соотношением ортогональности (4), получим:

$$-S_nR_n=\int\limits_{0}^{R}[\vec{\xi}(r)\times\tilde{\vec{h}}_{\perp n}]\vec{z}_0 r\,dr. \qquad (13)$$

При подстановке (12) в (13) сокращаем интервал интегрирования до (ρ,R_0), поскольку на остальных участках $(0,R)$ подынтегральная функция должна быть равна нулю. Но на интервале (ρ,R_0) должно выполняться также и условие: $\vec{\zeta}(r)=\vec{E}^{I}_{\perp}(r,0)$, что позволяет вместо (13) записать:

$$-S_nR_n=\int\limits_{\rho}^{R_0}[\vec{E}^{I}_{\perp}\times\tilde{\vec{h}}_{\perp n}]r\,dr. \qquad (14)$$

Подставив в (14) первую формулу из (11), с учетом (7) и (8), и $\tilde{\vec{h}}_{\perp n}$, –согласно (2) (без множителя W_n), приходим к алгебраической форме:

$$S_nR_n=-\sum_{m=0}^{\infty}G_{nm}F_m+q\sum_{\kappa=1}^{\infty}Q_{nk}T_k,\quad n=1,2,..., \qquad (15)$$

где $Q_{nk}=\beta_n^2\left[\int\limits_{\rho}^{\delta}v_n(r)\,Y^{I}_1(\chi_{Hk}r)\,r\,dr+\right.$

$$\left.+D_n\int\limits_{\delta}^{R_0}Y^{II}_1(\chi_n r)\,Y^{I}_1(\chi_{Hk}r)\,r\,dr\right],$$

$$G_{nm}=\int\limits_{\rho}^{\delta}\omega_n(r)\,Z^{I}_1(\chi_{Em}r)\,r\,dr+C_n\int\limits_{\delta}^{R_0}Z^{II}_1(\chi_n r)\,Z^{I}_1(\chi_{Em}r)\,r\,dr.$$

Далее потребуем удовлетворения равенства векторных функций магнитного поля $\vec{H}^{I}_{\perp}(r,0)$ и $\vec{H}^{II}_{\perp}(r,0)$ на отрезке $[\rho,R_0]$, воспользовавшись их представлениями, приведенными в (6) и (11):

$$\sum_{m=0}^{\infty}F_m\vec{h}^{I}_{\perp Em}+\sum_{n=1}^{\infty}T_n\vec{h}^{I}_{\perp Hn}=\sum_{k=1}^{\infty}R_k\vec{h}^{II}_{\perp k}. \qquad (16)$$

Проецируя равенство (16) на элементы базиса $\vec{\ell}^{\,I}_{\perp E}$, $\vec{\ell}^{\,I}_{\perp H}$ путем векторного умножения на них слева и учитывая (10), получаем линейные алгебраические формы:

$$\left.\begin{aligned}W^{I}_{Es}F_s &= \sum_{k=1}^{\infty}W_kG_{sk}R_k,\quad s=0,1,2...;\\ -W^{I}_{Hr}T_r &= q\sum_{k=1}^{\infty}W_kQ_{rk}R_k,\quad r=0,1,2...\end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Для удобства дальнейших преобразований представим алгебраические формы (15) и (17) в матричном виде:

$$-G\vec{F}+qQ\vec{T}=S\vec{R}, \qquad (18)$$

$$W^{I}_{E}\vec{F}=\tilde{G}W\vec{R}, \qquad (19)$$

$$-W^{I}_{H}\vec{T}=q\tilde{Q}W\vec{R}, \qquad (20)$$

где G и Q – прямоугольные матрицы; $\tilde{G}$ и $\tilde{Q}$ – транспонированные матрицы G и Q; S, W^{I}_{E},W^{I}_{H},W – диагональные матрицы; $\vec{F},\vec{T},\vec{R}$ – вектор-столбцы соответствующих неизвестных коэффициентов.

Полученная система матричных уравнений может быть разрешена двояко: либо путем исключения вектор-столбцов $\vec{F},\vec{T}$, либо исключением $\vec{R}$.

В первом случае имеем:

$$[G(W^{I}_{E})^{-1}\tilde{G}+q^2Q(W^{I}_{H})^{-1}\tilde{Q}+SW^{-1}]\vec{R}=0. \qquad (21)$$

Во втором – приходим к системе 2-х матричных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}&(W^{I}_{E}+\tilde{G}VG)\vec{F}-q\tilde{G}VQ\vec{T}=0,\\ &-q\tilde{Q}VG\vec{F}+(W^{I}_{H}+q^2\tilde{Q}VQ)\vec{T}=0,\end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

где $V=S^{-1}W$ – диагональная матрица.

Из условия существования нетривиальных решений (21) и (22) возникают характеристические уравнения либо в импедансной формулировке

$$\det\left|G(W^{I}_{E})^{-1}\tilde{G}+q^2Q(W^{I}_{H})^{-1}\tilde{Q}+SW^{-1}\right|=0, \quad (23)$$

либо в адмиттансной

$$\det\begin{pmatrix} W_E^I + \tilde{G}VG & -q\tilde{G}VQ \\ -q\tilde{Q}VG & W_H^I + q^2\tilde{Q}VQ \end{pmatrix} = 0\,, \qquad (24)$$

которые позволяют определить частотный спектр собственных азимутально однородных колебаний и исследовать влияние параметров анизотропной диэлектрической нагрузки на резонансные характеристики.

Адмиттансная форма характеристического уравнения более предпочтительна, несмотря на повышенный порядок определителя, поскольку при определении поля в резонаторе позволяет выразить амплитуды высших «гармоник» поля в областях I и II через единичную амплитуду основной TEM гармоники, которой, в основном, описывается структура поля низшего колебания. Из структуры матрицы в (24) видно, что наличие фактора анизотропии (q) приводит к возникновению связи между колебаниями E – и H – вида в коаксиальной части резонатора и, очевидно, к смещению резонансных частот невозмущенного резонатора. В предельном случае исчезающе малой анизотропии нагрузки (q=0) эти колебания не связаны. Из характеристических уравнений также следует, что изменение направления подмагничивания на противоположное не влияет на резонансные частоты системы.

В случае диагональной анизотропии диэлектрика ($\varepsilon_a = 0,\ \varepsilon \neq \varepsilon_z$) дисперсионное уравнение (3) распадается на независимые для E_{0n} - и H_{0n} - волн соответственно:

$$\gamma_1 J_0(\gamma_1\delta)\, Z_1^{II}(\chi\delta) - \varepsilon_r \chi J_1(\gamma_1\delta)\, Z_0^{II}(\chi\delta) = 0, \qquad (25)$$

$$\gamma_2 J_0(\gamma_2\delta)\, Y_1^{II}(\chi\delta) - \mu\chi\, J_1(\gamma_2\delta)\, Y_0^{II}(\chi\delta) = 0, \qquad (26)$$

где $\gamma_2^2 = k_0^2\varepsilon\mu - \beta^2,\quad \gamma_1^2 = \dfrac{\varepsilon_z}{\varepsilon}\gamma_2^2$.

Собственные решения для E_{0n} -волн в сечении z=0 в (1) и (2) подобластях приобретают простые выражения:

$$\vec{\ell}^{(1)}_{E\perp n} = -\vec{r}_0 \frac{1}{\varepsilon} J_1(\gamma_{1n}r),\ \vec{h}^{(1)}_{E\perp n} = i\vec{\varphi}_0 W_n J_1(\gamma_{1n}r),$$

$$\vec{\ell}^{(2)}_{E\perp n} = -\vec{r}_0 c_n Z_1^{II}(\chi_n r),\ \ \vec{h}^{(2)}_{E\perp n} = i\vec{\varphi}_0 W_n c_n Z_1^{II}(\chi_n r)\,, \qquad (27)$$

где $c_n = \dfrac{J_1(\gamma_{1n}\delta)}{Z_1^{II}(\chi_n\delta)}$, $W_n = \dfrac{k_0}{\beta_n}\mathrm{ctg}(\beta_n h)$.

Соотношение ортогональности (4) сохраняется, но выражение для величины M_n приобретает иной вид:

$$M_n = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\delta J_1^2(\gamma_{1n}r)\, r\, dr + c_n^2 \int_\delta^R [Z_1^{II}(\chi_n r)]^2\, r\, dr\ . \qquad (28)$$

Характеристическое уравнение для E – колебаний приводится к матричному виду либо в импедансной формулировке

$$\det\left| G(W_E^I)^{-1}\tilde{G} + SW^{-1} \right| = 0\,, \qquad (29)$$

либо в адмиттансной

$$\det\left| W_E^I + \tilde{G}VG \right| = 0\,, \qquad (30)$$

где матрицы W_E^I, V, S имеют прежний смысл, а элементы матрицы G вычисляются по формуле:

$$G_{km} = \frac{1}{\sqrt{M_{Ek}}}\left[\int_0^\delta J_1(\gamma_{1k}r)\, Z_1^I(\chi_{Em}r)\, r\, dr + \right.$$

$$\left. + c_k^2 \int_\delta^{R_0} Z_1^{II}(\chi_k r) Z_1^I(\chi_{Em} r)\, r\, dr \right].$$

Аналогичные построения для колебаний H-типа дают выражения для собственных решений в области II:

$$\vec{\ell}^{(1)}_{H\perp n} = i\vec{\varphi}_0 J_1(\gamma_{2n}r),\ \vec{h}^{(1)}_{H\perp n} = -\vec{r}_0 W_n J_1(\gamma_{2n}r),$$

$$\vec{\ell}^{(2)}_{H\perp n} = i\vec{\varphi}_0 D_n Y_1^{II}(\chi_n r), \vec{h}^{(2)}_{H\perp n} = -\vec{r}_0 W_n D_n Y_1^{II}(\chi_n r), \qquad (31)$$

где $D_n = \dfrac{J_1(\gamma_2\delta)}{Y_1^{II}(\chi_n\delta)}$,

$$M_n = \int_0^\delta J_1^2(\gamma_{2n}r)\, r\, dr + D_n^2 \int_\delta^R [Y_1^{II}(\chi_n r)]^2\, r\, dr\ .$$

Характеристическое уравнение в импедансной формулировке имеет вид

$$\det\left| Q(W_H)^{-1}\tilde{Q} + SW^{-1} \right| = 0\,, \qquad (32)$$

в адмиттансной соответственно

$$\det\left| W_H^I + \tilde{Q}VQ \right| = 0\,, \qquad (33)$$

где элементы матрицы Q вычисляются по формуле:

$$Q_{km} = \frac{1}{\sqrt{M_{Hk}}}\left[\int_\rho^\delta J_1(\gamma_{2k}r)\, Y_1^I(\chi_{Hm}r)\, r\, dr + \right.$$

$$\left. + D_k \int_\delta^{R_0} Y_1^{II}(\chi_k r)\, Y_1^I(\chi_{Hm} r)\, r\, dr \right].$$

Заметим, что характеристические числа E_{0m} колебаний зависят от обеих компонент диагонального тензора диэлектрической проницаемости $(\varepsilon, \varepsilon_z)$, а характеристические числа H_{0m} колебаний – лишь от одной – (ε). Это обстоятельство имеет важное значение для целей СВЧ диагностики веществ соответствующего типа.

4. Результаты численного моделирования

Численное исследование электродинамической системы проведем для квази-ТЕМ колебания путем решения характеристического уравнения (32) с диагонально-анизотропным диэлектрическим образцом. На основном виде колебаний (квази-ТЕМ) коаксиальный короткозамкнутый отрезок интерпретируется как индуктивная реактивность, а нагрузка – как последовательно присоединенная статическая емкость. Это подтверждается результатами расчетов, представленными графиками зависимости характеристического числа на рис.2-6 для резонатора с базовыми размерами: $R = R_0 = 18$мм, $g = 22{,}5$мм, $\rho = \delta = 5$мм, $h = 4{,}4$мм. Очевидно, что увеличение радиуса диэлектрического образца приводит к возрастанию концентрации электрического поля колебания в его объеме, а значит, обусловливает увеличение ёмкости нагрузки и уменьшение резонансной частоты (рис.2).

Увеличение радиуса металлического экрана R практически не влияет на резонансную частоту, что позволяет распространить получаемые результаты расчета на случай резонатора с коаксиальной апертурой при достаточно большой величине ρ / R_0 (рис.2-4).

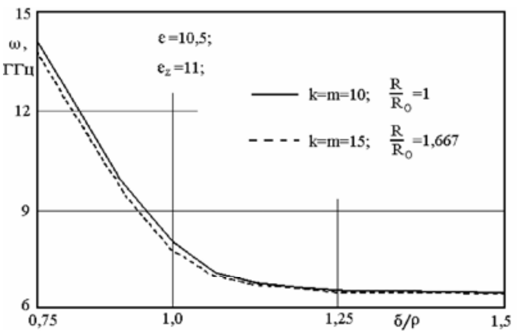

Рис. 2. Зависимость резонансной частоты от радиуса образца

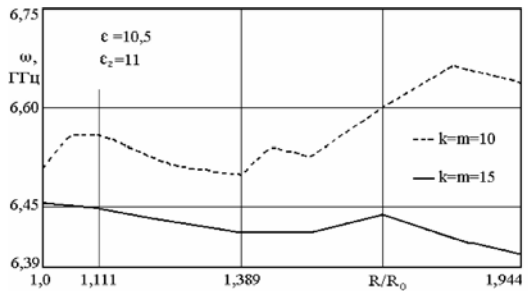

Рис. 3. Зависимость резонансной частоты от радиуса экрана образца

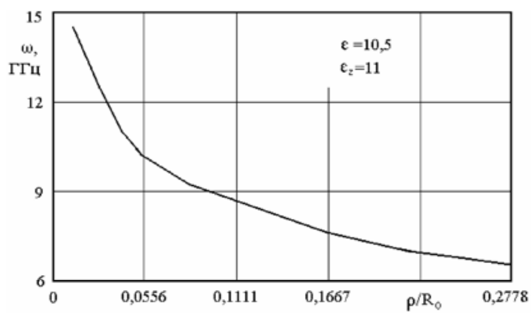

Рис.4. Зависимость резонансной частоты от радиуса коаксиала

Закономерен и рост резонансной частоты с увеличением толщины h диэлектрического образца, приводящий к уменьшению емкости диэлектрической нагрузки (рис.5), и уменьшение резонансной частоты при увеличении длины коаксиального отрезка.

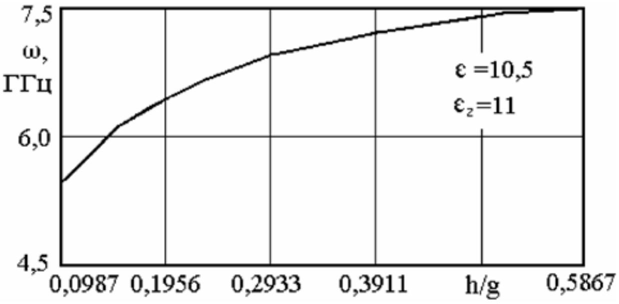

Рис. 5. Зависимость резонансной частоты от толщины образца

Графики зависимости характеристического числа от компонент тензора $\varepsilon, \varepsilon_z$ диэлектрической проницаемости (рис.6-7) свидетельствуют о преобладании концентрации продольного электрического поля E_z над радиальным E_r.

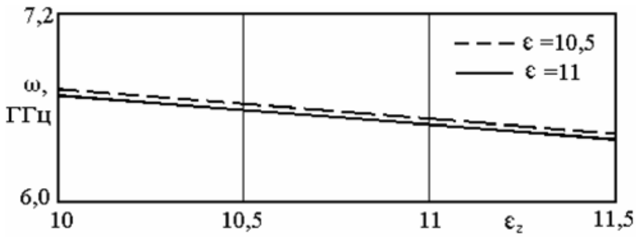

Рис.6. Зависимость резонансной частоты от продольной составляющей тензора диэлектрической проницаемости образа

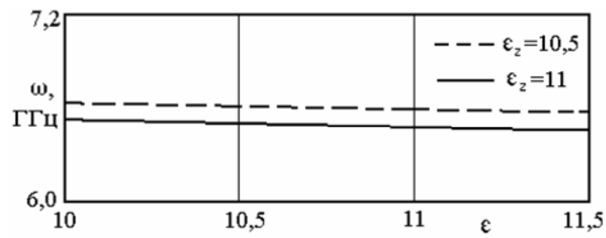

Рис. 7. Зависимость резонансной частоты от поперечной составляющей тензора диэлектрической составляющей образца

Это подтверждается также расчетами зависимостей резонансной частоты $\omega_0(\varepsilon'', \varepsilon''_z)$ и мнимой части собственного волнового числа $k''_{01}(\varepsilon'', \varepsilon''_z)$ (рис.8), где $\varepsilon'', \varepsilon''_z$ – мнимые компоненты элементов тензора диэлектрической проницаемости.

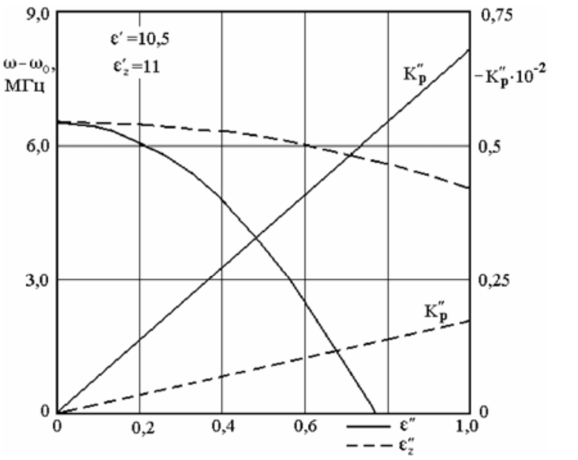

Рис. 8. Зависимость резонансной частоты и постоянной затухания от мнимых компонент тензора диэлектрической проницаемости образца

5. Сравнительная оценка возможностей резонаторного сенсора

Для сравнения возможностей резонатора с анизотропным диэлектриком ($q \neq 0$) предварительно проанализируем результаты решения задачи о круглом волноводе с неоднородным заполнением его поперечного сечения для построения системы собственных решений, которая затем используется для представления поля резонатора в области расположения образца.

С формальной точки зрения каждому значению постоянной распространения β_n при заданном значении k_0, удовлетворяющему дисперсионному уравнению (3), соответствует пара поперечных векторных функций $\vec{\ell}^{\,\mathrm{II}}_{\perp n}$, $\vec{h}^{\,\mathrm{II}}_{\perp n}$, согласно (2). При отсутствии потерь функции $u_n(r), \omega_n(r), v_n(r)$ всегда вещественны и существуют на всем непрерывном множестве значений β_n и k_0, исключая подмножества, определяемые соотношениями:

$$\beta_s = k_0, \beta_s^2 = (1 \pm q)\varepsilon\mu k_0^2, \beta_s^2 = -\frac{1}{4}q^2\varepsilon\mu k_0^2 \text{ при } \varepsilon = \varepsilon_z,$$

$$\beta_s^2 = 1 - \frac{q^2\left(1+\dfrac{\varepsilon_z}{\varepsilon}\right) \pm 2q\sqrt{\dfrac{\varepsilon_z}{\varepsilon}\left[q^2 - \left(1-\dfrac{\varepsilon_z}{\varepsilon}\right)^2\right]}}{\left(1-\dfrac{\varepsilon_z}{\varepsilon}\right)^2} \tag{34}$$

при $q > \left|1 - \dfrac{\varepsilon_z}{\varepsilon}\right|$.

При указанных значениях β_n^2 дисперсионное уравнение (3) обращается в тождество, так как при этом либо $\gamma_{2s} \equiv 0$, либо $\gamma_{1s} \equiv \gamma_{2s}$. Указанные подмножества точек расположены на соответствующих прямых, а точки пересечения дисперсионных кривых $\beta_n(k_0)$ с этими прямыми, которые на рис.9 обозначены пунктиром и штрих-пунктиром, назовем особыми точками. Заметим, что характеристические уравнения (23) и (24) при значениях β_s^2, удовлетворяющих (34), теряют смысл, поскольку матричные элементы матриц G и Q в этих точках не существуют. Следовательно, при поиске корня характеристического уравнения необходимо изолировать те значения волнового числа k_{0s}, при которых дисперсионные кривые собственных волн, используемых для представления поля в резонаторе, пересекаются с прямыми (34). Графики зависимостей $\beta_n(k_0)$ помимо определения особых точек позволяют определить предельное значение k_0, до которого все собственные волны в волноводе с образцом являются запредельными ($\beta_n^2 < 0$). При условии $\varepsilon = \varepsilon_z, q^2 << 1$ особые точки расположены на прямой $\beta_s = \dfrac{i}{2}\sqrt{\varepsilon\mu}\, q k_0$, а остальные особые точки находятся вне пределов существования квазистатических колебаний.

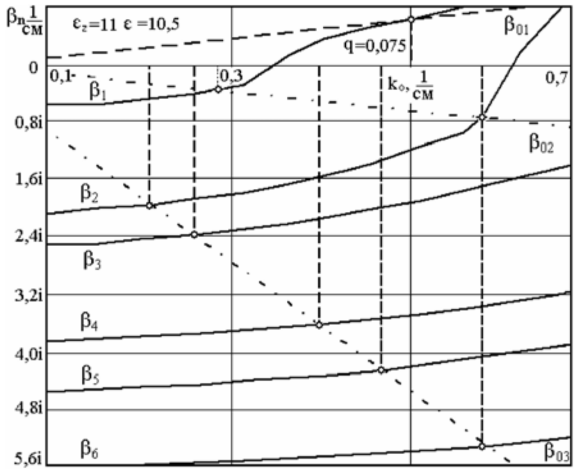

Рис. 9. Дисперсионные кривые для анизотропного волновода и особые точки характеристической функции

Собственные типы волн в волноводе с образцом представляют собой квази-ТМ и квази-TE волны и при $q = 0$ вырождаются в TM_{n0} и TE_{n0} волны, соответственно. Поведение дисперсионных кривых с изменением q при малых значениях волнового числа k_0 представлено на рис.10. Видно, что в области значения $k_0 = 0.3$ постоянные распространения, являющиеся мнимыми, изменяются незначительно, имея монотонный характер, до значений $q \leq 0.3$ (рис.11) и далее с ростом k_0 переходят в вещественную область значений.

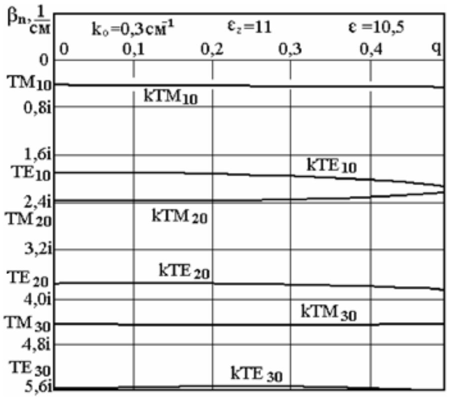

Рис. 10. Дисперсионные кривые в анизотропном волноводе

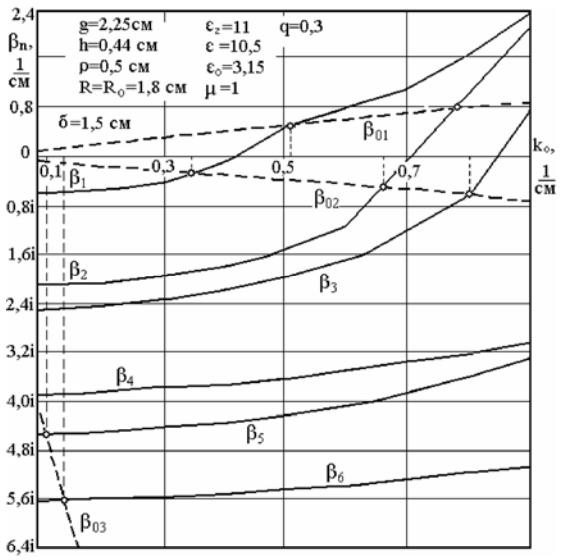

Рис. 11. Дисперсионные кривые и интервалы существования характеристической функции

При $q \approx 0.35$ (рис.12) дисперсионные кривые для квази-TE_{10} и квази-TM_{20}, квази-TE_{20} и квази-TM_{30} при определенных значениях волнового числа попарно «схлопываются» и превращаются в комплексные волны; затем, начиная с некоторых значений k_0, они снова возникают. При таком положении использование собственных волн анизотропного волновода для представления поля собственного колебания в резонаторе при больших значениях анизотропии сомнительно из-за их неполноты. При $\varepsilon \neq \varepsilon_z$, $q > \left|1 - \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon}\right|$ особые точки находятся в точках пересечения дисперсионных кривых с графиками

$$\beta_s = i\sqrt{\varepsilon\mu}\, k_0 \left\{ \frac{q^2\left(1+\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon}\right) \pm 2q\sqrt{\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon}\left[q^2 - \left(1-\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon}\right)\right]^2}}{\left(1-\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon}\right)^2} - 1 \right\}^{1/2}$$

Численные расчеты показали, что в квазистатическом случае, когда в анизотропном волноводе ни одна волна не является распространяющейся, параметр недиагональной анизотропии q не влияет на величину характеристического числа.

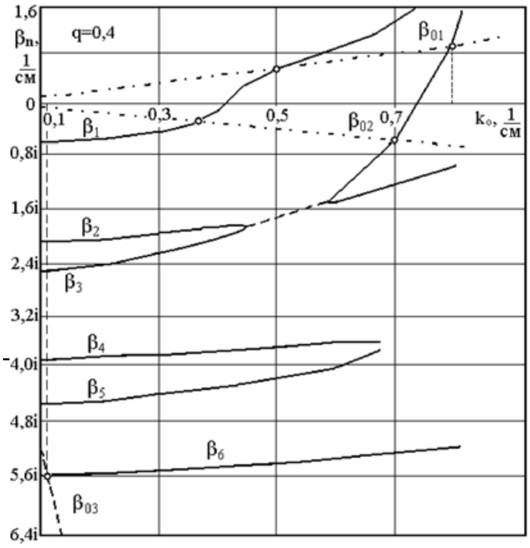

Рис.12. «Схлопывание» дисперсионных кривых в сильно анизотропном волноводе

Соответствующие результаты расчетов приведены в таблице.

q	0,01	0,025	0,04	0,1	0,2	*0,3*
k_{p1}	0,29378	0,29378	0,29378	0,29378	0,29378	*0,2937*
k_{p2}	*0,36384*	*0,36384*	*0,36384*	*0,36384*	*0,36384*	*0,3638*

Это обстоятельство не позволяет использовать рассматриваемые колебания для установления ожидаемой связи между резонансной частотой и концентрацией свободных носителей заряда. С появлением анизотропии ($q \neq 0$) в резонаторе, как видно из таблицы, возникают два собственных колебания квази-TEM типа. Такое положение, очевидно, объясняется. усложнением структуры поля как в диэлектрическом образце, так и в коаксиальном отрезке, что приводит к «расщеплению» исходного колебания.

В заключение отметим, что в случае диагональной анизотропии диэлектрического образца ($q = 0$, $\varepsilon \neq \varepsilon$) монотонный характер зависимости резонансной частоты (рис.13) для квази-TEM колебания позволяет решить практически задачу определения неизвестных компонент тензора диэлектрической проницаемости.

Для этого предварительно из уравнения (32) по экспериментально определенному значению резонансной частоты H_{01} колебания вычисляют величину ε. Далее, подставляя её значение и экспериментально определенную резонансную частоту квази-TEM колебания в уравнение (29), вычисляют величину ε_z. При этом «чувствительность» ε_z к изменению характеристического числа на порядок выше «чувствительности» ε.

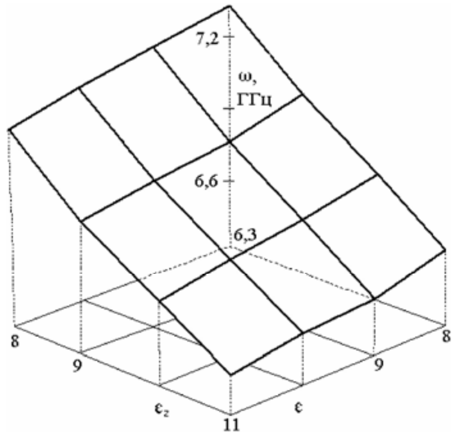

Рис. 13. Зависимость резонансной частоты от компонент тензора

6. Оценка погрешности

Для выяснения степени и характера влияния зазора между коаксиальной частью и диэлектрическим образцом рассмотрим электродинамическую систему, представленную на рис.14.

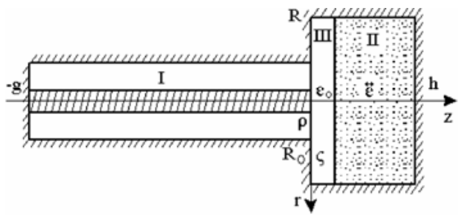

Рис. 14. Осевое сечение полой электродинамической системы с полупроводниковым образцом и воздушным слоем

Опуская промежуточные выкладки и полагая $\delta = R$, можно прийти к характеристическому уравнению для колебаний E_{0m} -типа. Следует учитывать только то, что

$$Y_m^{II} = ik_0 \frac{1 - \varepsilon_d \dfrac{\beta_m^{II}}{\beta_m^{III}} \operatorname{tg}(\beta_m^{II} h)\operatorname{tg}(\beta_m^{III}\zeta)}{\beta_m^{II}\operatorname{tg}(\beta_m^{II} h) + \beta_m^{III}\operatorname{tg}(\beta_m^{III}\zeta)}, \quad N_m^{II} = \frac{R^2}{2} J_1^2(\alpha_m),$$

где α_m – корни функции $J_0(\alpha)$, $h = H - \zeta$ и

$$D_{mn} = \frac{\alpha_m}{\chi_m^2 - \chi_{En}^{I2}} \times$$

$$\times \left[J_0\left(\alpha_m \frac{R_0}{R}\right) Z_1(\chi_{En}^I R_0) - \frac{\rho}{R_0} J_0\left(\alpha_m \frac{\rho}{R}\right) Z_1(\chi_{En}^I \rho) \right],$$

где $\chi_m = \dfrac{\alpha_m}{R}, (\beta_m^{III})^2 = \chi_m^2 - k_0^2, (\beta_m^{II})^2 = \chi_m^2 - \varepsilon_d k_0^2.$

Нетрудно заключить, что отношение элементов диагональных матриц $Y_m^{II} N_m^{-1}$ для случаев $\zeta \to 0$ и $\zeta = 0$ с учетом того обстоятельства, что $(\beta_m^{II})^2 < (\beta_m^{III})^2$, выражается соотношением:

$$\frac{1 + \zeta\varepsilon_d \beta_m^{II} \operatorname{th}(\beta_m^{II} h)}{1 + \zeta\varepsilon_d \dfrac{(\beta_m^{III})^2}{\beta_m^{II}} \operatorname{cth}(\beta_m^{II} h)} \le 1.$$

Следовательно, наличие воздушного зазора влечет незначительное увеличение резонансной частоты.

7. Выводы

В данной статье развита математическая модель резонаторного измерительного сенсора при использовании его для определения параметров полупроводника, диэлектрическая проницаемость которого при наличии внешнего магнитного поля является анизотропной. *Научная новизна* полученных результатов состоит в следующем.

1. Для расчета параметров полого резонатора коаксиального типа, содержащего среду с анизотропной диэлектрической проницаемостью, применен модифицированный метод Трефтца. Получены характеристические уравнения для резонансных частот и добротности резонатора.

2. Проведена проверка полученных выражений с использованием случаев, допускающих простую физическую интерпретацию.

3. Из рассмотрения альтернативных вариантов показано, что волны в круглых волноводах с образцом представляют собой квази-ТМ и квази-TE колебания. При больших значениях анизотропии их использование для оценки параметров полупроводников сомнительно, так как поведение дисперсионных кривых не позволяет применять рассматриваемые колебания для установления ожидаемой связи между резонансной частотой и концентрацией свободных носителей заряда.

4. Показано, что в случае диагональной анизотропии диэлектрического образца можно решить практически задачу определения неизвестных компонент тензора диэлектрической проницаемости. Для этого предварительно по экспериментально определенным значениям резонансных частот H_{01} и квази-ТЕМ колебаний вычисляют сначала величину ε, затем величину ε_z. При этом «чувствительность» ε_z к изменению характеристического числа на порядок выше «чувствительности» ε.

5. Проведен анализ степени и характера влияния зазора между коаксиалом и диэлектрическим образцом, который показал, что наличие воздушного зазора не влечет значительного увеличения резонансной частоты и, следовательно, результирующей погрешности.

Литература: 1. *Слипченко Н.И., Костычев Ю.Г., Золотарев В.А.* Оценка эффективности метода Трефтца при анализе электродинамических систем для СВЧ диагностики полупроводников и диэлектриков // Радиоэлектроника и информатика. 2001. №1. С.20-24. **2.** *Гуревич А.Г.* Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках. М.: Наука,1973. 591 с. **3.** *Никольский В.В.* Автоматизированное проектирования устройств СВЧ. М.: Радио и связь, 1982. 272 с. **4.** *Вайнштейн Л.А.* Электромагнитные волны. М.: Сов. радио, 1957. 367 с.

Поступила в редколлегию 03.11.2007

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф.Чурюмов Г.А.

Слипченко Николай Иванович, канд.техн.наук, профессор, проректор по научной работе ХНУРЭ. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. +38-057-702-10-13.