3.Ольшанский В.П.. Криса И.А., Ере́менко С.А. Температурная функция Грина в задаче пластового самонагревания сырья в силосе // Проблемы пожарной безопасности. Вып. 6. – Харьков: ХИПБ, 1999. – С. 99-106.

4.Ольшанский В.П. О температурной функции Грина в задаче пластового самонагревания растительного сырья // Інтегровані технології та енергозбереження. – 2000. – №4. – С 38-44.

Получено 05.05.2000

УДК 518:517.944-947

В.И.КАЛИНИЧЕНКО, канд. физ.-матем. наук
Харьковский национальный университет
Н.П.ПАН
Харьковская государственная академия городского хозяйства
А.В.СОВА, канд. физ.-матем. наук
Харьковский государственный технический университет радиоэлектроники

ВЕРХНИЕ И НИЖНИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ В ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Приводится способ построения таких аппроксимаций, что одна из них дает строгое приближение снизу, а другая – сверху для рассматриваемых задач.

В последние годы наблюдается повышенный интерес к так называемым задачам управления системами с распределенными параметрами [1-4]. Здесь рассматривается абстрагируемый одномерный вариант реальных трехмерных задач электродинамики, теплопроводности, упругости, гидродинамики и т.п., т.е. эти проблемы имеют значительный содержательный смысл. Как известно [4], в задачах оптимального управления и регулирования тем или иным способом приходится решать (чаще всего в реальном масштабе времени) серию прямых задач. Точная математическая формулировка одной из них приведена ниже. В настоящее время нет способов получения точных решений (т.е. в замкнутом аналитическом виде), кроме, быть может, тривиальных случаев, не имеющих практической ценности. Численная же реализация приближенных методов не всегда гарантирует требуемую точность, которая теоретически достигается лишь в пределе, т.е. после выполнения достаточно большого числа шагов.

Здесь предлагается *двусторонний* алгоритм получения приближенных решений “в целом”, построенный таким образом, что точное решение находится “в вилке”. Уточним сказанное. Будем исходить из конкретной задачи и на ее основе решим еще две. При этом решения одной из них дадут приближения к точному решению сверху, а другой – снизу. Алгоритм предусматривает постепенное сужение “зазора” до получения желаемой точности. Существенной является положительная определенность и симметричность оператора краевой задачи, допускающая применение вариационных методов [5, 6]. Контроль точности по норме соответствующего гильбертова пространства [5, 7, 11] обеспечивается привлечением теории двойственности [8], гарантирующей приближение *снизу* к точной нижней грани минимизируемого функционала [9]. Приближение *сверху* следует из его выпуклости [5]. Для поточечной сходимости, т.е. в метрике пространства непрерывных функций (класс С) используем специального вида дифференциальные неравенства и теоремы вложения Соболева [7]. Заметим, что дифференциальные неравенства эффективно применяются для решения задачи Коши (например, метод Чаплыгина [10]). Решение краевых задач как последовательность задач Коши (метод стрельбы и т.п.) в определенном смысле неэффективно. Мы предлагаем нетрадиционный подход, излагаемый ниже.

Итак, рассматривается 1-я краевая задача для уравнения [6]

$$-\left(p(x)u'\right)' + r(x)u = f(x) \quad x \in (a,b) \tag{1}$$

$$u = u(x);\ const1 \ge p(x),\ r(x) \ge const2 > 0;\ f \in H(a,b)$$

с краевыми (пока однородными) условиями типа Дирихле

$$u(a) = u(b) = 0\,. \tag{2}$$

Здесь $H = L_2(a,b)$ – гильбертово пространство суммируемых в квадрате функций. Ответить на вопрос, при каких $f \in H$ поставленная задача имеет классическое решение, затруднительно, а на вопрос о существовании обобщенного решения и его единственности, даже при более слабых предположениях о гладкости p и r, ответить достаточно просто, если перейти к вариационной ее формулировке [5, 6].

В операторной форме задачу (1)-(2) запишем в виде

$$Au = f\,, \tag{3}$$

где оператор A определяется соответствующим дифференциальным выражением (1) и краевыми условиями (2).

Рассмотрим гильбертово пространство $H(a,b)$ со скалярным произведением

$$(u,v) = \int_a^b uv dx\,,\quad u,v \in H \tag{4}$$

и нормой

$$\|u\| = \sqrt{(u,u)} = \left(\int_a^b u^2 dx \right)^{1/2}, \quad u \in H. \tag{5}$$

Предполагаем, что множество элементов из (3) $u \in D_A$, причем D_A плотно в H [5], оператор A линейный симметричный положительно-определенный, т.е. для любых вещественных чисел α, β и для $u, v \in D_A$, как и в формуле (4), выполняются условия [5]

$$\alpha u + \beta u \in D_A; \quad A(\alpha u + \beta v) = \alpha A u + \beta A v;$$

$$(Au, v) = (u, Av); \ (Au, u) \geq \gamma^2 \|u\|^2, \ \gamma \geq const > 0. \tag{6}$$

Справедливо следующее [5, 6] *утверждение*: Элемент $u_o \in D_A$ тогда и только тогда доставляет минимум функционалу

$$J(u) = (Au, u) - 2(u, f), \tag{7}$$

когда он является решением задачи (3).

Это утверждение устанавливает эквивалентность задачи (3) и задачи нахождения элемента $u \in D_A$, на котором достигается минимум функционала J, но ничего не говорит о существовании решения. Оказывается, можно видоизменить постановку вариационной задачи о минимизации $J(u)$ так, чтобы можно было гарантировать существование и единственность ее решения. Обычно поступают таким образом [5]. Вводим на D_A новое скалярное произведение

$$[u, v] = (Au, v) = \int_a^b \{(-(pu')' + ru)v\} dx, \tag{8}$$

$$|u| = \sqrt{(Au, u)}, \quad u \in D_A. \tag{9}$$

Пополнив D_A по введенной норме (9), получим *полное* [11] гильбертово пространство H_A, которое принято называть *энергетическим* пространством, порождаемым оператором A. Отметим, что $D_A \subset H_A \subset H$ и из последнего неравенства (6) следует

$$|u| \geq \gamma^2 \|u\|^2. \tag{10}$$

Вместо функционала J, определенного на D_A, рассмотрим функционал

$$J^+(u) = [u,u] - 2(u,f), \tag{11}$$

совпадающий с $J(u)$ при $u \in D_A$ и имеющий смысл на всем энергетическом пространстве. Из выполнимости неравенства Шварца

$$|(u,f)| \le \|u\| \cdot \|f\| \le \|f\| \cdot |u| / \gamma, \quad u \in H_A \tag{12}$$

следует, что (u,f) – линейный непрерывный функционал, а значит, по теореме Рисса [11] о представлении линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве существует, и притом единственный, элемент $u_o \in H_A$ такой, что

$$\forall u \in H_A, \quad (u,f) = [u, u_o]. \tag{13}$$

Воспользовавшись полученным соотношением, функционал [11] можно представить в виде [5]

$$J^+(u) = [u,u] - 2(u,f) = [u,u] - 2[u,u_o] =$$
$$= [u - u_o, u - u_o] - [u_o, u_o] = |u - u_o|^2 - |u_o|^2. \tag{14}$$

Отсюда очевидно, что

$$\inf_{u \in H_A} J^+(u) = -|u_o|^2, \tag{15}$$

т.е. решение вариационной задачи

$$J^+(u) \to \inf_{u \in H_A} \tag{16}$$

существует единственное и совпадает с u_o. Его принято называть *обобщенным* решением задачи (3) [5-7]. Если оказывается, что $u_o \in D_A$, то, как отмечалось выше, u_o является решением задачи (3) или, что то же самое, (1)-(2), т.е. *классическим* решением. Без особого труда можно показать, что для задачи (3) применима вариационная (16) эквивалентная постановка. Линейность оператора A очевидна, его симметричность и положительная определенность доказываются интегрированием по частям. По этому поводу см. [5-6] или [12]. В развернутом виде функционал J^+ (16) определяется интегралом

$$J^+(u) = \int_a^b \{p(u')^2 + ru^2 - 2uf\} dx. \tag{17}$$

Из представления (17) видно, что p и r могут иметь любой тип особенностей, лишь бы было обеспечено существование интеграла J^+. В частности, они могут быть кусочно-гладкими.

Для решения задачи минимизации применим стандартный метод Ритца [5, 6]. Суть его состоит в следующем. Предположим, что мы обладаем набором функций $\{\varphi_k\}$, $k=1,2,...$ таких, что они точно удовлетворяют однородным граничным условиям (2) и образуют базис в H_A, т.е. не более чем счетную линейно независимую полную систему

$$\varphi_1,\quad \varphi_2,\quad \varphi_3,\ldots \tag{18}$$

Ортогональность базиса (18) желательна, но необязательна. Выберем целое положительное число n и будем искать аппроксимацию u_n элемента u_o, т.е. точного решения (16)

$$u_o = \inf J^+(u)$$

в виде

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k, \tag{19}$$

где φ_k – элементы базиса (18); a_k – некоторые подлежащие определению константы. Их нахождение сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений вида

$$Ra = b, \tag{20}$$

которая есть не что иное, как необходимое условие минимума квадратичной (и линейной) формы

$$F = F(a_1,...,a_n) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_k a_j \int_a^b \{p\varphi'_k\varphi'_j + r\varphi_k\varphi_j\}dx -$$

$$-2\sum_{k=1}^{n} a_k \int_a^b \varphi_k f dx \to \min. \tag{21}$$

Элементы матрицы Ритца R и правого столбца b из (20) определяются выражениями

$$r_{kj} = \int_a^b \{p\varphi'_k\varphi'_j + r\varphi_k\varphi_j\}dx,$$

$$b_k = \int_a^b f\varphi_k dx \qquad (k, j = 1,2,...,n). \tag{22}$$

Матрица системы (20) симметрична и положительно определена, ее определитель $\det R \neq 0$ и, следовательно, система уравнений всегда разрешима и имеет единственное решение.

Функционал $J^+ = J^+(u)$, как легко видеть, является выпуклым. Поэтому любое приближение u_n к точному решению u_o дает приближение к $\inf J^+$ *сверху*. В монографиях по вариационным методам строго доказывается, что такое приближение монотонно (см., например, [5, 6]). Интуитивно этот факт сам по себе очевиден. Эта очень важная информация еще недостаточна для определения критерия прекращения счета. На наш же взгляд, во всяком приближенном методе вопрос достоверности получаемых результатов является центральным. Изложим суть двусторонних приближений в метрике гильбертовых пространств H_A или H [5, 9].

Известно (см. [14]), что

$$J^+(u_n) = \|u - u_o\|^2 - \|u\|^2,$$

отсюда

$$\|u_n - u_o\|^2 = J^+(u_n) - J^+(u_o). \tag{23}$$

Значение точной нижней грани функционала J^+, как правило, неизвестно. Однако если известно какое-либо число J^-, не превосходящее ее, то из (23) получим оценку отклонения u_n от u_o в энергетическом пространстве

$$\|u_n - u_o\| \leq \sqrt{J^+(u_n) - J^-}. \tag{24}$$

Значимость этой оценки тем выше, чем меньше разность

$$\delta = \inf J^+ - J^-. \tag{25}$$

Если $\delta = 0$, то (24) переходит в равенство.

Эффективный алгоритм получения последовательности чисел J^-, стремящейся к точной нижней грани функционала J^+ *снизу*, изложен в [9]. Суть его заключается в следующем.

Наряду с прямой задачей (P) типа inf (16) строится двойственная ей задача (D) типа sup:

$$J^-(v) \to \sup_{v \in V}, \tag{26}$$

где V – некоторое множество элементов v, а J^- – специальным образом построенный функционал. Двойственность понимаем в том смысле, что

$$\inf_{u \in U} J^+(u) = \sup_{v \in V} J^-(v)$$

$$U = \{u : u \in H_1, u(a) = u(b) = 0\}, \quad V = \{v : v \in H_1\}.$$

Опуская промежуточные выкладки и сам способ получения J^-, что приведено в [9], сразу дадим его аналитическое представление

$$J^-(v) = -\int_a^b \left\{v^2 / p + (f + v')^2 / r\right\} dx. \tag{27}$$

Этот функционал является вогнутым в отличие от J^+, который есть выпуклый. К задаче максимизации (25) применим тот же, что и выше, метод Ритца. К точной верхней грани $\sup J^-$ этот метод дает монотонное приближение *снизу*. Поэтому

$$J^-(v) \le \inf J^+(u) = J^+(u_o) \le J^+(u_n), \tag{28}$$

т.е. неравенства (28) дают приближения сверху-снизу к точной нижней грани функционала J^+ прямой задачи или же к точной верхней грани функционала J^- двойственной задачи.

О точности решения прямой задачи (P) (равно как и двойственной (D)) апостериори можно судить из неравенств

а) в метрике гильбертова пространства H_A

$$\left| u_n - u_o \right| \le \sqrt{J^+(u_n) - J^-(v_n)}; \tag{29}$$

б) в метрике исходного гильбертова пространства H

$$\|u_n - u_o\| \le \frac{1}{\gamma}\sqrt{J^+(u_n) - J^-(v_n)}, \tag{30}$$

где в качестве $\gamma = const > 0$ может быть выбрано любое приближение снизу к первому собственному числу оператора A. В [6] приведены и другие константы.

Для оценки поточечной сходимости (метрика класса C непрерывных функций) следует воспользоваться теоремами вложения Соболева [7, с.74] типа

$$\|u\|_C \le M \|u\|_{W_p^l}, \tag{31}$$

где W_p^l – соболевский класс функций. Применительно к нашему случаю $W_p^l = W_2^1 = H_1(a,b)$ – гильбертово пространство функций, интегрируемых с квадратом вместе с интегрируемой также с квадратом обобщенной производной первого порядка. Константа M не зависит от выбора функции u.

По поводу решения задач (P) и (D) сделаем несколько замечаний.

1. Стоит обратить внимание на тот факт, что на элементы $v \in V$ никаких условий, кроме принадлежности классу H_1, не накладывается, т.е., грубо говоря, это произвольные функции. Для их аппроксимаций достаточно воспользоваться *любой* системой линейно независимых функций $\{\varphi_k\}$ полной в H_1, как-то sin-cos, полиномы Чебышева, степенные полиномы и т.п.

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} b\varphi_k \,. \tag{32}$$

2. Из вида функционала J^- следует, что ограничения p, $r \ge const > 0$ существенны и требуют детального рассмотрения.

3. Между решениями прямой и двойственной задач существует прямая зависимость (формулы связи)

$$v = pu', \tag{33}$$

$$u = (f + v')/r. \tag{34}$$

Отсюда следует, что решение v – это коградиент решений u. Этот немаловажный факт способствует эффективности вычислений и контроля.

Целью настоящей работы является получение строгих *поточечных* приближений сверху-снизу к точному решению задачи. Прежде всего получим одно полезное неравенство. Пусть u и v – решения соответствующих задач (p, $r \ge const > 0$):

$$(pv')' - rv = 0 \quad x \in (a,b), \tag{35}$$

$$v(a) = v(b) = 0,$$

$$(pu')' - ru > 0 \quad x \in (a,b), \tag{36}$$
$$u(a) = u(b) = 0 .$$

Из формул (35) и (36) вытекает неравенство

$$(pu')' - (pv')' - r(u-v) = (p(u-v)')' - r(u-v) > 0 . \tag{37}$$

Составим выражение

$$(u-v)\{(p(u-v)')' - r(u-v)\} \tag{38}$$

и проинтегрируем его по промежутку от a до b

$$\int_a^b \left\{(u-v)(p(u-v)')' - r(u-v)^2\right\}dx = -\int_a^b \left\{p(u'-v')^2 + r(u-v)^2\right\}dx < 0 \cdot \tag{39}$$

Из неравенства (39) с учетом (37) и (38) можно прийти к выводу, что $u - v < 0$, т.е. $u < v \quad \forall x \in (a,b)$. Следовательно, если $u_{+\varepsilon}$, u, $u_{-\varepsilon}$ – суть решения соответствующих задач ($\varepsilon > 0$)

$$(pu'_{+\varepsilon})' - ru_{+\varepsilon} = f + \varepsilon \ ; \tag{40}$$

$$(pu')' - ru = f \ ; \tag{41}$$

$$(pu'_{-\varepsilon})' - ru_{-\varepsilon} = f - \varepsilon \tag{42}$$

с однородными условиями на концах интервала для всех трех случаев, то

$$u_{-\varepsilon} < u < u_{+\varepsilon} . \tag{43}$$

Для строгого соблюдения "вилки" (43) мы привлекаем теорию двойственности, изложенную выше, а именно, задаваясь числами $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, причем $\varepsilon >> \delta$, последовательно решаем три задачи типа $\inf$ и три двойственные им типа $\sup$ соответственно формулировкам (40)-(42) с точностью δ (по норме пространств H или H_A). Постепенно уменьшая ε и δ, отслеживаем строгость выполнения неравенств (43), избегая тем самым нарушений последних, что иногда бывает в двусторонних методах в связи с неустойчивостью вычислительных процессов.

В заключение покажем, как перейти от неоднородных краевых условий типа

$$u(a) = A, \quad u(b) = B \tag{44}$$

к однородным вида (2)

$$u(a) = 0, \quad u(b) = 0 . \tag{45}$$

Итак, пусть выполнены условия вида (44). Введем линейную функцию

$$g = \frac{B - A}{b - a}(x - a) + A . \qquad (46)$$

Легко видеть, что $g(a) = A$; $g(b) = B$. Функция $v = u + g$ удовлетворяет однородным граничным условиям и к ее нахождению применимо все вышеизложенное в этой работе. Решения неоднородных краевых задач (1), (44)

$$u = v + g ,$$

где v – решение задачи (1), (45) или, что то же самое, (1)-(2) при $u = v$.

Полученные нами предварительные численные результаты свидетельствуют о высокой эффективности предлагаемого метода.

1.Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1995. – 568 с.

2.Бутковский А.Г., Малый С.А., Андреев Ю.Н. Оптимальное управление нагревом металла. – М.: Металлургия, 1972. – 440 с.

3.Бутковский А.Г., Самойленко Ю.И. Управление квантово-механическими процессами. – М.: Наука, 1984. – 256 с.

4.Лурье К.А. Оптимальное управление в задачах математической физики. – М.: Наука, 1985. – 480 с.

5.Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с.

6.Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике. – М.: Мир, 1985. – 590 с.

7.Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – М.: Наука, 1988. – 336 с.

8.Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974. – 460 с.

9.Калиниченко В.И., Кощий А.Ф., Ропавка А.И. Численные решения задач теплопроводности. – Харьков: Вища школа, 1987. – 112 с.

10.Чаплыгин С.А. Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. – 102 с.

11.Канторович Л.В., Крылов В.И. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 742 с.

12.Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.

Получено 14.04.2000