УДК 621.373

А. Б. БЕЛОГОРЦЕВ, канд. физ.-мат. наук, *Д. М. ВАВРИВ*, д-р физ.-мат. наук, *Г. А. ГРОМОВ*

О ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ХАОТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В НЕАВТОНОМНОМ ОСЦИЛЛЯТОРЕ ВАН-ДЕР-ПОЛЯ

Изучение вероятностных свойств стохастических колебаний, возникающих в нелинейных радиофизических системах, представляет собой важную научную и практическую задачу. Ее решение способствует дальнейшему прогрессу в понимании общих физических закономерностей возникновения сложных хаотических режимов, характерных для широкого класса динамических систем, а также позволяет вырабатывать рекомендации по созданию источников случайных колебаний с управляемыми вероятностными характеристиками. Наиболее подробно с этой точки зрения изучены статистические свойства процессов, порождаемых одномерными и двумерными дискретными отображениями [1; 2]. В ряде случаев статистический анализ проведен также для хаотических колебаний в нелинейных осцилляторах, описываемых дифференциальными уравнениями [3].

Исследованы вероятностные свойства хаотических колебаний, возникающих в осцилляторе Ван дер Поля при его двухчастотном возбуждении. Математическая модель динамики колебаний, возникающих в такой системе, представляет собой совокупность неавтономных укороченных уравнений для амплитуды a и фазы φ колебаний осциллятора:

$$\frac{da}{d\tau} = (1 - a^2)\,a + 2b\cos\Omega\tau\sin\varphi;$$

$$a\frac{d\varphi}{d\tau} = (-\Delta + \beta a^2)\,a + 2b\cos\Omega\tau\cos\varphi.$$

Здесь τ — безразмерное медленное время; β — параметр неизохронности колебаний осциллятора; при записи уравнений (1) произведена нормировка всех величин такая, что амплитуда автономных колебаний и инкремент нарастания при $a = 0$ равны 1. Амплитуды обеих частотных составляющих внешнего сигнала считаются одинаковыми и равными b, нормированные расстройки их частот относительно частоты автоколебаний соответствующего изохронного осциллятора при ($\beta = 0$) равны $\Delta_L = \Delta + \Omega$ и $\Delta_R = \Delta + \Omega$. Системы типа (1) широко используются при описании процессов синхронизации автогенераторов томпсоновского типа в различных диапазонах частот, начиная с обычных ламповых устройств и кончая квантовыми генераторами [4].

Для анализа динамики осциллятора при его двухчастотном возбуждении важное значение имеет информация о характере возбуждаемых колебаний в случае одночастотного воздействия. Если границы диапазона изменения частотной расстройки, в котором осуществляется синхронизация колебаний осциллятора одночастотным источником, обозначить через δ_L, δ_R, ($\delta_L < \delta_R$), то, как показано в работе [5], стохастизация колебаний осциллятора при его двухчастотном возбуждении имеет место, когда $\Delta_L \simeq \delta_L$, $\Delta_R \simeq \delta_R$. Ниже приводятся результаты расчетов для фиксированных значений параметра неизохронности $\beta = 3$ и амплитуд внешних частот $b = 0{,}3$ (относительно слабое воздействие), в этом случае $\delta_L \simeq 1{,}80$; $\delta_R = 3{,}85$.

При исследовании вероятностных свойств, возбуждаемых в осцилляторе хаотических колебаний, основной операцией является процедура статистического усреднения, т. е. усреднения величин, характерных для каждой конкретной фазовой траектории, по ансамблю реализаций. Для проведения соответствующих вычислений на ЭВМ важное значение имеет правильный выбор размера ансамбля, его начального распределения, времени устранения переходных явлений и т. д. Проведение таких предварительных расчетов — необходимый и ответственный этап исследования, на характерных результатах которого мы остановимся прежде всего.

Расчеты показали, что начальное распределение ансамбля (распределение начальных значений a, φ) не оказывает существенного влияния на значения статистических средних в режиме хаотических колебаний, если только размер ансамбля выбран достаточно большим (рис. 1, *а*). На рисунке приведены рассчитанные статистические средние значения амплитуды $\bar{a}$ (сплошные кривые) и фазы $\bar{\varphi}$ (штриховые линии) в фиксированный момент времени в зависимости от размера ансамбля N для двух различных распределений a и φ при $\tau = 0$. Кривые *1* отвечают равномерному распределению начальных фаз в интервале $[0, 2\pi]$ и единичным начальным амплитудам каждой реализации, Кривые 2 — выбору всех начальных амплитуд равных 0,1 и такому же распределению фаз. Эти случаи моделируют две физические ситуации, различающиеся порядком «включения» генератора и подачи на него сигнала от внешнего источника: в первом случае предполагается что в момент $\tau = 0$ внешние колебания начинают воздействовать на генератор, уже работавший до этого в автономном стационарном режиме, во втором — моделируется ситуация, когда самовозбуждение колебаний в осцилляторе, начиная с небольших их начальных значений, происходит под воздействием поданного ранее сигнала от внешнего источника. Из приведенных на рис. 1, *а* зависимостей следует, что с увеличением размера ансамбля N выборочные средние $\bar{a}$ и $\bar{\varphi}$ приближаются к своим предельным значениям, независящим от начального

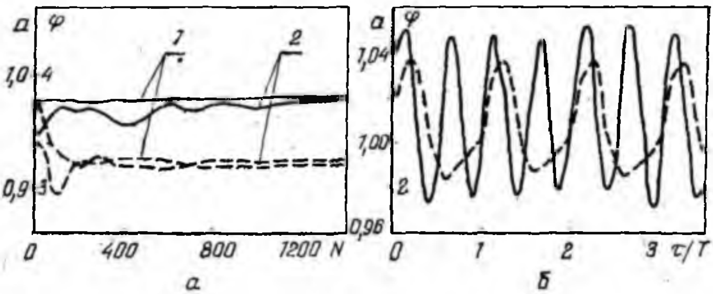

Рис. 1

распределения ансамбля. Для устранения переходных нестационарных явлений, связанных с процессами установления колебаний, оказалось достаточным анализировать статистические характеристики, начиная с момента времени, на порядок большего времени релаксации автономного генератора, которое в нашем случае равно 2.

Методика определения статистических характеристик хаотических колебаний существенно зависит от того, к какому классу случайных процессов принадлежит исследуемый процесс. Оказалось, что возникающие в системе (1) хаотические колебания являются периодически нестационарными. Для иллюстрации этого на рис. 1, *б* приведены зависимости средних по ансамблю значений $\bar{a}$, $\bar{\varphi}$ от времени, рассчитанные путем усреднения по 1200 реализациям. По оси абсцисс на этом рисунке отложены значения величины τ/T — времени, нормированного на интервал $T = 2\pi/\Omega$, равный периоду явной зависимости от времени правых частей уравнений (1). Особенностью изображенных зависимостей является наличие явно выраженной периодичности в изменении $\bar{a}$ и $\bar{\varphi}$ во времени. Отклонение этих зависимостей от строго периодических обусловлено эффектом конечности ансамбля реализаций, неизбежным в численных расчетах, и уменьшается при увеличении N. Период изменения $\bar{a}$ для рассматриваемого случая в два раза меньше периода изменения $\bar{\varphi}$, который совпадает с периодом явной зависимости от времени уравнений (1). При других значениях параметров системы в режиме хаотических колебаний наблюдались также процессы, период нестационарности которых в целое число раз превосходил T.

Аналогичным образом ведут себя другие величины, характеризующие вероятностные свойства хаотических колебаний, такие как дисперсия, моменты высших порядков и др. Периодически зависят от времени также функции распределения вероятностей. Представление об их форме дает рис. 2, где показаны функции плотности вероятности амплитуды (сплошная линия) и фазы (штриховая линия) в фиксированный момент времени для $\Delta_L = 1{,}9$ и $\Delta_R = 3{,}725$; 4,350 (регулярные колебания) и $\Delta_R = 3{,}825$; 4,025 (хаотические колебания). Видно, что значения амплитуд сосредоточены вблизи $a = 1$ — амплитуды автоко-

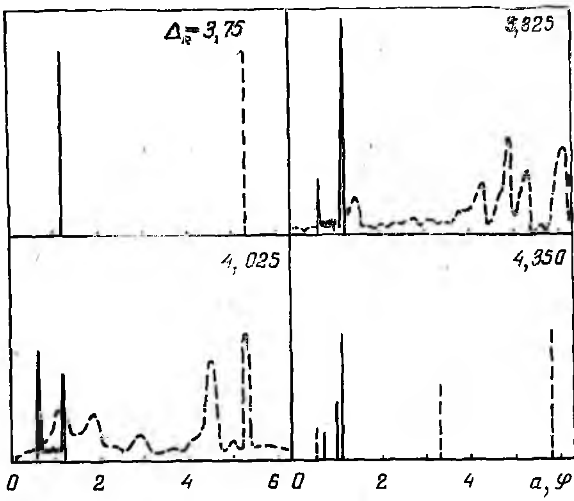

Рис. 1

лебаний, а их распределения в случае хаоса близки к β — распределениям с резкими выбросами на краях, в то время как фаза распределена в интервале $[0,2\pi]$ более равномерно.

Таким образом, проведенные исследования показали, что хаотические колебания, порождаемые системой уравнений (1), являются периодически нестационарными. Учитывая, что величины a и φ — медленно меняющиеся амплитуда и фаза высокочастотных колебаний осциллятора, можно утверждать, что последние есть квазипериодически нестационарные процессы (по аналогии с соответствующими регулярными колебаниями). Можно ожидать, что дальнейшие детальные исследования статистических характеристик хаотических процессов позволят с новой точки зрения подойти к описанию бифуркаций странных аттракторов и классификации соответствующих хаотических колебаний.

Список литературы: 1. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М., 1984. 781 с. 2. *Неймарк Ю. И., Ланда П. С.* Стохастические и хаотические колебания. М., 1987. С. 217—226. 3. *Ланда П. С., Стратоно-*

вич Р. Л. Расчет стационарного распределения вероятностей для одного из простейших странных аттракторов // Докл. АН СССР. 1982. Т. 267, № 4. С. 832—836. 4. *Ораевский А. Н.* Мазеры, лазеры и странные аттракторы // Квантовая электроника. 1981. Т. 8, № 1. С. 130—142. 5. *Белогорцев А. Б.;* *Ваврив Д. М.*, *Третьяков О. А.* Стохастические колебания в квазилинейных колебательных системах // Журн. техн. физики. 1988. Т. 58, № 2. С. 284—293.

Поступила в редколлегию 30.05.88