УДК 004.93'1

МЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГРАНУЛЯЦИИ ИНФОРМАЦИИ

А. Г. Каграманян[1], В. П. Машталир[2], В. В. Шляхов[3]

[1] ХНУ, г. Харьков, Украина

[2] ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

[3] ХНУРЭ, г. Харьков, Украина

Для задач грануляции — представления информации с различной степенью ее детализации или обобщения — исследуются метрические свойства конечных разбиений произвольных измеримых множеств. Вводится и обосновывается метрика, для которой указываются равносильные формы представления, предлагаются ее вероятностные интерпретации. Обсуждается гипотеза об общем виде функционала, являющегося метрикой на разбиениях измеримых множеств.

ГРАНУЛЯЦИЯ, МНОЖЕСТВО, РАЗБИЕНИЕ, МЕТРИКА.

Введение

Granular Computing — грануляция информации, включающая в себя огрубление-детализацию данных, их стратифицированную структуризацию и причинно-следственные отношения в процессе регистрации, трансформации и интерпретации [1], оперирует, как правило, с разбиениями исходного (или индуцированного признакового) пространства [2]. Применение классов эквивалентностей, выступающих в качестве, пожалуй, основного объекта изучения и манипуляций, приводит к необходимости решения целого класса задач. В первую очередь следует указать поиск и анализ внутренних эквивалентностей [3, 4], установление правомочности (согласованности) использования совокупности эквивалентностей [5, 6], в том числе внешних, введение которых диктуется предметной областью, наконец, разумное определение контекстно-зависимых операций на классах эквивалентностей [7, 8]. Достаточно общим вопросом для задач указанного типа является анализ сходства (различия) между ансамблями группировок данных. Однако метрические свойства, вообще говоря, хорошо изучены лишь для анализа в форматах «точка–точка», «точка–множество», «множество–множество».

Наибольшего развития сравнение разбиений достигло при исследовании эффективности кластеризации [9, 10] и сегментации изображений [11–13] в основном в рамках «ground truth» подхода. Иначе говоря, когда результаты автоматической грануляции сравниваются с результатами, полученными человеком. Как правило, самые распространенные коэффициенты сходства (различия) не удовлетворяют неравенству треугольника, что ограничивает диапазон их использования. Вместе с тем известен и ряд метрик на разбиениях. Прежде всего — это метрика, имеющая структурное сходство с метрикой Хаусдорфа, в основу которой положены суммы максимальных мощностей пересечений каждого класса эквивалентностей со всеми элементами разбиений второго множества [14]. Достаточно широкое распространение получила метрика энтропийного типа, названная вариацией информации, которая базируется на понятиях теории информации [15]. При использовании метрики MiCRoM (Minimum Cost Region Matching) поиск расстояния между разбиениями сводится к решению задачи математического программирования, а именно — транспортной задачи [16].

На интуитивном уровне понятно, что метрика на разбиениях должна интегрально учитывать характеристики и сходства, и различия классов эквивалентностей. В этом плане можно выделить простейший инструмент — операции пересечения и симметрической разности, соответственно. Конечномерный случай построения метрики такого типа обоснован в [17], некоторые метрические свойства для разбиений произвольных множеств проанализированы в [18]. Цель работы — обоснование, анализ и интерпретация инструментальных средств «множественного» сравнения, т. е. сравнения фактор-множеств.

1. Постановка задачи

Пусть некоторое измеримое множество Ω с мерой $\mu(\circ)$ характеризует информацию, подлежащую в процессе анализа грануляции. Под мерой понимается количество точек (в конечном случае), длина, площадь, объем, распределение масс, вероятностей и т. п. Будем полагать, что мера конечна, т. е. $\mu(\Omega)<\infty$ и F_Ω — множество всех измеримых подмножеств множества Ω. Рассмотрим Π_Ω — множество конечных (по числу элементов) разбиений множества Ω, т. е. $\alpha\in\Pi_\Omega \Leftrightarrow \alpha=\{A_i\}_{i=1}^n$:

$$\begin{cases} A_i\in F_\Omega \quad \forall i\in\{1,2,\ldots,n\};\\ A_i\cap A_{i'}=\varnothing, \quad \forall i\neq i'\in\{1,2,\ldots,n\};\\ A_1\cup\ldots\cup A_n=\Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Пусть даны произвольные разбиения $\alpha,\beta,\gamma,\ldots\in\Pi_\Omega$ и $\alpha=\{A_i\}_{i=1}^n$, $\beta=\{B_j\}_{j=1}^m$, $\gamma=\{C_k\}_{k=1}^l,\ldots$. Задача заключается в установлении, изучении и интерпретации соотношений между $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$.

2. Метрические свойства разбиений

Введем на $\Pi_\Omega \times \Pi_\Omega$ функционал

$$\rho(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mu(A_i \triangle B_j)\mu(A_i \cap B_j), \quad (2)$$

где «$\triangle$» — симметрическая разность множеств, и покажем, что он представляет собой метрику на произвольных разбиениях измеримых множеств. Предварительно укажем несколько полезных свойств разбиений и найдем эквивалентную форму функционала (2).

Свойство 1. Для любого множества $D \subseteq \Omega$ и произвольного разбиения $\alpha \in \Pi_\Omega$ справедливо равенство $\mu(D)=\sum_{i=1}^{n}\mu(D\cap A_i)$.

Действительно, разбиение $\alpha \in \Pi_\Omega$ дробит множество D на непересекающиеся подмножества $D\cap A_i$, и тогда из свойства аддитивности меры следует требуемое равенство.

Свойство 2. Пересечение $\alpha\cap\beta=\{A_i \cap B_j\}_{i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m}}$ пары $\alpha,\beta \in \Pi_\Omega$ произвольных разбиений также является разбиением.

Действительно, если выбрать произвольный элемент $\omega\in\Omega$, то, поскольку α и β являются разбиениями, найдутся номера $i\in\{1,\ldots,n\}$ и $j\in\{1,\ldots,m\}$, для которых $\omega\in A_i$ и $\omega \in B_j$, т. е. $\omega\in A_i\cap B_j$. Таким образом,

$$\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{m}\{A_i\cap B_j\}=\Omega . \quad (3)$$

С другой стороны, в силу ассоциативности и коммутативности операции пересечения множеств можно записать:

$$(A_i\cap B_j)\cap(A_{i'}\cap B_{j'})=(A_i\cap A_{i'})\cap(B_{j'}\cap B_j).$$

Но поскольку пары (i,j) и (i',j') не равны, то либо $i\neq i'$, либо $j\neq j'$, либо эти неравенства выполняются одновременно, что означает: одно из множеств $A_i\cap A_{i'}$ или $B_{j'}\cap B_j$ равно $\varnothing$, т. к. они принадлежат разбиениям α и β, соответственно. Таким образом, в итоге имеем

$$(A_i\cap B_j)\cap(A_{i'}\cap B_{j'})=\varnothing$$

для любых пар $(i,j),(i',j')\in\{1,\ldots,n\}\times\{1,\ldots,m\}$. В совокупности с равенством (3) получаем выполнение соотношений (1), т. е. справедливость свойства 2.

Рассмотрим пересечения трех произвольных разбиений $\alpha,\beta,\gamma\in\Pi_\Omega$ и обозначим $\theta_{ijk}=\mu(A_i\cap B_j\cap C_k)$, $i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m};\ k=\overline{1,l}$.

Свойство 3. Для пересечений трех произвольных разбиений $\alpha,\beta,\gamma\in\Pi_\Omega$ верны соотношения:

$$\mu(C_k)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\theta_{ijk}, \quad (4)$$

$$\mu(A_i\cap B_j)=\sum_{k=1}^{l}\theta_{ijk}, \quad (5)$$

$$\mu(A_i\cap C_k)=\sum_{j=1}^{m}\theta_{ijk}, \quad (6)$$

$$\mu(B_j\cap C_k)=\sum_{i=1}^{n}\theta_{ijk}. \quad (7)$$

Действительно, если в соответствии со свойством (2) рассмотреть разбиение $\xi=\alpha\cap\beta$ и применить свойство 1, полагая, что D — это множество C_k, то

$$\mu(C_k)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mu(C_k\cap(A_i\cap B_j))=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\theta_{ijk},$$

т. е. получаем равенство (4). Рассуждая совершенно аналогично и используя в качестве D поочередно множества $A_i\cap B_j, A_i\cap C_k, B_j\cap C_k$, а в качестве соответствующего разбиения — γ,β и α, получаем справедливость равенств (5) — (7).

Лемма. Функционал $\rho(\alpha,\beta)$ имеет эквивалентную форму

$$\rho(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}[\mu(A_i)]^2+\sum_{j=1}^{m}[\mu(B_j)]^2-2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[\mu(A_i\cap B_j)]^2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любых измеримых множеств E и F имеет место

$$\mu(E\triangle F)=\mu(E)+\mu(F)-2\mu(E\cap F). \quad (8)$$

Действительно, учитывая равенства

$$E=(E\setminus F)\cup(E\cap F) \text{ и } F=(F\setminus E)\cup(F\cap E),$$

причем $E\setminus F$ и $E\cap F$ не пересекаются, из свойства аддитивности меры получаем:

$$\mu(E)=\mu(E\setminus F)+\mu(F\cap E),$$
$$\mu(F)=\mu(F\setminus E)+\mu(E\cap F),$$

складывая которые с учетом $E\triangle F=(E\setminus F)\cup(F\setminus E)$, имеем:

$$\mu(E)+\mu(F)=\mu(E\setminus F)+\mu(F\setminus E)+2\mu(E\cap F)=$$
$$=\mu(E\triangle F)+2\mu(E\cap F),$$

что равносильно (8).

Применяя (8) к A_i и B_j, представим (2) в виде:

$$\rho(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mu(A_i\triangle B_j)\mu(A_i\cap B_j)=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mu(A_i\cap B_j)\left[\mu(A_i)+\mu(B_j)-2\mu(A_i\cap B_j)\right]=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mu(A_i)\mu(A_i\cap B_j)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\mu(B_j)\mu(A_i\cap B_j)-2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left[\mu(A_i\cap B_j)\right]^2=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\mu(A_i)\sum_{j=1}^{m}\mu(A_i\cap B_j)+$$
$$+\sum_{j=1}^{m}\mu(B_j)\sum_{i=1}^{n}\mu(B_j\cap A_i)-2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left[\mu(A_i\cap B_j)\right]^2.$$

В цепочке этих равенств выделим суммы вида

$$\sum_{j=1}^{m}\mu(A_i \cap B_j),\ \sum_{i=1}^{n}\mu(B_j \cap A_i)$$

и, применяя к ним свойство 1, подразумевая под D A_i и B_j, соответственно, получим:

$$\sum_{j=1}^{m}\mu(A_i \cap B_j) = \mu(A_i),\ \sum_{i=1}^{n}\mu(B_j \cap A_i) = \mu(B_j)$$

для любых i и j, где $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$. Таким образом,

$$\rho(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{n}[\mu(A_i)]^2 + \sum_{j=1}^{m}\left[\mu(B_j)\right]^2 - 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left[\mu(A_i \cap B_j)\right]^2,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 1. Функционал (2), определенный на произвольных измеримых разбиениях α, β измеримого множества Ω, является метрикой.

Доказательство сводится к проверке выполнения аксиом рефлексивности, симметричности и неравенства треугольника.

Симметричность непосредственно следует из вида функционала (2). Докажем рефлексивность, а именно: $\rho(\alpha,\beta)=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta$. Рассмотрим необходимость. Для этого представим функционал (2) в виде:

$$\rho(\alpha,\alpha) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mu(A_i \triangle A_j)\mu(A_i \cap A_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\mu(A_i \triangle A_i)\mu(A_i \cap A_i) + 2\sum_{\substack{i,j=1 \\ i>j}}^{n}\mu(A_i \triangle A_j)\mu(A_i \cap A_j),$$

т. е. $\rho(\alpha,\alpha)$ состоит из n слагаемых с совпадающими номерами, а значит, и с совпадающими элементами разбиения, и из n^2-n слагаемых с различными элементами разбиения. Первая группа слагаемых состоит из нулей, т.к. $\mu(A_i \triangle A_i)=0$, для $i=\overline{1,n}$, а вторая группа дает нулевые слагаемые, т.к. $\mu(A_i \cap A_j)=0$ для $\forall i,j=\overline{1,n}$ и $i \neq j$. Таким образом, в одну сторону рефлексивность доказана.

Покажем достаточность, т. е. пусть для двух, в общем случае, различных разбиений $\alpha,\beta \in \Pi_\Omega$ имеет место $\rho(\alpha,\beta)=0$. Поскольку все слагаемые функционала (2) положительны, то он равен 0 только тогда, когда каждое из них равно 0. Выберем некоторый элемент разбиения $A' \in \alpha$. В исходном функционале он входит в набор «нулевых» слагаемых $\mu(A' \triangle B_j)\mu(A' \cap B_j)=0$, где $j=\overline{1,m}$. Если предположить, что A' не является элементом разбиения β, то для всех $B_j \in \beta$ выполняется $\mu(A' \triangle B_j) \neq 0$. Но тогда для всех номеров j должно выполняться $\mu(A' \cap B_j)=0$. Однако это возможно только тогда, когда $A' \neq \varnothing$, т.к. $A' \in \Omega$, а весь набор $\beta=\{B_j\}_{j=1}^{m}$ покрывает множество Ω. В то же время A' — элемент покрытия β этого же множества Ω и, естественно, $A' \neq \varnothing$. Тогда найдутся элементы разбиения β, покрывающие A' и имеющие с ним непустые пересечения. Но тогда для этих элементов выполняется неравенство $\mu(A' \cap B_j) \neq 0$, т. е. получаем противоречие. В итоге можно утверждать, что произвольный элемент $A' \in \alpha$ является элементом β, или $\alpha \subset \beta$. В силу симметрии абсолютно аналогично можно показать, что $\beta \subset \alpha$, т. е. $\alpha=\beta$. Таким образом, рефлексивность доказана.

Приступим к доказательству неравенства треугольника. Допустим, имеется три произвольных разбиения $\alpha,\beta,\gamma \in \Pi_\Omega$ множества Ω. Необходимо доказать, что

$$\rho(\alpha,\gamma)+\rho(\gamma,\beta) \geq \rho(\alpha,\beta). \tag{9}$$

Используя лемму 1, получим:

$$\rho(\alpha,\gamma)+\rho(\gamma,\beta) = \sum_{i=1}^{n}[\mu(A_i)]^2 + \sum_{j=1}^{m}\left[\mu(B_j)\right]^2 +$$

$$+2\sum_{k=1}^{l}[\mu(C_k)]^2 - 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{l}[\mu(A_i \cap C_k)]^2 -$$

$$-2\sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}\left[\mu(C_k \cap B_j)\right]^2.$$

Отсюда:

$$\rho(\alpha,\gamma)+\rho(\gamma,\beta)-\rho(\alpha,\beta) =$$

$$= \sum_{k=1}^{l}[\mu(C_k)]^2 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{l}[\mu(A_i \cap C_k)]^2 -$$

$$-\sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{m}[\mu(B_j \cap C_k)]^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[\mu(A_i \cap B_j)]^2.$$

Тем самым, неравенство (9), используя свойство 3, можно представить в виде:

$$\sum_{k=1}^{l}\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\theta_{ijk}\Big)^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{k=1}^{l}\theta_{ijk}\Big)^2 \geq$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{l}\Big(\sum_{j=1}^{m}\theta_{ijk}\Big)^2 + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}\Big(\sum_{i=1}^{n}\theta_{ijk}\Big)^2. \tag{10}$$

Зафиксируем $l=1$, тогда, обозначая $g_{ij}=\theta_{ij1}$, для любых $g_{ij} \geq 0$, $i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m}$, имеем:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}g_{ij}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(g_{ij})^2 \geq \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}g_{ij}\right)^2 + \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}g_{ij}\right)^2. \tag{11}$$

Заметим, если интерпретировать набор чисел g_{ij} как $(n \times m)$ матрицу G, то в правой части этого неравенства в скобках, соответственно, стоят сумма элементов строк и сумма элементов столбцов. Структура левой части неравенства имеет вид:

$$2\sum_{i,j} g_{ij}^2 + \sum_{(i,j)\neq(i',j')} g_{ij} g_{i'j'}, \qquad (12)$$

а правой:

$$2\sum_{i,j} g_{ij}^2 + \sum_i \sum_{j\neq j'} g_{ij} g_{ij'} + \sum_j \sum_{i\neq i'} g_{ij} g_{i'j}. \qquad (13)$$

Сравнивая (12) и (13), отметим: у них есть общая часть (удвоенная сумма квадратов), в (12) входят все попарные произведения элементов матрицы G с неравными индексами, а в (13) — все попарные произведения с неравными индексами, но из одной строки или из одного столбца (т. е. отсутствуют попарные произведения, например, диагональных элементов). Таким образом, в (13) число слагаемых меньше, чем в выражении (12), и при этом все слагаемые выражения (13) содержатся в (12), т. е. неравенство (11) доказано (выполняется (10) при $l=1$). Рассмотрим теперь числа θ_{ijk} как набор из l матриц:

$$G_k = (g_{ij}^k)_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,m}}},\ g_{ij}^k = \theta_{ijk},\ k=\overline{1,l}.$$

Тем самым, неравенство (10) трансформируется к виду:

$$\sum_k \Big(\sum_{i,j} g_{ij}^k\Big)^2 + \sum_{i,j}\Big(\sum_k g_{ij}^k\Big)^2 \geq \sum_{i,k}\Big(\sum_j g_{ij}^k\Big)^2 + \sum_{j,k}\Big(\sum_i g_{ij}^k\Big)^2$$

или

$$\sum_k \Big[\Big(\sum_{i,j} g_{ij}^k\Big)^2 + \Big(\sum_{i,j} g_{ij}^k\Big)^2\Big] + S \geq$$
$$\geq \sum_k \Big[\sum_i \Big(\sum_j g_{ij}^k\Big)^2 + \sum_j \Big(\sum_i g_{ij}^k\Big)^2\Big],$$

где $S = \sum_{i,j}\Big(\sum_k g_{ij}^k\Big)^2 - \sum_{i,j,k}\big(g_{ij}^k\big)^2 \geq 0,$

поскольку состоит только из двойных произведений элементов матриц G_k, а все $g_{ij}^k \geq 0$. С другой стороны, применяя (11) к каждой из матриц G_k, суммируя по k и добавляя в левую часть S, получаем последнее неравенство, а следовательно, справедливость (10), что завершает доказательство неравенства треугольника и теоремы в целом.

Таким образом, показано, что введенный нами функционал (2) на конечных разбиениях на измеримые подмножества измеримого множества Ω является метрикой.

Теорема 2. Для произвольной области $\Omega \subseteq \mathbb{R}^s$ и почти всюду (за исключением множеств меры ноль) положительной функции $f(x)$, для которой справедливо $\int_\Omega f(x)dx < \infty$, и пары произвольных разбиений $\alpha, \beta \in \Pi_\Omega$, имеет место

$$\Big(\int_\Omega f(x)dx\Big)^2 \geq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \Big(\int_{A_i\cap B_j} f(x)dx\Big)^2 +$$
$$+\sum_{i=1}^n \sum_{i'=i+1}^n \int_{A_i} f(x)dx \int_{A_{i'}} f(x)dx + \qquad (14)$$
$$+\sum_{j=1}^m \sum_{j'=j+1}^m \int_{B_j} f(x)dx \int_{B_{j'}} f(x)dx.$$

Доказательство. Поскольку функции $f(x)$ индуцируют меру на измеримых подмножествах $A \subseteq \Omega$ в виде интеграла $\mu(A) = \int_A f(x)dx$, тогда для двух конечных разбиений α, β будем иметь:

$$d(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \int_{A_i \triangle B_j} f(x)dx \int_{A_i\cap B_j} f(x)dx.$$

В соответствии с леммой, принимая во внимание неотрицательность функции $d(\alpha,\beta)$, получаем интегральное неравенство

$$\sum_{i=1}^n \Big[\int_{A_i} f(x)dx\Big]^2 + \sum_{j=1}^m \Big[\int_{B_j} f(x)dx\Big]^2 \geq 2\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \Big[\int_{A_i\cap B_j} f(x)dx\Big]^2,$$

дополняя в котором левую часть до сумм полных квадратов, находим

$$\Big[\sum_{i=1}^n \int_{A_i} f(x)dx\Big]^2 + \Big[\sum_{j=1}^m \int_{B_j} f(x)dx\Big]^2 \geq 2\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \int_{A_i\cap B_j} f(x)dx\Big]^2 +$$
$$+2\sum_{i=1}^n \sum_{i'=i+1}^n \int_{A_i} f(x)dx \int_{A_{i'}} f(x)dx + 2\sum_{j=1}^m \sum_{j'=j+1}^m \int_{B_j} f(x)dx \int_{B_{j'}} f(x)dx.$$

Учитывая, что α, β — конечные (по числу классов эквивалентностей) разбиения множества Ω, имеем:

$$\sum_{i=1}^n \int_{A_i} f(x)dx = \int_\Omega f(x)dx,\quad \sum_{j=1}^m \int_{B_j} f(x)dx = \int_\Omega f(x)dx,$$

откуда сразу же следует неравенство (14), что и требовалось доказать.

На множестве разбиений Π_Ω введем функционал

$$S(\alpha) = \sum_{i=1}^n [\mu(A_i)]^2 \qquad (15)$$

и обозначим $\alpha\beta = \alpha \cap \beta$, тогда справедлива

Теорема 3. Для любых трех разбиений $\alpha, \beta, \gamma \in \Pi_\Omega$ множества Ω справедливо неравенство

$$S(\gamma) \geq S(\alpha\gamma) + S(\beta\gamma) - S(\alpha\beta). \qquad (16)$$

Доказательство. Во-первых, метрика на разбиениях $\rho(\alpha,\beta)$ с учетом леммы 1 может быть выражена через функционал (15):

$$\rho(\alpha,\beta)=S(\alpha)+S(\beta)-2S(\alpha\beta).$$

Во-вторых, из неравенства треугольника для метрики (2) и любых трех разбиений $\alpha,\beta,\gamma\in\Pi_\Omega$ получаем:

$$S(\alpha)+S(\gamma)-2S(\alpha\gamma)+S(\beta)+S(\gamma)-2S(\beta\gamma)\geq$$
$$\geq S(\alpha)+S(\beta)-2S(\alpha\beta),$$

откуда следует требуемое неравенство (16). Таким образом, теорема 3 доказана.

Из теорем 2 и 3 вытекает

Следствие 1. Для произвольной области $\Omega\subseteq\mathbb{R}^s$ и функции $f(x)$, удовлетворяющей условиям теоремы 2 и произвольных разбиений $\alpha,\beta,\gamma\in\Pi_\Omega$, имеет место

$$\Big(\int_\Omega f(x)dx\Big)^2\geq\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{l}\Big(\int_{A_i\cap C_k}f(x)dx\Big)^2+\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}\Big(\int_{B_j\cap C_k}f(x)dx\Big)^2+$$
$$+2\sum_{k=1}^{l}\sum_{k'=i+1}^{l}\int_{C_k}f(x)dx\int_{C_{k'}}f(x)dx-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\Big(\int_{A_i\cap B_j}f(x)dx\Big)^2.$$

Доказательство. Для произвольного конечного разбиения $\alpha\in\Pi_\Omega$ функционал (12) примет вид:

$$S(\alpha)=\sum_{i=1}^{n}\Big[\int_{A_i}f(x)dx\Big]^2.$$

Неравенство (16) в этой ситуации станет интегральным и будет иметь форму:

$$\sum_{k=1}^{l}\Big(\int_{C_k}f(x)dx\Big)^2\geq\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{l}\Big(\int_{A_i\cap C_k}f(x)dx\Big)^2+$$
$$+\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}\Big(\int_{B_j\cap C_k}f(x)dx\Big)^2-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\Big(\int_{A_i\cap B_j}f(x)dx\Big)^2.$$

Если к левой и правой части этого неравенства прибавить слагаемое

$$2\sum_{k=1}^{l}\sum_{k'=k+1}^{l}\int_{C_k}f(x)dx\int_{C_{k'}}f(x)dx,$$

то его правая часть сразу примет требуемый вид, а левая часть с учетом того, что $\gamma=\{C_k\}_{k=1}^{l}$ — разбиение области Ω, будет представлена в форме:

$$\sum_{k=1}^{l}\Big(\int_{C_k}f(x)dx\Big)^2+2\sum_{k=1}^{l}\sum_{k'=k+1}^{l}\int_{C_k}f(x)dx\int_{C_{k'}}f(x)dx=$$
$$=\Big(\sum_{k=1}\int_{C_k}f(x)dx\Big)^2=\Big(\int_\Omega f(x)dx\Big)^2,$$

что и требовалось доказать.

3. Вероятностная интерпретация метрики

Из свойства 1 следует, что для любого $D\subseteq\Omega$ при $\mu(A_i)\neq0$

$$\frac{\mu(D)}{\mu(\Omega)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu(D\cap A_i)}{\mu(\Omega)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\mu(D\cap A_i)}{\mu(A_i)}\frac{\mu(A_i)}{\mu(\Omega)},\quad(17)$$

тогда, прибегая к терминологии теории вероятностей, можно говорить о наборе $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ как о наборе гипотез, и соотношение (17) представляет собой формулу полной вероятности

$$p(D)=\sum_{i=1}^{n}p(A_i)p(D/A_i),$$

где $p(D)=\mu(D)/\mu(\Omega)$, $p(A_i)=\mu(A_i)/\mu(\Omega)$ — вероятности события D и гипотез A_i, а

$$p(D/A_i)=\frac{\mu(D\cap A_i)}{\mu(\Omega)}\frac{\mu(\Omega)}{\mu(A_i)}=\frac{\mu(D\cap A_i)/\mu(\Omega)}{\mu(A_i)/\mu(\Omega)}=\frac{p(D\cap A_i)}{p(A_i)}$$

является условной вероятностью события D при условии выполнения гипотезы A_i. Таким образом, можно заключить: свойство 1 может быть получено и как следствие формулы полной вероятности. Но тогда возможна и более тесная связь метрических свойств грануляции информации с иными понятиями теории вероятностей. Остановимся на этом подробнее.

Нетрудно заметить, что если $\Omega\subset\mathbb{R}^s$ — некоторое измеримое множество и имеет место схема геометрической вероятности, тогда вероятность любого события D равна

$$p(D)=\frac{\mu(D)}{\mu(\Omega)},$$

где μ — мера, соответствующая $\mathbb{R}^s$ ($s=1$ — длина, $s=2$ — площадь и т. д.). С другой стороны, если $\rho(\alpha,\beta)$ нормировать, а именно разделить на $\mu^2(\Omega)$, то получим

$$\overline{\rho}(\alpha,\beta)=\frac{\rho(\alpha,\beta)}{\mu^2(\Omega)}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\mu(A_i\triangle B_j)}{\mu(\Omega)}\frac{\mu(A_i\cap B_j)}{\mu(\Omega)}=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}p(A_i\triangle B_j)p(A_i\cap B_j),\quad(18)$$

где $p(A_i\triangle B_j)$ и $p(A_i\cap B_j)$ — вероятности событий $A_i\triangle B_j$ и $A_i\cap B_j$, соответственно. Для метрики (18), использовался функционал (2). В случае, если мы будем пользоваться равенством из леммы, то

$$\overline{\rho}(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}[p(A_i)]^2+[p(B_j)]^2-2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[p(A_i\cap B_j)]^2.\quad(19)$$

Если рассматривать множество Ω как пространства элементарных исходов, являющееся элементом вероятностного пространства $\langle\Omega,\mathcal{F}_\Omega,p\rangle$, где Ω — в общем случае произвольное множество,

$\mathcal{F}_\Omega$ — δ-алгебра его подмножеств, включающая в себя пустое множество $\varnothing$ и Ω, а p — вероятностная мера, относительно которой все элементы $\mathcal{F}_\Omega$ измеримы, т. е. для любого $D \in \mathcal{F}_\Omega$ существует число $0 \le p(D) \le 1$, удовлетворяющее аксиоматике теории вероятностей А. Н. Колмогорова, то на исходном вероятностном пространстве можно рассматривать различные полные группы событий или наборы гипотез. Более точно, учитывая, что для произвольного набора гипотез $\{S_i\}_{i=1}^n$ имеет место: $S_i \in \mathcal{F}_\Omega$, $i = \overline{1,n}$, $\bigcup_{i=1}^n S_i = \Omega$, $S_i \cap S_{i'} = \varnothing \quad \forall i, i' : i \ne i' \in \{1,\dots,n\}$, то метрику (2) и ее равносильную форму из леммы для двух наборов гипотез $K_1 = \{S_i\}_{i=1}^n$ и $K_2 = \{Q_j\}_{j=1}^m$ можно представить в виде:

$$\tilde\rho(K_1,K_2) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m p(S_i \triangle Q_j)\,p(S_i \cap Q_j) =$$
$$= \sum_{i=1}^n [p(S_i)]^2 + \sum_{j=1}^m [p(B_j)]^2 - 2\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m [p(S_i \cap Q_j)]^2.$$

С другой стороны, можно рассматривать две дискретные случайные величины ξ_1 и ξ_2, заданные конечным числом значений, т. е.

ξ_1	x_1	…	x_i	…	x_n
p	u_1	…	u_i	…	u_n

ξ_2	y_1	…	y_j	…	y_m
p	v_1	…	v_j	…	v_m

Здесь $u_i = p(\xi_1 = x_i)$, $i = \overline{1,n}$; $v_j = p(\xi_2 = y_j)$, $j = \overline{1,m}$, а $\{x_i\}_{i=1}^n, \{y_j\}_{j=1}^m$ — наборы различных действительных (комплексных) чисел. Используя равенство (19), можно ввести метрику на множестве этих случайных величин:

$$\overline\rho(\xi_1,\xi_2) = \sum_{i=1}^n [p(\xi_1 = x_i)]^2 + \sum_{j=1}^m [p(\xi_2 = y_j)]^2 -$$
$$-2\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m [p(\xi_1 = x_i\ \xi_2 = y_j)]^2.$$

Если ξ_1 и ξ_2 независимы, то

$$p(\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j) = p(\xi_1 = x_i)\,p(\xi_2 = y_j), \qquad (3.34)$$

тогда, подставляя (3.32) в равенство (3.31), получим:

$$\overline\rho(\xi_1,\xi_2) = \sum_{i=1}^n [p(\xi_1 = x_i)]^2 + \sum_{j=1}^m [p(\xi_2 = y_j)]^2 -$$
$$-2\sum_{i=1}^n [p(\xi_1 = x_i)]^2 \sum_{j=1}^m [p(\xi_2 = y_j)]^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^n [p(\xi_1 = x_i)]^2 \Big\{1 - \sum_{j=1}^m [p(\xi_2 = y_j)]^2\Big\} +$$
$$+\sum_{j=1}^m [p(\xi_2 = y_j)]^2 \Big\{1 - \sum_{i=1}^n [p(\xi_1 = x_i)]^2\Big\}.$$

Если предположить, что распределения случайных величин ξ_1 и ξ_2 равномерны, т. е. все их значения равновероятны: $p(\xi_1 = x_i) = 1/n$, $p(\xi_2 = y_j) = 1/m$ при любых $i = \overline{1,n}$ и $j = \overline{1,m}$, то

$$\overline\rho(\xi_1,\xi_2) = \frac{n}{n^2}\Big(1 - \frac{m}{m^2}\Big) + \frac{m}{m^2}\Big(1 - \frac{n}{n^2}\Big) = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \frac{2}{nm}.$$

Таким образом, фактически доказана

Теорема 4. Расстояние между двумя независимыми конечными равномерными распределениями в смысле равенства (2) равно

$$\overline\rho(\xi_1,\xi_2) = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} - \frac{2}{nm}. \qquad (20)$$

Отметим, что если говорить о независимых случайных величинах, то нельзя говорить об их равенстве. В связи с этим свойство рефлексивности в данном случае отсутствует, что видно и из равенства (20).

Рассмотрим вероятностные интерпретации теорем предыдущего раздела. Из теоремы 2 вытекают три любопытных следствия.

Следствие 2 (для гипотез). Если в некотором вероятностном пространстве имеется два набора гипотез $K_1 = \{S_i\}_{i=1}^n$ и $K_2 = \{Q_j\}_{j=1}^m$, то

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m [p(S_i \cap Q_j)]^2 + \sum_{i=1}^n\sum_{i'=i+1}^n p(S_i)p(S_{i'}) +$$
$$+\sum_{j=1}^m\sum_{j'=j+1}^m p(Q_j)p(Q_{j'}) \le 1.$$

Доказательство с учетом неотрицательности функционала $\tilde\rho(K_1,K_2)$ совершенно аналогично доказательству теоремы 2.

Следствие 3. Если в некотором вероятностном пространстве произвольное событие D разбито на два набора попарно непересекающихся подсобытий $\{\mathrm{E}_i\}_{i=1}^n$ и $\{\Phi_j\}_{j=1}^m$, образующих относительно D полную группу, т. е. $D = \sum_{i=1}^n \mathrm{E}_i = \sum_{j=1}^m \Phi_j$, то

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m [p(\mathrm{E}_i \cap \Phi_j)]^2 + \sum_{i=1}^n\sum_{i'=i+1}^n p(\mathrm{E}_i)p(\mathrm{E}_{i'}) +$$
$$+\sum_{j=1}^m\sum_{j'=j+1}^m p(\Phi_j)p(\Phi_{j'}) \le [p(D)]^2.$$

Следствие 4 (для дискретных случайных величин). Пусть на одном вероятностном пространстве заданы две дискретные случайные величины ξ_1 и ξ_2 с конечным числом значений, т. е.

$$u_i = p(\xi_1 = x_i), i = \overline{1,n};\ \ v_j = p(\xi_2 = y_j), j = \overline{1,m},$$

а $\{x_i\}_{i=1}^n, \{y_j\}_{j=1}^m$ — наборы различных действительных (комплексных) чисел, то

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m [p(\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j)]^2 + \sum_{i=1}^n\sum_{i'=i+1}^n u_i u_{i'} + \sum_{j=1}^m\sum_{j'=j+1}^m v_j v_{j'} \le 1.$$

Если эти случайные величины ξ_1 и ξ_2 еще и независимы, т. е.

$$p(\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j) = p(\xi_1 = x_i)\,p(\xi_2 = y_j) = u_i v_j$$

для любых $i=\overline{1,n}$ и $j=\overline{1,m}$, то

$$\sum_{i=1}^{n} u_i^2 \sum_{j=1}^{m} v_j^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{i'=i+1}^{n} u_i u_{i'} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{j'=j+1}^{m} v_j v_{j'} \le 1.$$

Следствие 4 для своего обоснования использует рассуждения, полностью аналогичные рассуждениям, доказывающим теорему 3, неотрицательность функционала $\overline{\rho}(\xi_1, \xi_2)$ и равенства

$$\sum\nolimits_{j=1}^{n} u_i = \sum\nolimits_{j=1}^{m} v_j = 1.$$

Рассмотрим теперь следствия из теоремы 3.

Следствие 5 (для гипотез). Для любых трех наборов гипотез, $K_1 = \{S_i\}_{i=1}^{n}$, $K_2 = \{Q_j\}_{j=1}^{m}$, $K_3 = \{R_k\}_{k=1}^{l}$, заданных на одном пространстве элементарных исходов Ω, вероятности, связанные с этими гипотезами, удовлетворяют неравенству

$$\sum_{k=1}^{l}[p(R_k)]^2 \ge \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{l}[p(S_i \cap R_k)]^2 + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}[p(Q_j \cap R_k)]^2 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[p(S_i \cap Q_j)]^2.$$

Следствие 6 (для дискретных случайных величин). Пусть на одном пространстве элементарных исходов заданы три дискретные случайные величины с конечным числом значений, т. е. $u_i = p(\xi_1 = x_i)$, $i=\overline{1,n}$; $v_j = p(\xi_2 = y_j)$, $j=\overline{1,m}$; $t_k = p(\xi_3 = z_k)$, $k=\overline{1,l}$, где $\{x_i\}_{i=1}^{n}$, $\{y_j\}_{j=1}^{m}$, $\{z_k\}_{k=1}^{l}$ — наборы действительных (комплексных) чисел, тогда:

$$\sum_{k=1}^{l} t_k^2 \ge \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{l}[p(\xi_1 = x_i, \xi_3 = z_k)]^2 + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}[p(\xi_2 = y_j, \xi_3 = z_k)]^2 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[p(\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j)]^2.$$

Если эти случайные величины независимы в совокупности, т. е.

$$\begin{cases} p(\xi_1 = x_i, \xi_2 = y_j) = u_i v_j, & i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m}; \\ p(\xi_1 = x_i, \xi_3 = z_k) = p_i t_k, & i=\overline{1,n}, k=\overline{1,l}; \\ p(\xi_2 = y_j, \xi_3 = z_k) = v_j t_k, & j=\overline{1,m}, k=\overline{1,l}, \end{cases}$$

то вероятности их распределений будут удовлетворять неравенству

$$\sum_{k=1}^{l} t_k^2 \ge \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{l} u_i^2 t_k^2 + \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{l} v_j^2 t_k^2 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} u_i^2 v_j^2.$$

Приведенные вероятностные интерпретации могут найти широкое применение в мульталгебраических системах [6, 8] и методах грануляции информации [1–5].

Результаты и перспективы исследований

Необходимо подчеркнуть, что проведенное изучение метрических свойств разбиений направлено не столько на получение инструментария для оценки эффективности алгоритмов продуцирования классов эквивалентностей (в задачах кластеризации данных, сегментации изображений и т. п.), сколько на создание объективных предпосылок для синтеза методов интеллектуальной интерпретации фактор-множеств. В качестве типичного примера можно указать поиск компромисса между чрезмерной и недостаточной сегментацией изображений. В этом плане (точнее говоря, при стратифицированной грануляции информации) возникает необходимость исследования метрических свойств частично упорядоченных фактор-множеств — вложенных разбиений. Определенную перспективу составляет и поиск на разбиениях так называемых подобных метрик первого типа ($\rho'(\alpha,\beta) = c\rho''(f(\alpha), f(\beta))$, $c = \mathrm{const}$) и второго типа ($\rho'(f(\alpha), f(\beta)) = \rho'(f(\gamma), f(\delta)) \Leftrightarrow \rho''(\alpha,\beta) = \rho''(\gamma,\delta)$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \Pi_\Omega$). Поясним подробнее на примере.

Поскольку под энтропией понимается функционал вида $H(q) = -\sum\nolimits_{i=1}^{n} q_i \ln q_i$, где $\overline{q} = (q_1, \ldots, q_n)$ — вообще говоря, некоторое дискретное распределение: $\sum\nolimits_{i=1}^{n} q_i = 1$, $0 \le q_i \le 1$, $i=\overline{1,n}$, то, если даны два любых распределения $\overline{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ и $\overline{v} = (v_1, \ldots, v_m)$, или, что равносильно, в нашем случае (см. раздел 4) $u_i = p(A_i)$, $i=\overline{1,n}$, $v_j = p(B_j)$, $j=\overline{1,m}$, тогда метрика энтропийного типа примет вид [15]:

$$\overline{h}(\overline{u}, \overline{v}) = h(\alpha,\beta) = -\sum_{i=1}^{n} p(A_i)\ln p(A_i) - \sum_{j=1}^{m} p(B_j)\ln p(B_j) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p(A_i \cap B_j)\ln p(A_i \cap B_j) = H(\alpha) + H(\beta) - 2H(\alpha \cap \beta).$$

Сравнивая полученное равенство с (19), можно отметить явное сходство между ними. Напрашивается вывод об общей формуле:

$$\rho(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{n} f(p(A_i)) + \sum_{j=1}^{m} f(p(B_j)) - 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(p(A_i \cap B_j)).$$

В нашем случае используется $f(x) = x^2$. В энтропийной метрике — $f(x) = -x\ln x$. Возможно, допустимо использовать другие функции $f(x)$ для получения новых метрик на множестве конечных разбиений измеримого множества Ω. Ответы на вопросы, каковы эти функции и каким свойствам они должны удовлетворять, остаются открытыми.

Список литературы: 1. *Bargiela A., Pedrycz W.* Granular computing: an introduction. Boston, Kluwer Academic Publishers, The Kluwer International Series in Engineering and Computer Science. Vol. 717. 2002. 478 P. 2. *Yao Y.Y.* A partition model of granular computing // Transactions on Rough Sets I / J.F. Peters, et al. (Eds.). — Lecture Notes in Computer Science. — Berlin Heidelberg: Springer-Verlag. — Vol 3100. — 2004 — P. 232-253. 3. *Yao J.T., Yao Y.Y.* Induction of classification rules by granular computing // Rough Sets and Current Trends in Computing / J.J. Alpigini, et al. (Eds.). — Lecture Notes in Artificial Intelligence. — Berlin Heidelberg: Spinger-Verlag. — Vol. 2475. — 2002. — P. 331-338. 4. *Yao Y.Y.* Perspectives of granular computing // Proceedings of IEEE International Conference on Granular Computing. — Vol. 1. — 2005. — P. 85-90. 5. *Doherty P., Lukaszewicz W., Szalas A.* Information granules for intelligent knowledge structures // Rough Sets, Fuzzy Sets, Data Mining, and Granular Computing / G. Wang, et al. (Eds.). — Lecture Notes in Artificial Intelligence. — Berlin Heidelberg: Spinger-Verlag. — Vol. 2639. — 2003. — P. 405-412. 6. *Машталир В.П., Шляхов В.В.* Индуцированная согласованность отношений в задачах грануляции информации // Бионика интеллекта. — №1 (64). — 2006. — С. 19–26. 7. *Lin T.Y.* Granular computing (Structures, representations, and applications) // Rough Sets, Fuzzy Sets, Data Mining, and Granular Computing / G. Wang, et al. (Eds.). — Lecture Notes in Artificial Intelligence. — Berlin Heidelberg: Spinger-Verlag. — Vol. 2639. — 2003. — P. 16-24. 8. *Машталир В.П., Шляхов В.В.* Свойства мультиалгебраических систем в задачах компаративного распознавания // Кибернетика и системный анализ. — 2003. — №6. — С. 12–32. 9. *Jain A.K., Murty M.N., Flynn P.J.* Data clustering: a review // ACM Computing Surveys. — Vol. 31, No. 3. — 1999. — P. 264–323. 10. *Jiang X., Marti C., Irniger C., Bunke H.* Image segmentation evaluation by techniques of comparing clusterings // Image Analysis and Processing / F. Roliand, S. Vitulano (Eds.). — Lecture Notes in Computer Science. — Berlin Heidelberg: Springer-Verlag. — Vol. 3617. — 2005. — P. 344-351. 11. *Jiang X.* Performance evaluation of image segmentation algorithms. // Handbook of Pattern Recognition and Computer Vision / C.H. Chen, P.S.P. Wang (Eds.). — Singapore: World Scientific. — 2005. — P. 525–542. 12. *Jiang X., Marti C., Irniger C., Bunke H.* Distance measures for image segmentation evaluation // EURASIP Journal on Applied Signal Processing. — Vol. 2006. — Article ID 35909. — 10 P. 13. *Jiang X., Marti C., Irniger C., Bunke H.* Image segmentation evaluation by techniques of comparing clusterings. // Image Analysis and Processing / F. Roliand, S. Vitulano (Eds.). — Lecture Notes in Computer Science. — Berlin Heidelberg: Springer-Verlag. — Vol. 3617. — 2005. P. 344–351. 14. *Dongen S.* Performance criteria for graph clustering and Markov cluster experiments // Technical Report: INS-R0012. — Amsterdam: CWI (Centre for Mathematics and Computer Science) — 2000. 15. *Meila M.* Comparing clusterings by the variation of information // Learning Theory and Kernel Machines. — Lecture Notes in Computer Science. — Berlin Heidelberg: Springer-Verlag. — Vol. 2777. — 2003. — P. 173-187. 16. *Stehling R.O., Nascimento M.A., Falcao A.X.* MiCRoM: A metric to compare segmented images // VISUAL 2002 / S.-K. Chang, Z. Chen, S.-Y. Lee. (Eds.). — Lecture Notes in Computer Science. — Berlin Heidelberg: Springer-Verlag. — Vol. 2314. — 2002. P. 12–23. 17. *Mashtalir V., Mikhnova E., Shlyakhov V., Yegorova E.* A Novel metric on partitions for image segmentation. // Proceedings of IEEE International Conference on Advanced Video and Signal Based Surveillance. *avss.* — 2006. — P. 18. 18. *Kinoshenko D., Mashtalir V., Shlyakhov V.* A partition metric for clustering features analysis // International Journal «Information Theories and Applications» — Vol. 14, No 3. — 2007. — P. 230-236.

Поступила в редколлегию 18.01.07