третього рівня (як рівня технічної реалізації управління і проектами, і підприємством) має матричну форму – проектна організація управління діяльністю підприємства через функціональну організацію служб підприємства.

Матрична організація технічної складової АІСУПР вимагає створення такої системи засобів управління, яка могла б одночасно використовуватися в різних технологіях управління проектами і організаціями – свого роду побудови інформаційного конвейєра проектів – програмно-інформаційної системи АІСУПР.

Реалізація системного підходу до інформатизації виробничої діяльності сучасних підприємств повинна забезпечувати цілі як виробничої, так і гарантованої життєдіяльності цих підприємств через комплексну автоматизацію всіх сторін діяльності. Саме АІСУПР є такою системою, що здатна через реалізацію "двонаправленої" (матричної) інформаційної технології вирішити цю проблему.

Список літератури. 1.*Глушков В.М.* Кибернетика. Вопросы теории и практики. М.: Наука, 1986. 477 с. 2.*Глушков В.М.* Основы безбумажной информатики. М.: Наука, 1982. 552 с. 3.*Гриценко В.И., Паньшин Б.Н.* Информационная технология: вопросы развития и применения. К.: Наук. думка, 1988. 266 с. 4.*Тимченко А.А., Родионов А.А.* Основы информатики системного проектирования объектов новой техники. К.: Наук. думка,1991. 152 с. 5.*Гриценко В.И., Тимченко А.А., Тесля Ю.Н.* Подходы к информатизации объектов энергетического строительства. К., 1995. 32 с. (Препринт./ НАН Украины. Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова; 95-2). 6.*Берсуцкий Я.Г.* Информационная система управления предприятием. К.: Наук. думка, 1986. 168 с.

Надійшла до редколегії 26.07.2000

Тесля Юрій Миколайович, канд. техн. наук, доцент, професор кафедри інформатики Черкаського інженерно-технологічного інституту. Наукові інтереси: автоматизовані інформаційні системи і технології управління будівництвом складних енергетичних об'єктів; гіпотетична теорія інформаційної взаємодії. Адреса: Україна, 18006, Черкаси, вул. Чехова, 42, кв.428, тел. (0472) 43-61-60, (05136) 51-764.

Данченко Олена Борисівна, канд. техн. наук, старший викладач кафедри інформатики Черкаського інженерно-технологічного інституту. Наукові інтереси: автоматизовані інформаційні системи і технології управління будівництвом складних енергетичних об'єктів. Адреса: Україна, 18005, Черкаси, вул. Шевченка, 396/29, кв. 150, тел. (0472) 43-61-60, (0472) 43-65-86.

УДК 519.7

Ю.П. ШАБАНОВ-КУШНАРЕНКО, В.В. ШЛЯХОВ

КОМПАРАТОРНАЯ ИНДЕНТИФИКАЦИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Определяется понятие мультиалгебраической системы и исследуются необходимые и достаточные условия ее существования. Мультиалгебраические системы представляют собой эффективный инструмент компараторной идентификации обширного класса информационных объектов, имеющих структуру алгебраической системы. К такого рода объектам, в частности, относятся системы восприятия и распознавания предметов и ситуаций и системы понимания текстов.

1. Постановка задачи

Имеется много информационных объектов, идентификация которых производится в условиях, когда выходные сигналы исследуемых процессов недоступны для физического анализа. В этих случаях идентификация ведется с использованием так называемого *компаратора* или *нуль-органа* [1]. Стремление обобщить метод компараторной идентификации, а также развить поддерживающий его математический аппарат приводит к необходимости изучения алгебраических структур специального вида, названных нами мультиалгебраическими системами. Исследованию условий их существования посвящена данная работа. Экспериментальная проверка этих условий представляет собой процедуру компараторной идентификации алгебраических систем. Отправляясь от теории алгебраических систем [2], введем некоторые понятия, являющиеся основой наших дальнейших исследований.

Алгебраической системой (или просто *системой*) называется объект $U = \langle A, \Sigma_H, \Sigma_P \rangle$, состоящий из трех множеств: непустого множества A, множества операций $\Sigma_H = \{H_0, \ldots, H_\xi, \ldots\}$, определенных на множестве A, и множества предикатов $\Sigma_P = \{P_0, \ldots, P_\eta, \ldots\}$, заданных на множестве A *). Множество A называется *носителем* или *основным множеством системы* U, а его элементы – *элементами системы* U. Объединяя множества Σ_H и Σ_P и полагая $\Sigma = \Sigma_H \cup \Sigma_P$, мы сможем записать систему более кратко: $U = \langle A, \Sigma \rangle$. Алгебраическая система $U = \langle A, \Sigma \rangle$ называется *алгеброй*, если $\Sigma_P = \varnothing$ (т.е. заданы одни операции), и *моделью*, если $\Sigma_H = \varnothing$ (т.е. заданы одни отношения или предикаты).

Будем предполагать, что носитель Ω разбит на систему непересекающихся подмножеств F_Ω, т.е. на нем задан предикат эквивалентности E. На этом же носителе могут быть заданы и другие предикаты (но только предикаты, а не операции – таково ограничение: фиксировать операции не разрешается) S_0, K, S_γ, K. Все это происходит на *нижнем уровне*, т.е. на элементах множества Ω. На этом уровне мы имеем пару: $\langle\Omega, \Sigma_S\rangle$, где $\Sigma_S = \{E,\ S_0, K, S_\gamma, K\}$, иными словами – модель, но такую, что на *верхнем уровне*, т.е. на элементах F_Ω мы имеем обычную алгебраическую систему, у которой все три ее компонента могут быть непустыми. Такие конструкции будем называть мультиалгебраическими системами, ниже дается их определение.

Мультиалгебраической системой называется модель, т.е. объект $\Im = \langle\Omega, \Sigma_S\rangle$, состоящий из двух множеств: непустого множества Ω и непустого множества предикатов $\Sigma_S = \{E, S_0, K, S_\gamma, K\}$, обязательным элементом которого является предикат эквивалентности E, так связанный с остальным набором предикатов множества Σ_S, что на носителе F_Ω (классах эквивалентности предиката E) множеством Σ_S индуцируются множества $\Sigma_H = \{H_0, K, H_\xi, K\}$–операции и $\Sigma_P = \{P_0, K, P_\eta, K\}$ – предикаты, такие что тройка $U = \langle F_\Omega, \Sigma_H, \Sigma_P\rangle$ представляет собой обычную алгебраическую систему.

Корректность данного определения устанавливается приведением примера объекта, ему удовлетворяющего (это мы сделаем ниже). Более того, ниже будет показано, что любая алгебраическая система может быть представлена в виде мультисистемы или модели с непустым вторым компонентом, включающим предикат эквивалентности E. Также будет установлена связь между элементами множества Σ_S, о которой идет речь в определении и которая характеризует модель как мультиалгебраическую систему. И, наконец, будет показано, что мультисистемы и их свойства важны для решения практических задач, поскольку они адекватно формализуют в общем виде типичную ситуацию, в которую попадает исследователь при математическом моделировании реальных систем компараторным способом.

2. Пример мультиалгебраической системы

Пусть $\Omega = N$ – множество натуральных чисел, F_Ω – разбиение этого множества на два класса – четных и нечетных чисел, т.е. $F_\Omega = \{ч, н\}$ (ч – множество четных чисел, н – множество нечетных натуральных чисел) и два предиката E и S, заданных на N^2 и N^3 соответственно ($N^k = \underbrace{N \times N \times K \times N}_{k}$ – прямое произведение) равенствами

$$E(n_1, n_2) = \begin{cases} 1, & \{n_1/2\} = \{n_2/2\}; \\ 0, & \{n_1/2\} \neq \{n_2/2\}; \end{cases} \tag{1}$$

$$S(n_1, n_2, n_3) = \begin{cases} 1, & \{(n_1 + n_2)/2\} = \{n_3/2\}; \\ 0, & \{(n_1 + n_2)/2\} \neq \{n_3/2\}, \end{cases} \tag{2}$$

т.е. $\Sigma_S = \{E, S\}$, а $\{n/2\}$ – дробная часть числа.

Предикаты E и S, определенные на элементах $\Omega = N$ (нижний уровень), индуцируют на множестве $\Omega = N$ разбиение на два класса $F_\Omega = \{ч, н\}$ (предикат E), а на множестве F_Ω (верхний уровень) индуцируется операция (бинарная) H за счет предиката S следующим образом: два элемента $A_1, A_2 \in F_\Omega$ соответствуют третьему $A_3 \in F_\Omega$ тогда и только тогда, когда найдутся представители этих классов $n_i \in A_i$, $i = \overline{1,3}$, для которых $S(n_1, n_2, n_3) = 1$. Непосредственная проверка (предикаты E и S заданы в явном виде равенствами (1) и (2)) позволяет убедиться, что классов разбиения – два. Операция H, исходя из правила, сформулированного выше, и вида S, представляет собой обычное сложение по модулю два, задаваемое в виде таблицы, а алгебраическая структура (или алгебра) $U = \langle F_\Omega, H\rangle$ – обычная конечная абелева группа второго порядка.

H :	ч	н
ч	ч	н
н	н	ч

Таким образом, из примера вытекает, что модель $\Im = \langle N, \{E, S\}\rangle$, где E, S заданы равенствами (1), (2), индуцирует алгебру $U = \langle F_\Omega, H\rangle$ – абелева группа второго порядка. Поэтому в соответствии с нашим определением $\Im$ – мультиалгебраическая система или в нашей терминологии конечная абелева мультигруппа второго порядка. Ясно, что если рассматривать деление не на 2, а скажем на k, т. е. в равенствах (1), (2) заменить число 2, стоящее под знаком дробной части, на число k, то мы получим пример конечной абелевой мультигруппы k-го порядка. Приведенные примеры свидетельствуют о том, что мультиалгебраические системы в виде моделей существуют (и не одна), следовательно, данное нами определение мультиалгебраической системы корректно.

3. Мультиотношения и мультиотображения

Рассмотрим систему $\{\Omega_i\}_{i=1}^{n+1}$ – непустых множеств произвольной природы, для каждого элемента которой зафиксирована система непересекающихся подмножеств $F_{\Omega_i}, i = \overline{1, n+1}$. Обозначим $\Omega_i = \{x_1^i, K, x_\eta^i, K\}$;

$$F_{\Omega_i} = \{A_{1i}, K, A_{\alpha i}, \ldots\},\ A_{\alpha_1 i}\ I\ A_{\alpha_2 i} = \varnothing, \tag{*}$$

для любых α_1, α_2 и $i = \overline{1, n+1}$;

$$\bigcup_{\alpha} A_{\alpha i} = \tilde{\Omega}_i \subset \Omega_i, \forall i = \overline{1, n+1};$$

$$A_{\alpha i} = \left\{x^i_{1\alpha}, \ldots, x^i_{\beta\alpha}, \ldots\right\}, i = \overline{1, n+1}.$$

Затем для каждого $i = \overline{1, n+1}$ зададим предикат P_i, заданный на $\Omega_i \times \Omega_i = \Omega_i^2$ (в дальнейшем под A^n – n-й степенью множества мы будем понимать прямое произведение соответствующей степени, а область определения будет обозначать символ dom), т.е. $\mathrm{dom}\, P_i = \Omega_i^2$ и определяющийся

$$P_i\left(x^i_1, x^i_2\right) = 1 \leftrightarrow \exists \alpha : x^i_1, x^i_2 \in A_{\alpha i}. \tag{3}$$

Ограничение предиката P_i на $\tilde{\Omega}_i^2$ будем обозначать $P_i\big|_{\tilde{\Omega}_i^2}$. Тогда на $\tilde{\Omega}_i^2$ индуцируется предикат E_i, удовлетворяющий соотношениям

$$\mathrm{dom}\, E_i = \tilde{\Omega}_i^2,\ E_i = P_i\big|_{\tilde{\Omega}_i^2},\ i = \overline{1, n+1}. \tag{4}$$

Здесь E_i – предикат эквивалентности со смежными классами $F_{\Omega_i} = \{A_{1i}, \ldots, A_{\alpha i}, \ldots\}$.

Предположим, что на $F_{\Omega_1} \times \ldots \times F_{\Omega_{n+1}}$ задано некое отношение в виде предиката G, т.е. $\mathrm{dom}\, G = \prod_{i=1}^{n+1} F_{\Omega_i}$, а на $\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_{n+1}$ задано отношение в виде предиката S_G, для которого выполняется $\mathrm{dom}\, S_G = \prod_{i=1}^{n+1} \Omega_i$, $S_G\big|_{\prod_{i=1}^{n+1} \Omega_i \setminus \prod_{i=1}^{n+1} \tilde{\Omega}_i} \equiv 0$, (A\B – симметрическая разность множеств), а предикат $S \equiv S_G\big|_{\prod_{i=1}^{n+1} \tilde{\Omega}_i}$ связан с предикатом G условием:

$$\left.\begin{array}{l}
\mathrm{dom}\, S = \prod_{i=1}^{n+1} \tilde{\Omega}_i, \\
\text{если } S\left(x^1_{\eta_1}, \ldots, x^{n+1}_{\eta_{n+1}}\right) = 1,\ x^i_{\eta_i} \in \tilde{\Omega}_i,\ i = \overline{1, n+1}, \\
\text{то } G\left(A_{\alpha_1 1}, \ldots, A_{\alpha_{n+1}(n+1)}\right) = 1, \text{где} \\
x^1_{\eta_i} \in A_{\alpha_i i},\ i = \overline{1, n+1}, \text{и наоборот,} \\
\text{если } G\left(A_{\alpha_1 1}, \ldots, A_{\alpha_{n+1}(n+1)}\right) = 1, \text{ то для} \\
x^i_{\beta_i \alpha_i} \in A_{\alpha_i i},\ i = \overline{1, n+1} \text{ имеет место} \\
S\left(x^1_{\beta_1 \alpha_1}, \ldots, x^{n+1}_{\beta_{n+1} \alpha_{n+1}}\right) = 1.
\end{array}\right\} \tag{5}$$

Допустим также, что задано отображение $H : \prod_{i=1}^{n} F_{\Omega_i} \to F_{\Omega_{n+1}}$, т.е. $\mathrm{dom}\, H = \prod_{i=1}^{n} F_{\Omega_i}$, а $\mathrm{Im}\, H \subset F_{\Omega_{n+1}}$ ($\mathrm{Im}\, H$ – образ отображения), а на $\prod_{i=1}^{n+1} \Omega_i$ предикат S_H, для которого имеет место

$$\mathrm{dom}\, S_H = \prod_{i=1}^{n+1} \Omega_i,\ S_H\big|_{\prod_{i=1}^{n+1} \Omega_i \setminus \prod_{i=1}^{n+1} \tilde{\Omega}_i} \equiv 0.$$

При этом предикат $Q \equiv S_H\big|_{\prod_{i=1}^{n+1} \tilde{\Omega}_i}$ связан с отображением H условиями:

$$\left.\begin{array}{l}
\mathrm{dom}\, Q = \prod_{i=1}^{n+1} \tilde{\Omega}_i, \\
\text{если } Q\left(x^1_{\eta_1}, \ldots, x^{n+1}_{\eta_{n+1}}\right) = 1,\ x^i_{\eta_i} \in \tilde{\Omega}_i,\ i = \overline{1, n+1}, \\
\text{то } H\left(A_{\alpha_1 1}, \ldots, A_{\alpha_{n+1}(n+1)}\right) = 1, \text{где} \\
x^1_{\eta_i} \in A_{\alpha_i i},\ i = \overline{1, n+1}, \text{и наоборот,} \\
\text{если } H\left(A_{\alpha_1 1}, \ldots, A_{\alpha_{n+1}(n+1)}\right) = 1, \text{ то для} \\
x^i_{\beta_i \alpha_i} \in A_{\alpha_i i},\ i = \overline{1, n+1} \text{ имеет место} \\
Q\left(x^1_{\beta_1 \alpha_1}, \ldots, x^{n+1}_{\beta_{n+1} \alpha_{n+1}}\right) = 1.
\end{array}\right\} \tag{6}$$

В дальнейшем будем говорить, что предикат S *конгруэнтно связан* с предикатом (отношением) G, если он удовлетворяет условиям (5). Аналогично, предикат Q конгруэнтно связан с отображением H, если он удовлетворяет условиям (6). В целом, конструкции, описанные выше, когда отношения и отображения фактически заданы на классах множеств, будем называть ***мультиотношением и мультиотображением***, соответственно. Будем их обозначать G_m и H_m и говорить, что они заданы на исходном наборе $\{\Omega_i\}_{i=1}^{n+1}$, понимая, что $\mathrm{dom}\, G = \prod_{i=1}^{n+1} F_{\Omega_i}$, $\mathrm{dom}\, H = \prod_{i=1}^{n} F_{\Omega_i}$, $\mathrm{Im}\, H \subset \subset F_{\Omega_{n+1}}$.

4. Условия существования мультиотношений

Лемма 1 (об условиях существования мультиотношения, координатная формулировка). n*-арное мультиотношение* G_m *может быть задано на исходном наборе непустых множеств произвольной природы* $\{\Omega_i\}_{i=1}^{n}$ *в том и только том случае, когда найдется конечный набор двухместных предикатов* $\{P_i\}_{i=1}^{n}$ *и предикат* S, *удовлетворяющие свойствам:*

$$
\left.
\begin{array}{l}
1)\ \mathrm{dom}\, P_i = \Omega_i^2,\ i = \overline{1,n};\\
2)\ \exists \{\widetilde{\Omega}_i\}_{i=1}^n : \widetilde{\Omega}_i \subset \Omega_i,\ E_i \equiv P_i\big|_{\widetilde{\Omega}_i^2} : \mathrm{dom}\, E_i = \widetilde{\Omega}_i^2\\
\mathrm{dom}\, E_i = \widetilde{\Omega}_i^2 \text{ и } E_i - \textit{предикат эквива}-\\
\textit{лентности на } \widetilde{\Omega}_i^2;\ i = \overline{1,n};\\
3)\ \mathrm{dom}\, S = \prod_{i=1}^n \widetilde{\Omega}_i;\\
4)\ i = \overline{1,n} \text{ и } x^i_{\eta_i}, x^i_{\eta'_i} \in \widetilde{\Omega}_i \textit{ из равенств}\\
P_i\left(x^i_{\eta_i}, x^i_{\eta'_i}\right) = 1 \textit{ и } S\left(x^i_{\eta_1}, \ldots, x^i_{\eta_i}, \ldots, x^i_{\eta_n}\right) = 1\\
\textit{следует} \quad S\left(x^i_{\eta_1}, \ldots, x^i_{\eta'_i}, \ldots, x^i_{\eta_n}\right) = 1.
\end{array}
\right] \qquad \text{A}
$$

При этом предикат S конгруэнтно связан с предикатом G.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть на наборе $\{\Omega_i\}_{i=1}^n$ задано мультиотношение G_m. Тогда существует набор подмножеств $\{F_{\Omega_i}\}_{i=1}^n$, удовлетворяющих условиям (*). При этом видно, что при фиксированном $i = \overline{1,n}$ множество $\widetilde{\Omega}_i = \bigcup\limits_{\alpha} A_{\alpha i}$ разбивается на систему непересекающихся множеств. Поэтому, если ввести предикат P_i, удовлетворяющий (3), то его ограничение на $\widetilde{\Omega}_i^2$ будет эквивалентностью (он равен 1, когда элементы принадлежат одному классу), что автоматически влечет за собой выполнение свойств 1), 2). С другой стороны, может быть введен предикат S, конгруэнтно связанный с предикатом G, для которого будет иметь место свойство 3), а главное, если для какого-то $i = \overline{1,n}$ и двух элементов $x^i_{\eta_i}, x^i_{\eta'_i} \in \Omega_i$ выполняются равенства $P_i\left(x^i_{\eta'_i}, x^i_{\eta'_i}\right) = 1$ и $S\left(x^i_{\eta_1}, \ldots, x^i_{\eta_i}, \ldots, x^i_{\eta_n}\right) = 1$, то найдется класс $A_{\alpha i}$, для которого $x^i_{\eta_i}, x^i_{\eta'_i} \in A_{\alpha i}$, а значит из (5) ($S$ конгруэнтно связан с G) имеет место $G(A_{\alpha_1 1}, \ldots, A_{\alpha_n n}) = 1$, т.е. выполняется свойство 4). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть на исходном наборе $\{\Omega_i\}_{i=1}^n$ задана система предикатов $\{P_i\}_{i=1}^n$ и предикат S, удовлетворяющие условиям 1) – 4). Тогда при любом $i = \overline{1,n}$ свойство 2) дает возможность ввести набор подмножеств $\widetilde{\Omega}_i \subset \Omega_i$ и рассмотреть разбиение F_{Ω_i} на классы эквивалентности $A_{1i}, \ldots, A_{\alpha i}, \ldots$ за счет предиката эквивалентности $E_i \equiv P_i\big|_{\widetilde{\Omega}_i^2}$. На прямом произведении $\prod_{i=1}^n F_{\Omega_i}$ мы можем ввести предикат G, используя первую часть равенства (5), т.е. если для каких-то $x^i_{\eta_i} \in \widetilde{\Omega}_i$, $i = \overline{1,n}$ $S\left(x^i_{\eta_1}, \ldots, x^i_{\eta_n}\right) = 1$, то $G(A_{\alpha_1 1}, \ldots, A_{\alpha_n n}) = 1$, где $x^i_{\eta_i} \in A_{\alpha_i i}$. Это возможно, поскольку $F_{\Omega_i} = (A_{11}, \ldots, A_{\alpha i}, \ldots)$ – разбиение множества $\widetilde{\Omega}_i$, т.е. $\bigcup\limits_{\alpha} A_{\alpha i} = \widetilde{\Omega}_i$. Остается показать корректность введенного таким образом предиката или отношения на $\prod_{i=1}^n F_{\Omega_i}$. Корректность подразумевает выполнение, фактически, одного условия: зафиксируем произвольный элемент $\prod_{i=1}^n F_{\Omega_i}$, т.е. набор $A_{\alpha_1 1}, \ldots, A_{\alpha_n n}$, $A_{\alpha_i i} \in F_{\Omega_i}$ или $A_{\alpha_i i} \in \widetilde{\Omega}_i$, $i = \overline{1,n}$, тогда для любого набора представителей этих классов значение предиката S одно и то же. Действительно, допустим противное. Это будет означать, что найдутся два набора представителей классов $A_{\alpha_1 1}, \ldots, A_{\alpha_n n}$ такие, что

$$
x^i_{\eta_i}, x^i_{\eta'_i} \in A_{\alpha i},\ i = \overline{1,n},
$$

$$
S\left(x^1_{\eta_1}, \ldots, x^n_{\eta_n}\right) = 1,\ S\left(x^1_{\eta'_1}, \ldots, x^n_{\eta'_n}\right) = 0. \tag{7}
$$

Но тогда из свойства 2) будет вытекать

$$
P_i\left(x^i_{\eta_i}, x^i_{\eta'_i}\right) = 1,\ i = \overline{1,n},
$$

а затем последовательное применение свойства 4) (n-раз) будет давать с учетом (7) цепочку равенств

$$
S\left(x^1_{\eta_1}, \ldots, x^n_{\eta_n}\right) = 1 \xrightarrow{4)} S\left(x^1_{\eta'_1}, x^2_{\eta_2}, \ldots, x^n_{\eta_n}\right) = 1 \xrightarrow{4)}
$$

$$
\xrightarrow{4)} S\left(x^1_{\eta'_1}, x^2_{\eta'_2}, x^3_{\eta_3}, \ldots, x^n_{\eta_n}\right) = 1 \xrightarrow{4)} \ldots \xrightarrow{4)}
$$

$$
\xrightarrow{4)} S\left(x^1_{\eta'_1}, \ldots, x^i_{\eta'_i}, x^{i+1}_{\eta_{i+1}}, \ldots, x^n_{\eta_n}\right) = 1 \xrightarrow{4)} \ldots \xrightarrow{4)}
$$

$$
\xrightarrow{4)} S\left(x^1_{\eta'_1}, \ldots, x^i_{\eta'_i}, \ldots, x^n_{\eta'_n}\right) = 1.
$$

Таким образом, мы приходим к противоречию. Значит, предикат G введен корректно, он определяет на наборе $\{\Omega_i\}_{i=1}^n$ мультиотношение G_m и, как нетрудно заметить, из доказанной корректности вытекает вторая часть условий (5), т.е. предикат S конгруэнтно связан с предикатом G. Лемма 1 доказана.

Обозначим

$$\overline{x}_{\overline{\eta}} = \left(x^1_{\eta_1}, \ldots, x^n_{\eta_n}\right) \in \prod_{i=1}^n \Omega_i = \Omega,$$

$$\overline{A}_{\overline{\alpha}} = (A_{\alpha_1 1}, \ldots, A_{\alpha_n n}) \in \prod_{i=1}^n F_{\Omega_i} = F_\Omega,$$

$$S\left(x^1_{\eta_1}, \ldots, x^n_{\eta_n}\right) = S\left(\vec{x}_{\overline{\eta}}\right) \text{ и } (A_{\alpha_1 1}, \ldots, A_{\alpha_n n}) = G\left(\overline{A}_{\overline{\alpha}}\right).$$

Введем предикат P на $\left[\prod_{i=1}^n \Omega_i\right]^2$ следующим образом:

$$P\left(\overline{x}_{\eta'}, \overline{x}_{\overline{\eta}'}\right) = 1 \leftrightarrow P_i\left(x^i_{\eta_i}, x^i_{\eta'_i}\right) = 1,\ i = \overline{1,n},$$

где $\overline{x}_{\overline{\eta}} = \left(x^1_{\eta_1}, \ldots, x^n_{\eta_n}\right)$, $\overline{x}_{\overline{\eta}'} = \left(x^1_{\eta'_1}, \ldots, x^n_{\eta'_n}\right)$.

Рассмотрим предикат $E \equiv P \left| \left[\prod_{i=1}^n \widetilde{\Omega}_i\right]^2\right.$, т.е.

$$E\left(\overline{x}_{\eta'}, \overline{x}_{\overline{\eta}'}\right) = 1 \leftrightarrow E_i\left(x^i_{\eta_i}, x^i_{\eta'_i}\right) = 1,\ i = \overline{1,n}.$$

Ясно, что предикат E задает отношения эквивалентности на $\left[\prod_{i=1}^n \widetilde{\Omega}_i\right]^2$. С учетом введенных обозначений мы можем переформулировать свойства 1) – 4), причем свойства 1) – 3) вытекают автоматически, а свойство 4) в новой формулировке мы доказали в процессе доказательства леммы.

Следствие 1. *Свойства 1) – 4) леммы 1 могут быть эквивалентным образом переформулированы в следующем виде*:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \operatorname{dom} P = \Omega^2, \Omega = \prod_{i=1}^n \Omega_i; \\ 2)\ \exists \widetilde{\Omega} = \prod_{i=1}^n \widetilde{\Omega}_i \subset \Omega : E \equiv P\left|\widetilde{\Omega}_i^2\right. : E - \\ \textit{эквивалентность на } \widetilde{\Omega}_i^2; \\ 3)\ \operatorname{dom} S = \widetilde{\Omega}; \\ 4)\ \overline{x}_{\overline{\eta}}, \overline{x}_{\overline{\eta}'} \in \widetilde{\Omega} \textit{ из равенств} \\ P\left(\overline{x}_{\overline{\eta}}, \overline{x}_{\overline{\eta}'}\right) = 1 \textit{ и } S\left(\overline{x}_{\overline{\eta}}\right) = 1 \textit{ следует } S\left(\overline{x}_{\overline{\eta}'}\right) = 1. \end{array}\right] \quad \text{B}$$

Заметим, что условия, при которых предикат S конгруэнтно связан с предикатом G, могут быть тоже эквивалентно переформулированы в виде:

$$\left.\begin{array}{l} \text{если } S\left(\overline{x}_{\overline{\eta}}\right) = 1 \text{ и } \overline{x}_{\overline{\eta}} \in \overline{A}_{\overline{\alpha}}, \text{ то } G\left(\overline{A}_{\overline{\alpha}}\right) = 1, \text{и нао} - \\ \text{борот, если } G\left(\overline{A}_{\overline{\alpha}}\right) = 1, \text{ то } S\left(\overline{x}_{\overline{\eta}}\right) = 1 \text{ для } \overline{x}_{\overline{\eta}} \in \overline{A}_{\overline{\alpha}} \\ \left(\overline{x}_{\overline{\eta}} \in \overline{A}_{\overline{\alpha}} - \text{означает, что } x^i_{\eta_i} \in A_{\alpha_i i},\ i = \overline{1,n}\right) \end{array}\right\} \quad (8)$$

или еще более компактно:

$$\overline{x}_{\overline{\eta}} \in \Omega \text{ и } \overline{A}_{\overline{\alpha}} \in F_\Omega : \left[S\left(\overline{x}_{\overline{\eta}}\right) = 1 \leftrightarrow G\left(\overline{A}_{\overline{\alpha}}\right) = 1\right] \leftrightarrow \overline{x}_{\overline{\eta}} \in \overline{A}_{\overline{\alpha}}. \quad (9)$$

Последнее выражение (9) может служить определением понятия: предикат S конгруэнтно связан с предикатом G. Далее, если определить мультиотношение G_m как тройку, т.е. $G_m = \langle \Omega, F_\Omega, G \rangle$, то мы можем окончательно сформулировать теорему об условиях существования мультиотношения G_m.

Теорема 1 (об условии существования G_m). *На исходном наборе непустых множеств $\{\Omega_i\}_{i=1}^n$ может быть задано мультиотношение $G_m = \langle \Omega, F_\Omega, G \rangle$ тогда и только тогда, когда найдутся предикаты P и S, удовлетворяющие свойствам набора* B (см. следствие 1). *При этом S и G – конгруэнтно связаны, т.е. удовлетворяют условию* (9).

Лемму 1 будем называть *координатной формулировкой* условий существования мультиотношения G_m.

5. Условия существования мультиотображений

Перейдем теперь к мультиотображениям. По аналогии с G_m начнем с координатной формулировки. Итак, пусть задан исходный набор непустых множеств $\{\Omega_i\}_{i=1}^{n+1}$ и набор из систем его непересекающихся подмножеств $\{F_{\Omega_i}\}_{i=1}^{n+1}$. Как и ранее будем считать $\Omega = \prod_{i=1}^{n+1} \Omega_i$, $F_{\Omega^0} = \prod_{i=1}^n \Omega_i$, $F_\Omega = \prod_{i=1}^{n+1} \Omega_i$ Под мультиотображением H_m будем понимать тройку $H_m = \langle \Omega, F_\Omega, H \rangle$, где $H : F_{\Omega^0} \to F_{\Omega_{n+1}}$ – отображение.

Лемма 2 (об условии существования H_m, координатная формулировка). *На исходном наборе непустых множеств $\{\Omega_i\}_{i=1}^{n+1}$ может быть задано мультиотображение $H_m = \langle \Omega, F_\Omega, H \rangle$ тогда и только тогда,* *когда найдется конечный набор двуместных предикатов* $\{P_i\}_{i=1}^{n+1}$ *и предикат* Q, *удовлетворяющие свойствам*:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \mathrm{dom}\, P_i = \Omega_i^2,\ i=\overline{1,n+1}; \\ 2)\ \exists \{\widetilde{\Omega}_i\}_{i=1}^{n} : \widetilde{\Omega}_i \subset \Omega_i,\ E_i \equiv P_i\big|_{\widetilde{\Omega}_i^2} - \\ \textit{предикат эквивалентности на } \widetilde{\Omega}_i^2;\ i=\overline{1,n+1}; \\ 3)\ \mathrm{dom}\, Q = \prod_{i=1}^{n+1} \widetilde{\Omega}_i = \widetilde{\Omega}; \\ 4)\ \{x_{\eta_i}^i\}_{i=1}^{n},\ x_{\eta_i}^i \in \widetilde{\Omega}_i\ i=\overline{1,n} : \exists x_{\eta_{n+1}}^{n+1} \in \widetilde{\Omega}_{n+1} : \\ Q\left(x_{\eta_1}^i, K, x_{\eta_{n+1}}^{n+1}\right)=1; \\ 5)\ i=\overline{1,n+1} \text{ и } x_{\eta_i}^i, x_{\eta'_i}^i \in \widetilde{\Omega}_i : \textit{из равенств} \\ P_i\left(x_{\eta_i}^i, x_{\eta'_i}^i\right)=1\ \textit{и}\ Q\left(x_{\eta_1}^1, K, x_{\eta_i}^i, K, x_{\eta_{n+1}}^{n+1}\right)=1 \\ \textit{следует}\ Q\left(x_{\eta_1}^1, K, x_{\eta'_i}^i, \ldots, x_{\eta_{n+1}}^{n+1}\right)=1; \\ 6)\ x_{\eta_{n+1}}^{n+1}, x_{\eta'_{n+1}}^{n+1} \in \widetilde{\Omega}_{n+1},\ Q\left(x_{\eta_1}^1, K, x_{\eta_{n+1}}^{n+1}\right)=1, \\ Q\left(x_{\eta_1}^i, K, x_{\eta'_{n+1}}^{n+1}\right)=1\ \textit{следует}\ P_{n+1}\left(x_{\eta_{n+1}}^{n+1}, x_{\eta'_{n+1}}^{n+1}\right)=1. \end{array}\right] \quad C$$

При этом предикат Q конгруэнтно связан с отображением H (условие (6)).

Доказательство. *Необходимость*. Если задано $H_m = \langle \Omega, F_\Omega, H \rangle$, то условия (3) позволяют вести набор предикатов $\{P_i\}_{i=1}^{n+1}$, а условие (6) – предикат Q, конгруэнтно связанный с отображением H. При этом непосредственная проверка позволяет убедиться в справедливости свойств 1) – 3). Остановимся на свойствах 4), 5). Зафиксируем произвольный набор элементов $\{x_{\eta_i}^i\}_{i=1}^{n}$, $x_{\eta_i}^i \in \widetilde{\Omega}_i$ $i=\overline{1,n}$. Тогда из равенства $\widetilde{\Omega}_i = \bigcup\limits_{\alpha} A_{\alpha i}$ вытекает, что найдется набор $\{A_{\alpha_i i}\}_{i=1}^{n}$, $A_{\alpha_i i} \in F_\Omega$, $i=\overline{1,n}$, для которого $x_{\eta_i}^i \in A_{\alpha_i i}$. С другой стороны, $H : \prod_{i=1}^{n} F_{\Omega_i} \to F_{\Omega_{n+1}}$ – отображение, значит, $\exists A_{\alpha_{n+1}(n+1)} \in F_{\Omega_i} : H(A_{\alpha_1 1}, K, A_{\alpha_n n}) = A_{\alpha_{n+1}(n+1)}$. Но тогда, если произвольно зафиксировать представитель $x_{\eta_{n+1}}^{n+1} \in A_{\alpha_{n+1}(n+1)}$, то из (6) получим $Q\left(x_{\eta_1}^1, K, x_{\eta_{n+1}}^{n+1}\right)=1$, что означает выполнение свойства 4).

Далее, допустим, что для некоторого произвольного номера $i=\overline{1,n+1}$ и двух элементов $x_{\eta_i}^i, x_{\eta'_i}^i \in \Omega_i$ имеют место равенства

$$P_i\left(x_{\eta_i}^i, x_{\eta'_i}^i\right)=1 \text{ и } Q\left(x_{\eta_1}^1, K, x_{\eta_i}^i, K, x_{\eta_{n+1}}^{n+1}\right)=1.$$

Тогда из первого равенства (с учетом (3)) следует, что найдется класс $A_{\alpha_i i}$, для которого $x_{\eta_i}^i, x_{\eta'_i}^i \in A_{\alpha_i i}$, из второго равенства (с учетом (6)) будет вытекать

$$H(A_{\alpha_1 1}, K, A_{\alpha_i i}, K, A_{\alpha_n n}) = A_{\alpha_{n+1}(n+1)},$$

где $x_{\eta_1}^1 \in A_{\alpha_1}; K; x_{\eta_i}^i, x_{\eta'_i}^i \in A_{\alpha_i i}; K; x_{\eta_{n+1}}^{n+1} \in A_{\alpha_{n+1}(n+1)}$
и $Q\left(x_{\eta_1}^1, K, x_{\eta'_i}^i, K, x_{\eta_{n+1}}^{n+1}\right)=1$, т.е. выполняется свойство 5.

Теперь пусть для каких-то $x_{\eta_{n+1}}^{n+1}, x_{\eta'_{n+1}}^{n+1} \in \widetilde{\Omega}_{n+1}$ имеют место равенства $Q\left(x_{\eta_1}^1, K, x_{\eta_{n+1}}^{n+1}\right)=1$ и $Q\left(x_{\eta_1}^1, K, x_{\eta_{n+1}}^{n+1}\right)=1$, тогда из (6) для классов $A_{\alpha_1 i}$, $A_{\alpha_2 i}, K, A_{\alpha_{n+1}(n+1)}, A_{\alpha'_{n+1}(n+1)}$, которым соответственно принадлежат элементы $x_{\eta_1}^1, K, x_{\eta_{n+1}}^{n+1}, x_{\eta'_{n+1}}^{n+1}$, будет выполняться:

$$H\left(A_{\alpha_1 1}, K, A_{\alpha_n n}\right) = A_{\alpha_{n+1}(n+1)},\ H\left(A_{\alpha_1 1}, K, A_{\alpha_n n}\right) = A_{\alpha'_{n+1}(n+1)}.$$

Но H – отображение, значит, $A_{\alpha_{n+1}(n+1)} = : A_{\alpha'_{n+1}(n+1)}$, т.е. $x_{\eta_{n+1}}^{n+1}, x_{\eta'_{n+1}}^{n+1}$ – принадлежат одному классу, следовательно, $P_{n+1}\left(x_{\eta_{n+1}}^{n+1}, x_{\eta'_{n+1}}^{n+1}\right)=1$.

Свойство 6) и вместе с ним необходимость доказана.

Достаточность. Допустим, что на исходном наборе множеств $\{\Omega_i\}_{i=1}^{n+1}$ задана система предикатов $\{P_i\}_{i=1}^{n+1}$ и предикат Q, удовлетворяющие свойствам 1) – 6). Тогда, используя свойства 2), можно найти подмножества $\widetilde{\Omega}_i \subset \Omega_i$ и разбиение этих подмножеств $F_{\Omega_i}, i=\overline{1,n+1}$, для которых можно определить отображение H на основе конгруэнтной связи (равенства (6)). Если мы покажем корректность этого определения, то тройка $H_m = \langle \Omega, F_\Omega, H \rangle$ будет мультиотображением и лемма будет доказана. По аналогии с тем, как это было при доказательстве предыдущей леммы, зафиксируем произвольный элемент $F_{\Omega^0} = \prod_{i=1}^{n} \Omega_i$, т.е. набор $A_{\alpha_1 i},\ A_{\alpha_2 i}, \ldots, A_{\alpha_n n}$, $A_{\alpha_i i} \in F_{\Omega_i}$ или $A_{\alpha_i i} \in \widetilde{\Omega}_i$, $i = \overline{1,n}$. Покажем, что найдется единственное подмножество $A_{\alpha_{n+1}(n+1)} \in F_{\Omega_{n+1}}$, для которого

$$H\left(A_{\alpha_1 1}, \ldots, A_{\alpha_n n}\right) = A_{\alpha_{n+1}(n+1)}.$$

Действительно, пусть $\left\{x^i_{\eta_i}\right\}_{i=1}^n$ – произвольный набор представителей $\left\{A_{\alpha_i i}\right\}_{i=1}^n$, т.е. $x^i_{\eta_i} \in A_{\alpha_i i} \subset \widetilde{\Omega}_i$. Тогда из 4) вытекает, что найдется $x^{n+1}_{\eta_{n+1}} \in \widetilde{\Omega}_{n+1}$, а значит и $A_{\alpha_{n+1}(n+1)} \subset \widetilde{\Omega}_i$, для которых

$$x^{n+1}_{\eta_{n+1}} \in A_{\alpha_{n+1}(n+1)} \text{ и } Q\left(x^1_{\eta_1}, \ldots, x^{n+1}_{\eta_{n+1}}\right) = 1,$$

т.е. $H\left(A_{\alpha_1 1}, \ldots, A_{\alpha_n n}\right) = A_{\alpha_{n+1}(n+1)}$. Заметим, что, используя 5), аналогично тому как это было сделано при доказательстве леммы 1, можно показать, что значение предиката Q не зависит от выбора представителей классов. Это означает, что отображение H вполне корректно определено на F_{Ω^0}, лишь бы $A_{\alpha_{n+1}(n+1)}$ был единственным. Допустим противное: для двух классов $A_{\alpha_{n+1}(n+1)}$, $A_{\alpha'_{n+1}(n+1)}$ имеет место

$$H(A_{\alpha_1 1}, \ldots, A_{\alpha_n n}) = A_{\alpha_{n+1}(n+1)},\ H(A_{\alpha_1 1}, \ldots, A_{\alpha_n n}) = A_{\alpha'_{n+1}(n+1)},$$

тогда для их представителей $x^i_{\eta_i} \in A_{\alpha_i i}, i = \overline{1,n}$, $x^{n+1}_{\eta_{n+1}} \in A_{\alpha_{n+1}(n+1)}$ и $x^{n+1}_{\eta'_{n+1}} \in A_{\alpha'_{n+1}(n+1)}$ будет выполняться

$$Q\left(x^1_{\eta_1}, \ldots, x^{n+1}_{\eta_{n+1}}\right) = 1,\ Q\left(x^1_{\eta_1}, \ldots, x^{n+1}_{\eta'_{n+1}}\right) = 1.$$

Тогда из свойства 6) выводим $P_{n+1}\left(x^{n+1}_{\eta_{n+1 i}}, x^{n+1}_{\eta'_{n+1}}\right) = 1$, что означает принадлежность одному классу элементов $x^{n+1}_{\eta_{n+1}}$ и $x^{n+1}_{\eta'_{n+1}}$ или совпадение классов $A_{\alpha_{n+1}(n+1)} = A_{\alpha'_{n+1}(n+1)}$, т.е. H является отображением, а тройка $H_m = \langle \Omega, F_\Omega, H \rangle$ – мультиотображением. Лемма 2 доказана.

Введем обозначения, аналогичные предыдущим:

$$\overline{x}_{\overline{\eta}} = \left(x^i_{\eta_1}, \ldots, x^{n+1}_{\eta_{n+1}}\right) \in \prod_{i=1}^{n+1} \Omega_i = \Omega,$$

$$\overline{x}^0_{\overline{\eta}} = \left(x^i_{\eta_1}, \ldots, x^i_{\eta_n}\right) \in \prod_{i=1}^{n} \Omega_i = \Omega^0,$$

$$\overline{A}_{\overline{\alpha}} = \left(A_{\alpha_1 1}, \ldots, A_{\alpha_n n}\right) \in \prod_{i=1}^{n} F_{\Omega_i} = F_\Omega{}^0,$$

$$\prod_{i=1}^{n+1} \widetilde{\Omega}_i = \widetilde{\Omega},\ \prod_{i=1}^{n} \widetilde{\Omega}_i = \widetilde{\Omega}^0,$$

введем предикат P на Ω^2:

$$P(\overline{x}_{\overline{\eta}}, \overline{x}_{\overline{\eta}'}) = 1 \leftrightarrow \quad \forall i = \overline{1, n+1}\ :\ P_i\left(x^i_{\eta_i}, x^i_{\eta'_i}\right) = 1 \qquad (10)$$

и рассмотрим предикат $E \equiv P|_{\widetilde{\Omega}^2}$. Заметим, что

$$E(\overline{x}_{\overline{\eta}}, \overline{x}_{\overline{\eta}'}) = 1 \leftrightarrow \forall i = \overline{1, n+1} : E_i\left(x^i_{\eta_i}, x^i_{\eta'_i}\right) = 1.$$

Тогда условия, при которых Q конгруэнтно связан с отображением H, могут быть записаны в виде:

если $Q(\overline{x}_{\overline{\eta}}) = 1$ и $\overline{x}^0_{\overline{\eta}} \in \overline{A}_{\overline{\alpha}}$, $x^{n+1}_{\eta_{n+1}} \in A_{\alpha_{n+1}(n+1)}$, то $H(\overline{A}_{\overline{\alpha}}) = A_{\alpha_{n+1}(n+1)}$, и наоборот, если $H(\overline{A}_{\overline{\alpha}}) = = A_{\alpha_{n+1}(n+1)}$, то $Q(\overline{x}_{\overline{\eta}}) = 1$ для $\overline{x}^0_{\overline{\eta}} \in \overline{A}_{\overline{\alpha}}$, $\forall\ \overline{x}_{\overline{\eta}} \in \Omega : : \overline{x}^0_{\overline{\eta}} \in \overline{A}_{\overline{\alpha}},\ x^{n+1}_{\eta_{n+1}} \in A_{\alpha_{n+1}(n+1)}$.

Еще более компактно это запишется в виде:

$$\left.\begin{array}{l} \forall\ \overline{x}_{\overline{\eta}} \in \Omega, \overline{A}_{\overline{\alpha}} \in F_{\Omega^0} \text{ и } A_{\alpha_{n+1}(n+1)} \in F_{\Omega_{n+1}} : \\ \left[Q(\overline{x}_{\overline{\eta}}) = 1 \leftrightarrow H\left(\overline{A}_{\overline{\alpha}}\right) = A_{\alpha_{n+1}(n+1)}\right] \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \overline{x}_{\overline{\eta}} = \left(\overline{x}^0_{\overline{\eta}}, x^{n+1}_{\eta_{n+1}}\right), \overline{x}^0_{\overline{\eta}} \in \overline{A}_{\overline{\alpha}}, x^{n+1}_{\eta_{n+1}} \in A_{\alpha_{n+1}(n+1)}. \end{array}\right\} \qquad (11)$$

Будем говорить, что предикат S *конгруэнтно связан* с предикатом G, и обозначать $G = \mathrm{con}\, S$, если для них имеет место (9). Аналогично, предикат Q конгруэнтно связан с отображением H, т.е. $H = \mathrm{con}\, Q$, если для них выполняется (11). Теперь, как и ранее, легко получить

Следствие 2. *Свойства* 1) – 6) *набора* C *леммы* 2 *могут быть переформулированы эквивалентным образом в следующем виде*:

1) $\mathrm{dom}\, P = \Omega^2$;

2) $\exists \widetilde{\Omega} = \prod_{i=1}^{n+1} \widetilde{\Omega}_i \subset \Omega, E \equiv P\,|_{\widetilde{\Omega}^2}$ – *эквивалентность на* $\widetilde{\Omega}$;

3) $\mathrm{dom}\, Q = \prod_{i=1}^{n+1} \widetilde{\Omega}_i$;

4) $\overline{x}^0_{\overline{\eta}} \in \widetilde{\Omega}^0 : \exists x^{n+1}_{\eta_{n+1}} \in \widetilde{\Omega}_{n+1} : Q\left(\overline{x}_{\overline{\eta}}\right) = 1$, *где* $\overline{x}_{\overline{\eta}} = \left(\overline{x}^0_{\overline{\eta}}, x^{n+1}_{\eta_{n+1}}\right)$;

5) $\overline{x}_{\overline{\eta}}, \overline{x}_{\overline{\eta}'} \in \widetilde{\Omega} : P\left(\overline{x}_{\overline{\eta}}, \overline{x}_{\overline{\eta}'}\right) = 1, Q\left(\overline{x}_{\overline{\eta}}\right) = 1 \rightarrow \rightarrow Q\left(\overline{x}_{\overline{\eta}'}\right) = 1$;

6) $\overline{x}^0_{\overline{\eta}} \in \widetilde{\Omega}^0, x^{n+1}_{\eta_{n+1}}, x^{n+1}_{\eta'_{n+1}} \in \widetilde{\Omega}_{n+1} : Q\left(\overline{x}_{\overline{\eta}}\right) = 1$, $Q\left(\overline{x}'_{\overline{\eta}}\right) = 1 \rightarrow P_{n+1}\left(x^{n+1}_{\eta_{n+1}}, x^{n+1}_{\eta'_{n+1}}\right) = 1$, *где* $\overline{x}_{\overline{\eta}} = \left(\overline{x}^0_{\overline{\eta}}, x^{n+1}_{\eta_{n+1}}\right)$, $\overline{x}'_{\overline{\eta}} = \left(\overline{x}^0_{\overline{\eta}}, x^{n+1}_{\eta'_{n+1}}\right)$,

D

а предикат P_{n+1} *входит в набор предикатов* $\{P_i\}_{i=1}^{n+1}$, *связанный с предикатом* P *условием* (10).

Теперь мы можем сформулировать фактически доказанную теорему.

Теорема 2 (об условиях существования H_m). *На исходном наборе* $\{\Omega_i\}_{i=1}^{n+1}$ *непустых множеств может быть задано мультиотображение* $H_m = \langle \Omega, F_\Omega, H \rangle$ *тогда и только тогда, когда найдутся предикаты* P *и* Q, *удовлетворяющие свойствам набора* D. *При этом* $H = \mathrm{con}\ Q$.

Заметим, что условия набора B (координатная формулировка A) и набора D (координатная формулировка C) не зависят от природы множеств $\Omega_i, i = \overline{1, n+1}$, а характеризуют связь между предикатами P и S в первом случае, P и Q – во втором. Поэтому, как и для конгруэнтной связи, для этих связей имеет смысл ввести свои определения. Будем называть предикат P *частичным фактором* предиката S и обозначать $P = h - \mathrm{fac}\ S$, если эти предикаты удовлетворяют условиям набора B. Будем называть предикат P *фактором* предиката Q и обозначать $P = \mathrm{fac}\ Q$, если эти предикаты удовлетворяют условиям набора D. Ясно, что тогда теоремы существования G_m и H_m могут быть в компактной форме переформулированы в виде одной теоремы.

Теорема 3. *Для произвольного набора непустых множеств* $\{\Omega_i\}_{i=1}^{n+1}$ *выполняется*:

1) $\exists G_m = \left\langle \Omega, F_\Omega, G \right\rangle$, *где* $\Omega = \prod_{i=1}^{n} \Omega_i \leftrightarrow \exists P, S$ – *предикаты*: $P = h - \mathrm{fac}\ S$, *при этом* $G = \mathrm{con}\ S$;

2) $\exists H_m = \langle \Omega, F_\Omega, H \rangle$, *где* $\Omega = \prod_{i=1}^{n+1} \Omega_i \leftrightarrow \exists P, S$ – *предикаты*: $P = \mathrm{fac}\ Q$, *при этом* $H = \mathrm{con}\ Q$.

6. Условия существования мультиалгебраических систем

Полученные выше результаты дают возможность перейти к непосредственному изучению мультиалгебраических систем. Ранее мы ввели понятие мультиалгебраической системы в виде модели $\mathfrak{I} = \langle \Omega, \Sigma_S \rangle$. Уточним это определение. Итак, дана произвольная алгебраическая система $U = \langle F_\Omega, \Sigma_H, \Sigma_G \rangle$, у которой носитель F_G – множество непересекающихся подмножеств некоторого множества $\Omega \neq \varnothing$. Тогда множества операций Σ_H и предикатов Σ_P индуцируют на Ω, как на носителе, множество предикатов Σ_S, но верна и обратная связь: Σ_S индуцируют на F_Ω, как на носителе, множества операций Σ_H и предикатов Σ_P. Таким образом, возникающая модель $\mathfrak{I} = \langle \Omega, \Sigma_S \rangle$ была названа нами мультиалгебраической системой. При этом ясно, что $\mathfrak{I}$ и U связаны между собой. Будем в этом случае говорить (по аналогии с предыдущей терминологией): модель $\mathfrak{I}$ конгруэнтно связана с алгебраической системой U и будем обозначать $U = \mathrm{con}\ I$.

Модель $I_m = \langle \Omega, \Sigma_S \rangle$ будем называть *мультиалгебраической системой* в том и только в том случае, когда найдется алгебраическая система U, для которой $U = \mathrm{con}\ I_m$. Далее допустим, что на произвольном множестве Ω, а точнее на его декартовом квадрате, задан двуместный предикат P. Определим: P^n – n-я степень. Под P^n будем понимать предикат, удовлетворяющий свойствам:

а) $\mathrm{dom}\ P^n = \Omega^n \times \Omega^n$;

б) $P^n(\overline{x}, \overline{x}') = 1 \leftrightarrow \forall i = \overline{1, n} : P(x_i, x'_i) = 1$, где $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\overline{x}' = (x'_1, \ldots, x'_n)$.

Теорема 4 (об условии существования I_m). *Модель* $I_m = \langle \Omega, \Sigma_S \rangle$ *является мультиалгебраической системой тогда и только тогда, когда множество предикатов* Σ_S *и его элементы обладают следующими свойствами*:

1) $\Sigma_S = \{P, S_1, \ldots S_\gamma, \ldots\}$;

2) $\mathrm{dom}\ P = \Omega^2$;

3) $\exists \tilde{\Omega} \subset \Omega : P|_{\tilde{\Omega}^2} \equiv E$ – *предикат эквивалентности;*

4) $\exists \Sigma_{1S}, \Sigma_{2S} :$ а) $\Sigma_{1S} \cap \Sigma_{2S} = \varnothing$,

б) $\Sigma_{1S} \in \Sigma_{2S} = \Sigma_S \setminus P$;

5) $S\gamma \in \Sigma_S \setminus P :$ а) $S\gamma \in \Sigma_{1S} \to P^n = \mathrm{fac}\ S_\gamma$,

б) $S\gamma \in \Sigma_{2S} \to P^n = h - \mathrm{fac}\ S_\gamma$,

где n -арность предиката S_γ.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть I_m – мультиалгебраическая система, т. е. $I_m = \langle \Omega, \Sigma_S \rangle$ – модель, и существует U – алгебраическая система, для которой $U = \mathrm{con}\ I_m$. Это, в свою очередь, означает, что U представляет тройку $U = \langle F_\Omega, \Sigma_H, \Sigma_G \rangle$, где в качестве носителя F_Ω

выступает система попарно непересекающихся подмножеств Ω, т.е. $F_{\Omega}=\{A_1,\ldots,A_{\alpha},\ldots\}$, $A_{\alpha}\in\Omega$, Σ_H – множество операций на F_{Ω}, Σ_G – множество предикатов на декартовых степенях F_{Ω}. Требуется показать, что в этом случае на исходном множестве Ω, как на носителе, может быть задана система предикатов Σ_S (возникающая в силу $U=\mathrm{con}\, I_m$), которая обладает свойствами теоремы. Заметим, что свойства 1) – 4) характеризуют структуру множества Σ_S, свойство 5) касается связей между его элементами. Сначала остановимся на структуре Σ_S. Ясно, что в данном случае на Ω^2 можно ввести двуместный предикат P следующим образом:

$$P(x,x')=1\leftrightarrow\exists\,\alpha: x,x'\in A_{\alpha}\subset\Omega.$$

Это определение корректно, поскольку F_{Ω} – система непересекающихся подмножеств Ω. Более того, для множества $\tilde{\Omega}=\bigcup_{\alpha}A_{\alpha}$ система F_{Ω} является разбиением, поэтому ограничение $P\big|_{\tilde{\Omega}^2}$ – предикат эквивалентности. Таким образом, имеют место свойства 2) и 3). Теперь рассмотрим множество $\Sigma_H = =\{H_1,\ldots,H_{\beta},\ldots\}$ – множество операций на носителе F_{Ω}. Зафиксируем какой-либо элемент этого множества H_{β}, считая, что это какая-то n-арная операция на F_{Ω}. Тогда $H_{\beta}:F_{\Omega}^n\to F_{\Omega}$ – отображение. При этом полагая $\Omega_i=\Omega, F_{\Omega i}=F_{\Omega}, i=\overline{1,n}$, мы сталкиваемся с частным случаем мультиотображения $H_{m\beta}=\left\langle\Omega^{n+1},F_{\Omega}^{n+1},H_{\beta}\right\rangle$, условия существования которого получены выше. В данном случае предикаты

$$P_i=P,\ i=\overline{1,n+1},\ \bar{x}_{\bar{\eta}'}=\bar{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in\Omega^{n+1},$$

$$\bar{x}^0_{\bar{\eta}'}=\bar{x}^0=\left(x_1,\ldots,x_n\right)\in\Omega^n=\Omega^0,$$

$$\bar{A}_{\bar{\alpha}}=\bar{A}=(A_1,\ldots,A_n)\in F_{\Omega}^n=F_{\Omega^0}.$$

Тогда условия (11) будут выглядеть так:

$$\left.\begin{array}{l}\bar{x}\in\Omega^{n+1},\bar{A}\in F_{\Omega}^n, A_{n+1}=A\in F_{\Omega}:\\ \left[Q(\bar{x})=1\leftrightarrow H_{\beta}\left(\bar{A}\right)=A\right]\leftrightarrow\\ \leftrightarrow\bar{x}=\left(\bar{x}^0,x_{n+1}\right),\bar{x}^0\in\bar{A},x_{n+1}\in A,\end{array}\right\}\qquad(12)$$

а (10) с учетом определения 4 даст в качестве P, фактически, P^{n+1}. Таким образом, если в качестве $S_{\gamma}=Q$ из (12), то $n+1$-арные предикаты P^n и S_{γ} будут удовлетворять условиям теоремы 3, т.е. они

существуют по условиям этой теоремы и $P^{n+1}=\mathrm{fac}\,S_{\gamma}$, при этом $H_{\beta}=\mathrm{con}\,S_{\gamma}$. Эти рассуждения могут быть проведены для любого представителя множества Σ_H, и в итоге мы получим подмножество $\Sigma_{1S}\in\Sigma_S$, элементы которого удовлетворяют условию 5 а). В совершенно аналогичную ситуацию, только с использованием понятия мультиотношения и условий его существования, мы попадаем, рассматривая множество Σ_G. Ему будет соответствовать множество $\Sigma_{2S}\in\Sigma_S$, элементы которого будут удовлетворять свойству 5 б). Очевидно и то, что $\Sigma_S=P\cup\Sigma_{1S}\cup\Sigma_{2S}$ и $\Sigma_{1S}\cap\Sigma_{2S}=\varnothing$. Окончательно это позволяет сделать вывод о выполнении условий 1), 4), 5). Необходимость доказана.

Достаточность. Допустим, некоторая модель $\Im=\langle\Omega,\Sigma_S\rangle$ такова, что Σ_S и его элементы обладают свойствами 1) – 5). Тогда свойства 2), 3) позволяют сформировать носитель F_{Ω}, представляющий собой систему непересекающихся подмножеств множества Ω. Далее из 4) и 5) мы получаем, что для любого представителя $S_{\gamma}\in\Sigma_{1S}$ можно определить корректным образом операцию H_{β} на F_{Ω}, используя (12) и теорему 3. Эта же теорема позволяет каждому представителю $S_{\gamma}\in\Sigma_{2S}$ поставить в соответствие отношение или предикат G на F_{Ω}. Таким образом, формируется два множества Σ_H – операции на F_{Ω}, Σ_G – предикаты на F_{Ω} (фактически это множество мультиотношений и мультиотображений), а тройка $U=\langle F_{\Omega},\Sigma_H,\Sigma_G\rangle$ будет представлять собой алгебраическую систему. Но это означает, что модель $\Im$ является мультиалгебраической системой, т.е. $\Im=I_m$. Теорема доказана.

7. Выводы

1) Поскольку условия теоремы 4 необходимы и достаточны, они могут служить определением понятия мультиалгебраической системы. Строго говоря, это наиболее точное, с формальной точки зрения, определение этого объекта.

2) С качественной точки зрения, нами получены условия, при которых возможна компараторная идентификация в виде алгебраической системы, а также показано, что при выполнении этих условий появляется принципиальная возможность компараторным способом идентифицировать любую алгебраическую систему.

Список литературы: 1. *Шабанов-Кушнаренко Ю.П.* Теория интеллекта. Проблемы и перспективы. Х.: Вища шк. Изд-во при Харьк. ун-те, 1987. 159 с. 2. *Мальцев А.И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1970. 392 с.

Поступила в редколлегию 24.05.2000

Шабанов-Кушнаренко Юрий Петрович, д-р техн. наук, профессор кафедры ПО ЭВМ ХТУРЭ. Научные интересы: логическая математика, теория интеллекта. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина 14, тел. 40-94-46.

Шляхов Владислав Викторович, канд. техн. наук, доцент, докторант ХТУРЭ. Научные интересы: математическое моделирование, теория алгебраических систем, теория интеллекта. Адрес: Украина, 61166, Харьков, пр. Ленина, 14, тел. 30-68-57.