

К ВОПРОСУ О ГРАНИЦАХ ЗОН ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИССИПАТИВНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

При исследовании и проектировании нелинейных параметрических систем большое значение имеет наличие информации о зонах параметрической неустойчивости, внутри которых работа внешних сил, расходуемая на периодическое изменение параметра, создает увеличение запаса колебательной энергии системы [1]. Границам зон соответствуют периодические решения дифференциального уравнения, описывающего колебательную систему.

Рассмотрим параметрическую систему, описываемую нелинейным диссипативным дифференциальным уравнением с периодическими коэффициентами

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + 2\delta \frac{dy}{d\tau} + (Q^2 - \varepsilon \cos \tau) y = k \varepsilon y^3, \quad (1)$$

где $\tau = \omega_n t$ — безразмерное время; ω_n — частота накачки; 2δ — затухание системы; ε — малый параметр; k — коэффициент, характеризующий степень нелинейности системы; $Q = \frac{\omega}{2\omega_n}$ — регулируемая величина, пропорциональная собственной частоте ω . Частота изменения параметра (например, нелинейной индуктивности или емкости) предполагается постоянной. Переменная y может обозначать, в частности, напряжение на обмотках резонансного контура нелинейной системы.

Зоны неустойчивости нелинейной параметрической системы без затухания в координатах (Q, ε) исследованы в работе [2]. Выясним, как влияет совместное введение нелинейности и затухания в линейное дифференциальное уравнение с периодическими коэффициентами (уравнение Матье) на положение зон параметрической неустойчивости.

Будем искать решение уравнения (1) в виде [3]

$$y = a \cos(Q\tau - \varphi) + \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2 + \varepsilon^3 U_3 + \dots + \varepsilon^n U_n, \quad (2)$$

где $a = a(\tau)$, $\varphi = \varphi(\tau)$ — по предположению, медленно меняющиеся функции τ .

Подставив (2) в (1), получим

$$\begin{aligned} & \left[2Qa \frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{d^2 a}{d\tau^2} - a \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 + 2\delta \frac{da}{d\tau} \right] \cos(Q\tau - \varphi) + \\ & + \left[-2Q \frac{da}{d\tau} + 2 \frac{da}{d\tau} \frac{d\varphi}{d\tau} + a \frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} - 2Q\delta a + 2\delta a \frac{d\varphi}{d\tau} \right] \sin(Q\tau - \varphi) + \\ & + \varepsilon \left(\frac{d^2 U_1}{d\tau^2} + 2\delta \frac{dU_1}{d\tau} + Q^2 U_1 \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{d^2 U_2}{d\tau^2} + 2\delta \frac{dU_2}{d\tau} + Q^2 U_2 \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \dots + \varepsilon^n \left(\frac{d^2 U_n}{d\tau^2} + 2\delta \frac{dU_n}{d\tau} + Q^2 U_n \right) = \frac{\varepsilon a}{2} \cos[(Q+1)\tau - \varphi] + \\
& + \frac{\varepsilon a}{2} \cos[(Q-1)\tau - \varphi] + \varepsilon \frac{3}{4} ka^3 \cos(Q\tau - \varphi) + \\
& + \varepsilon \frac{1}{4} ka^3 \cos[3(Q\tau - \varphi)] + \varepsilon^2 \frac{3}{2} ka^2 U_1 + \varepsilon^2 \frac{3}{2} ka^2 U_1 \cos[2(Q\tau - \varphi)] + \\
& + \varepsilon^2 U_1 \cos \tau + \varepsilon^3 U_1 \cos \tau + \varepsilon^3 \frac{3}{2} ka^2 U_2 + \varepsilon^3 3ka U_1^2 \cos(Q\tau - \varphi) + \\
& + \varepsilon^3 \frac{3}{2} ka^2 U_2 \cos[2(Q\tau - \tau)] + \varepsilon^3 U_2 \cos \tau + \dots + \varepsilon^{n+1} U_n \cos \tau. \quad (3)
\end{aligned}$$

Рассмотрим зоны параметрической неустойчивости уравнения (1) вблизи резонанса $Q = 1/2$. Чтобы избавиться от секулярного члена $\frac{\varepsilon a}{2} \cos[(Q-1)\tau - \varphi]$, приводящего к неограниченно возрастающим решениям, преобразуем $\cos[(Q-1)\tau - \varphi]$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
\cos[(Q-1)\tau - \varphi] &= \cos[(1-2Q)\tau + 2\varphi] \cos(Q\tau - \varphi) - \\
&- \sin[(1-2Q)\tau + 2\varphi] \sin(Q\tau - \varphi).
\end{aligned}$$

Из (3) получаем систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$2Qa \frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{d^2 a}{d\tau^2} - a \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 + 2\delta \frac{da}{d\tau} = \varepsilon \frac{3}{4} ka^3 + \frac{\varepsilon a}{2} \cos[(1-2Q)\tau + 2\varphi]; \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
-2Q \frac{da}{d\tau} + 2 \frac{da}{d\tau} \frac{d\varphi}{d\tau} + a \frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} - 2Q\delta a + 2\delta \frac{da}{d\tau} = \\
= -\frac{\varepsilon a}{2} \sin[(1-2Q)\tau + 2\varphi]; \quad (5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 U_1}{d\tau^2} + 2\delta \frac{dU_1}{d\tau} + Q^2 U_1 &= \frac{a}{2} \cos[(Q+1)\tau - \varphi] + \\
&+ \frac{1}{4} ka^3 \cos[3(Q\tau - \varphi)]. \quad (6)
\end{aligned}$$

Из уравнения (6) находим

$$\begin{aligned}
U_1 &= a\gamma \{2Q+1\} \cos[(Q+1)\tau - \varphi] - 2\delta(Q+1) \sin[(Q+1)\tau - \varphi] + \\
&+ ka^3 \gamma_1 \{4Q \cos[3(Q\tau - \varphi)] - 3\delta \sin[3(Q\tau - \tau)]\}. \quad (7)
\end{aligned}$$

Здесь

$$\gamma = -[2(2Q+1)^2 + 8\delta^2(Q+1)^2]^{-1}; \quad \gamma_1 = -[8Q(16Q^2 + 9\delta^2)]^{-1}.$$

Обозначив $\Psi_1 = (1-2Q)\tau + 2\varphi$, из (4), (5) определяем $d\varphi/d\tau$, $da/d\tau$ в первом приближении, где удерживаются выражения ε , $\varepsilon\delta$, δ^2 и отбрасываются члены, содержащие $\varepsilon\delta^2$, $\varepsilon\delta^3$, δ^3 , δ^4 и т. д. Таким образом, окончательно имеем

$$\frac{d\Psi_1}{d\tau} = 1 - 2Q + \frac{\varepsilon}{2Q} \cos \Psi_1 + \varepsilon \frac{3ka^2}{4Q} + \frac{\delta^2}{Q}; \quad (8)$$

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{\varepsilon a}{4Q} \sin \Psi_1 - \delta a - \varepsilon \delta \frac{3ka^3}{8Q^2}. \quad (9)$$

Приравнявая к нулю правые части уравнений (8) и (9), получаем условия стационарности колебаний. Из (9) следует, что для стационарности необходимо выполнение условий $a = 0$ (состояние покоя системы) или

$$\sin \Psi_1 = \frac{4Q\delta}{\varepsilon} \left(1 + \varepsilon \frac{3ka_0^2}{8Q^2} \right),$$

где a_0 — амплитуда стационарных колебаний на границе. Положив в уравнении (8)

$$\cos \Psi_1 = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \Psi_1} = \pm \sqrt{1 - \left[\frac{4Q\delta}{\varepsilon} \left(1 + \varepsilon \frac{3ka_0^2}{8Q^2} \right) \right]^2}$$

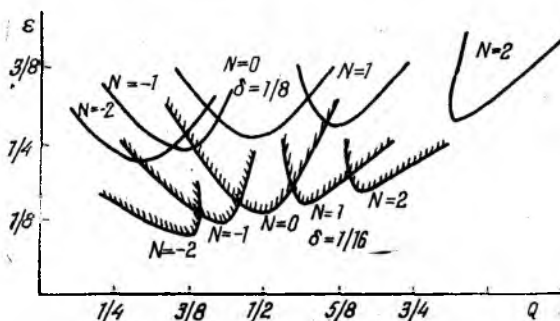


Рис. 1

(в предположении, что $a_0 \neq 0$) получаем условие, определяющее границы зон параметрической неустойчивости в первом приближении вблизи резонансной частоты $Q = 1/2$ для стационарных колебаний

$$\begin{aligned} & \left| 1 - 2Q + \varepsilon \frac{3ka_0^2}{4Q} + \frac{\delta^2}{Q} \right| = \\ & = \frac{1}{2Q} \sqrt{\varepsilon^2 - \left[4Q\delta \left(1 + \varepsilon \frac{3ka_0^2}{8Q^2} \right) \right]^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

В дальнейшем будем считать малый параметр ε неотрицательным. Поскольку рассматривается зона неустойчивости вблизи резонансной частоты $Q = 1/2$, то можем написать в выражениях при ε и δ вместо Q

числовое значение, равное $1/2$. После обозначения $N = \frac{3ka_0^2}{2}$ формула для границ зон параметрической неустойчивости переписывается в виде

$$|1 - 2Q + N\varepsilon + 2\delta^2| = \sqrt{\varepsilon^2 - 4\delta^2(1 + N\varepsilon)^2}. \quad (11)$$

Эти границы для различных значений δ и N показаны на рис. 1.

Из анализа уравнения (11) следует, что совместное введение нелинейности и затухания в линейное дифференциальное уравнение с периодическими коэффициентами (уравнение Матье) приводит к смещению зон параметрической неустойчивости по обеим координатам

в плоскости (Q, ε) и к их повороту относительно нижних точек. При этом смещение и поворот тем больше, чем больше по модулю степень нелинейности и амплитуда периодических колебаний, соответствующих границам зон неустойчивости. Для жесткой нелинейной системы ($k < 0$) смещение нижних точек границ зон неустойчивости происходит в сторону меньших частот и вниз по сравнению со случаем $k = 0$, а для мягкой ($k > 0$) — в сторону больших частот и вверх. Таким образом, жесткую нелинейную диссипативную параметрическую систему при прочих равных условиях возбудить легче, чем линейную диссипативную параметрическую, а мягкую нелинейную — труднее, чем линейную. Это означает, что для возбуждения колебаний нелинейной диссипативной параметрической системы не обязательно требуется большая глубина модуляции параметра, чем для линейной параметрической.

Рассмотрим второе приближение. Уравнения (4), (5) во втором приближении имеют вид

$$2Qa \frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{d^2 a}{d\tau^2} - a \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 + 2\delta \frac{da}{d\tau} = \frac{\varepsilon a}{2} \cos \Psi_1 + \varepsilon \frac{3}{4} ka^3 + \\ + \varepsilon^2 3Qk^2 a^5 \gamma_1 + \varepsilon^2 \frac{1}{2} a \gamma (2Q + 1) + \varepsilon^2 ka^3 \left[\frac{3}{4} \gamma (2Q + 1) + 2Q\gamma_1 \right] \cos \Psi_1, \quad (12)$$

$$-2Q \frac{da}{d\tau} + 2 \frac{da}{d\tau} \frac{d\varphi}{d\tau} + a \frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} - 2Q\delta a + 2\delta a \frac{d\varphi}{d\tau} = \\ = -\frac{\varepsilon a}{2} \sin \Psi_1 + \varepsilon^2 ka^3 \left[-\frac{3}{4} \gamma (2Q + 1) + 2Q\gamma_1 \right] \sin \Psi_1. \quad (13)$$

Для нахождения $\frac{da}{d\tau}$, $\frac{d\varphi}{d\tau}$ положим

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{\varepsilon a}{4Q} \sin \Psi_1 - \delta a + \lambda_1 \varepsilon^2; \quad (14)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \varepsilon \frac{3ka^2}{8Q} + \frac{\varepsilon}{4Q} \cos \Psi_1 + \lambda_2 \varepsilon^2, \quad (15)$$

где λ_1, λ_2 — медленно меняющиеся функции τ , производные от которых $\frac{d\lambda_1}{d\tau}, \frac{d\lambda_2}{d\tau}$ порядка малости ε . Подставив (14), (15) в (12) и (13), после громоздких преобразований находим λ_1 и λ_2 , а затем с учетом (14), (15) получаем выражения

$$\frac{d\Psi_1}{d\tau} = 1 - 2Q + \varepsilon \frac{3ka^2}{4Q} + \frac{\varepsilon}{2Q} \cos \Psi_1 - \frac{\varepsilon^2}{16Q^3} - \frac{\varepsilon(1-2Q)}{4Q^3} \cos \Psi_1 + \\ + \varepsilon^2 \frac{9k^2 a^4}{64Q^3} + \frac{\delta^2}{Q} + \varepsilon^2 3k^2 a^4 \gamma_1 + \varepsilon^2 \frac{\gamma(2Q+1)}{2Q} + \\ + \frac{\varepsilon^2 ka^2}{Q} \left[\frac{3}{4} \gamma (2Q + 1) + 2Q\gamma_1 \right] \cos \Psi_1; \quad (16)$$

$$\frac{da}{d\tau} = \frac{\varepsilon a}{4Q} \sin \Psi_1 - \delta a + \varepsilon^2 \frac{3ka^3}{32Q^3} \sin \Psi_1 - \varepsilon \delta \frac{3ka^3}{8Q^2} - \frac{\varepsilon a(1-2Q)}{16Q^2} \sin \Psi_1 - \\ - \frac{\varepsilon^2 ka^3}{2Q} \left[-\frac{3}{4} \gamma (2Q + 1) + 2Q\gamma_1 \right] \sin \Psi_1. \quad (17)$$

После преобразований из (16), (17) получаем формулу для границ зон параметрической неустойчивости вблизи $Q = \frac{1}{2}$ во втором приближении:

$$\left| 1 - 2Q + \varepsilon^2 \left(-\frac{3}{4} + \frac{5N^2}{12} \right) + 2\delta^2 + \varepsilon N \right| = \left| \varepsilon - \frac{\varepsilon^2 N}{3} \right| \sqrt{1 - \frac{4\delta^2 (1 + \varepsilon N)^2}{\left(\varepsilon + \frac{5\varepsilon^2 N}{6} \right)^2}}. \quad (18)$$

Из анализа уравнения (18) следует, что во втором приближении зоны параметрической неустойчивости деформируются по сравнению

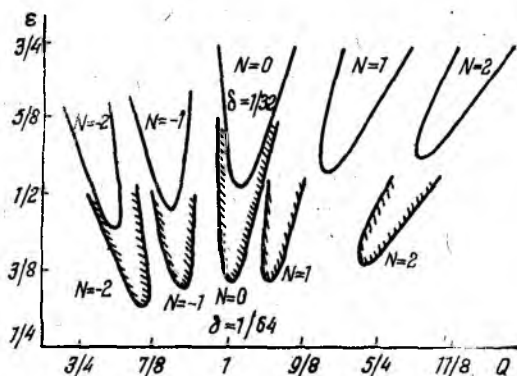


Рис. 2

с зонами в первом приближении, но при этом сохраняются ее прежние характерные особенности, что и следовало ожидать, поскольку первое приближение, как правило, приводит к тем же качественным результатам, что и высшие [4].

Перейдем ко второй зоне параметрической неустойчивости вблизи резонансной частоты $Q = 1$. Сделав громоздкие преобразования, получим окончательно

$$\frac{d\Psi_2}{d\tau} = 2(1 - Q) + \varepsilon \frac{3ka^2}{4Q} + \frac{\delta^2}{Q} + \varepsilon^2 k^2 a^4 \left(\frac{9}{64Q^3} + 3\gamma_1 \right) + \varepsilon^2 \frac{\gamma_1(2Q + 1) + \gamma_2(2Q - 1)}{2Q} + \varepsilon^2 \frac{\gamma_2(2Q - 1)}{2Q} \cos \Psi_2; \quad (19)$$

$$\frac{da}{d\tau} = -\delta a - \varepsilon \delta \frac{3ka^3}{8Q^2} + \varepsilon^2 \frac{a\gamma_2}{4Q} (2Q - 1) \sin \Psi_2, \quad (20)$$

где

$$\Psi_2 = 2(1 - Q)\tau + 2\varphi; \quad \gamma_2 = [2(2Q - 1)^2 + 8\delta^2(Q - 1)^2]^{-1}.$$

Из (19), (20) находим условие, определяющее границы зон параметрической неустойчивости вблизи $Q = 1$ во втором приближении:

$$\left| 2(1 - Q) + \frac{N}{2} \varepsilon + \delta^2 + \left(\frac{1}{6} + \frac{5N^2}{96} \right) \varepsilon^2 \right| = \frac{1}{4} \sqrt{\varepsilon^4 - \left[4\delta \left(2 + \frac{N\varepsilon}{2} \right) \right]^2}. \quad (21)$$

Из анализа уравнения (21) следует, что для второй зоны неустойчивости сохраняются характерные особенности, полученные для первой. Аналогичные выводы справедливы и для высших зон параметрической неустойчивости. На рис. 2 приведены границы вблизи $Q = 1$.

Отметим, что наличие одной только нелинейности не приводит к смещению зон параметрической неустойчивости уравнения (1) по частоте. Наличие же одного только затухания без нелинейности приводит к смещению зон по частоте тем больше, чем больше затухание. Это смещение происходит следующим образом: для первой зоны в сторону меньших частот от точки $(1/2; 0)$ в плоскости $(Q; \epsilon)$, а для второй и высших — в сторону больших частот от точек $(1; 0)$, $(3/2; 0)$ и т. д.

Список литературы: 1. *Основы теории колебаний* / В. В. Мигулин, В. И. Медведев, Е. Р. Мустель, В. Н. Парыгин. М., 1988. 392 с. 2. *Титаренко А. М., Зуев Н. Г., Чередников П. И.* О зонах возбуждения одного нелинейного дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами. Х., 1985. 21 с. Деп. в УкрНИИТИ 23.07.85, № 1502. 3. *Блакьер О.* Анализ нелинейных систем. М., 1969. 400 с. 4. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.*, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., 1963. 412 с.

Поступила в редколлегию 18.11.88

УДК 621.373

А. Б. БЕЛОГОРЦЕВ, канд. физ.-мат. наук, **Д. М. ВАВРИВ**,
д-р физ.-мат. наук, **Г. А. ГРОМОВ**

О ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ ХАОТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В НЕАВТОНОМНОМ ОСЦИЛЛЯТОРЕ ВАН-ДЕР-ПОЛЯ

Изучение вероятностных свойств стохастических колебаний, возникающих в нелинейных радиофизических системах, представляет собой важную научную и практическую задачу. Ее решение способствует дальнейшему прогрессу в понимании общих физических закономерностей возникновения сложных хаотических режимов, характерных для широкого класса динамических систем, а также позволяет вырабатывать рекомендации по созданию источников случайных колебаний с управляемыми вероятностными характеристиками. Наиболее подробно с этой точки зрения изучены статистические свойства процессов, порождаемых одномерными и двумерными дискретными отображениями [1; 2]. В ряде случаев статистический анализ проведен также для хаотических колебаний в нелинейных осцилляторах, описываемых дифференциальными уравнениями [3].

Исследованы вероятностные свойства хаотических колебаний, возникающих в осцилляторе Ван дер Поля при его двухчастотном возбуждении. Математическая модель динамики колебаний, возникающих в такой системе, представляет собой совокупность неавтоном-